

# **FILIERE SCIENCES DE LA MATIERE PHYSIQUE**

## **MODULE : ELECTRICITE III**

### **Chapitre I : Electrostatique des milieux diélectriques**

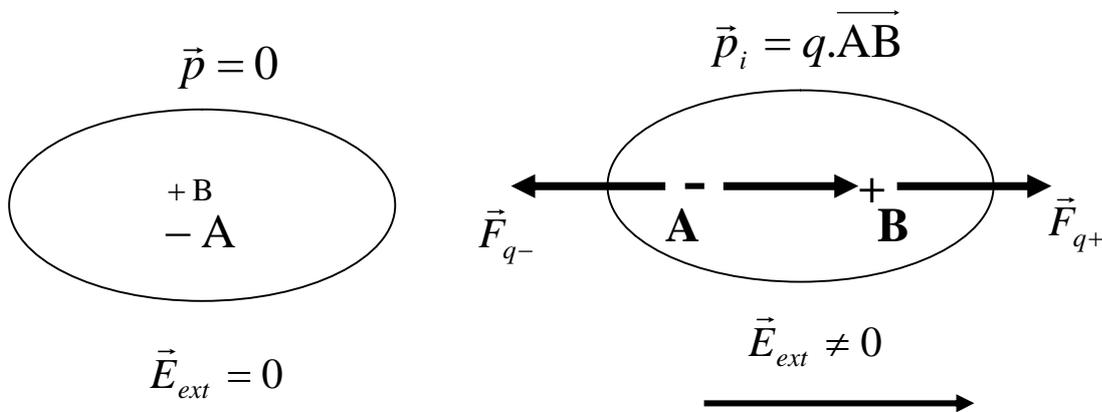
# Chapitre I : Electrostatique des milieux diélectriques

## I- Généralités

Un milieu diélectrique est un milieu isolant. C'est à dire qui ne contient pas de charges libres. Il est formé, en général, par des molécules (ou atomes) qui peuvent être polaires ou non polaires.

### I.1 Cas des molécules non polaires en l'absence d'un champ électrique appliqué $\vec{E}_{ext}$

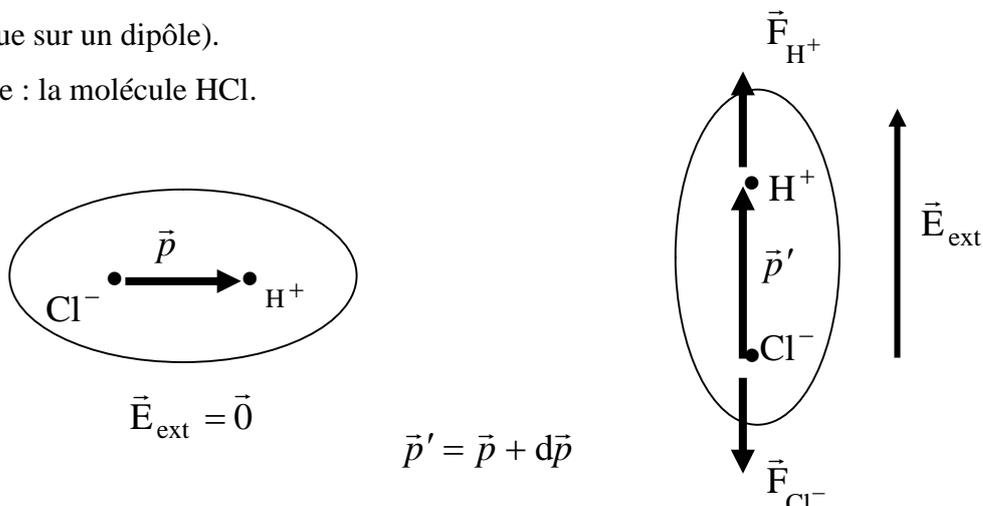
Lorsqu'on applique un champ électrique les centres de gravité des charges positives et négatives se séparent sous l'action des forces électriques appliquées. Les molécules deviennent des petits dipôles électriques de moment dipolaire induit  $\vec{p}_i$



### I.2 Cas des molécules qui sont déjà polaires même en l'absence d'un champ électrique

Lorsqu'on applique un champ extérieur, il y a modification du moment dipolaire permanent de ces molécules sous l'action des forces électriques appliquées, et orientation des dipôles obtenus dans une direction parallèle au champ appliqué (Cf. cours électrostatique, action d'un champ électrique sur un dipôle).

Exemple : la molécule HCl.



**En résumé :** Un milieu diélectrique est un milieu contenant un grand nombre de dipôles électriques.

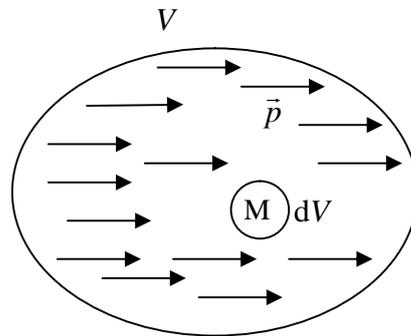
## II- Vecteur polarisation $\vec{P}$

Considérons un volume  $V$  de matière diélectrique. Un volume élémentaire  $dV$ , pris autour d'un point  $M$  du milieu, est équivalent à un dipôle électrique élémentaire de moment dipolaire  $d\vec{p}$ .

On appelle vecteur polarisation le vecteur défini, en tout point du milieu, par la relation :

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV} \quad (\text{I-1})$$

Il représente le moment dipolaire par unité de Volume (ou densité dipolaire). Son module s'exprime en Coulomb par mètre carré ( $C.m^{-2}$ ).



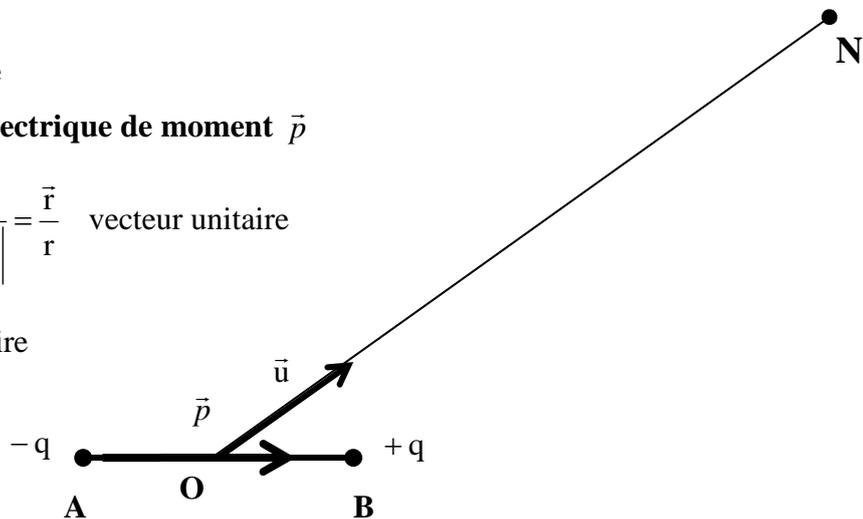
## III- Potentiel et champ électrostatiques créés par un milieu diélectrique en un point $N$ de l'espace

### III.1 Potentiel électrique

#### III.1.1 Cas d'un dipôle électrique de moment $\vec{p}$

$$\|\vec{ON}\| = r \quad ; \quad \vec{u} = \frac{\vec{ON}}{\|\vec{ON}\|} = \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{vecteur unitaire}$$

$$\vec{p} = q \cdot \vec{AB} \quad \text{moment dipolaire}$$

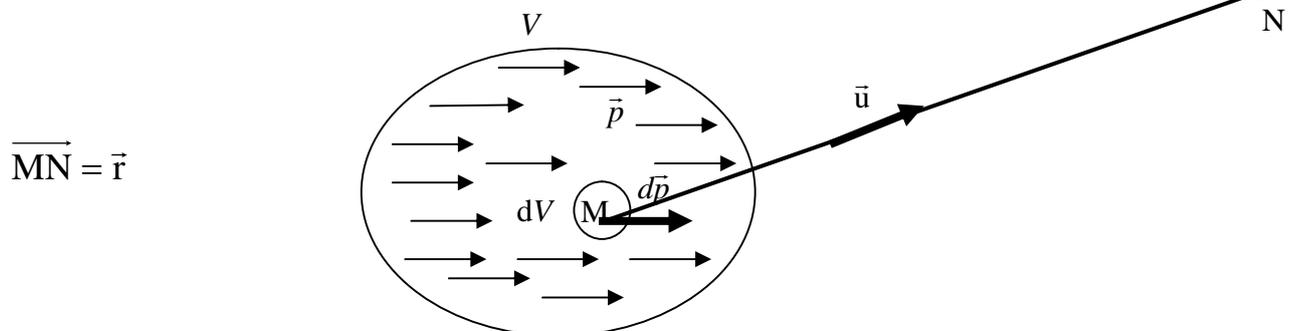


Le potentiel électrique créé par le dipôle au point  $N$  est donné par :

$$V(N) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (\text{I-2})$$

#### III.1.2 Cas du milieu diélectrique

Soit  $V_d(N)$  le potentiel créé par le milieu en un point  $N$  de l'espace.



$$\vec{MN} = \vec{r}$$

Un volume élémentaire  $dV$ , pris autour d'un point  $M$  du milieu, est équivalent à un dipôle électrique de moment :

$$d\vec{p} = \vec{P} \cdot dV \quad (\text{I-3})$$

Ce volume crée en un point N de l'espace un potentiel électrique élémentaire  $dV_d(N)$  tel que :

$$dV_d(N) = \frac{1}{4f v_0} \frac{d\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4f v_0} \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^3} dV \quad (I-4)$$

Le potentiel créé par tout le volume diélectrique en N est :

$$V_d(N) = \frac{1}{4f v_0} \iiint_V \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^3} dV \quad (I-5)$$

Nous allons développer cette intégrale en considérant les relations vectorielles ci-dessous :

Dans un repère cartésien orthonormé direct  $\mathcal{R}(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  on a :

$M(X, Y, Z); N(x, y, z); \vec{r} = \overrightarrow{MN} = (x - X)\vec{i} + (y - Y)\vec{j} + (z - Z)\vec{k}$

$$r = \|\vec{r}\| = \sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right)_M = \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{k} = \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Si  $\vec{A}$  est un champ de vecteurs et f une fonction de scalaires on a :

$$\text{div}(\vec{A}.f) = \vec{A}.\overrightarrow{\text{grad}}f + f.\text{div}\vec{A}$$

Donc, pour  $\vec{A} = \vec{P}$  et  $f = \frac{1}{r}$ , c'est notre cas, on a :

$$\frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^3} = \vec{P} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right)_M = \text{div}\left(\frac{\vec{P}}{r}\right)_M - \frac{\text{div}\vec{P}}{r}$$

ce qui permet d'écrire :

$$V_d(N) = \frac{1}{4f v_0} \iiint_V \text{div}\left(\frac{\vec{P}}{r}\right) dV - \frac{1}{4f v_0} \iiint_V \frac{\text{div}\vec{P}}{r} dV$$

Le premier terme est une intégrale triple de la divergence étendue au volume V. Elle peut se transformer en une intégrale double étendue à une surface S, qui délimite ce volume, à l'aide du théorème d'Ostrogradsky d'où l'expression du potentiel électrique dû au milieu diélectrique au point N de l'espace :

$$V_d(N) = \frac{1}{4f v_0} \iint_S \frac{\vec{P} \cdot \vec{n}}{r} dS - \frac{1}{4f v_0} \iiint_V \frac{\text{div}\vec{P}}{r} dV \quad (I-6)$$

où  $\vec{n}$  est un vecteur unitaire de la normale à S.

**Remarque :** Ce potentiel comporte deux termes :

- le premier terme est identique au potentiel électrostatique créé par une distribution de charges surfaciques de densité  $\dagger_p(M) = \vec{P}(M) \cdot \vec{n}(M)$ .

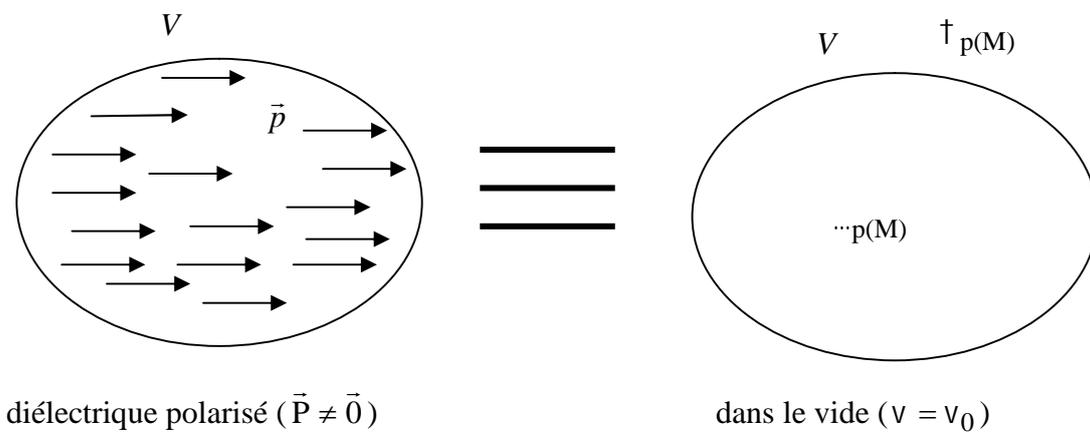
- Le deuxième terme est identique au potentiel électrostatique créé par une distribution de charges volumiques de densité  $\dots_p(M) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(M)$ .

**En conclusion :**

Pour calculer le potentiel électrostatique créé par un milieu diélectrique, il est équivalent de remplacer les dipôles électriques qui le constituent par deux distributions de charge fictives (qui n'ont aucune existence physique), appelées charges fictives de polarisation :

- une charge surfacique fictive de densité :  $\dagger_p(M) = \vec{P}(M) \cdot \vec{n}(M)$
- une charge volumique fictive de densité :  $\dots_p(M) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(M)$

Un volume diélectrique polarisé est donc équivalent dans le vide à :



**Remarque :**

Si le milieu n'est pas polarisé (c.à.d. en tout point du volume  $\vec{P} = \vec{0}$ ) les charges de polarisation sont nulles et par suite aucun potentiel ni champ électriques ne sont créés. Pour polariser le volume diélectrique on applique un champ électrique qui va orienter les dipôles électriques dans une direction qui lui est parallèle, d'où un moment dipolaire global non nul et par suite un vecteur polarisation non nul.

Si le milieu contient en plus, des charges réelles (mobiles) volumiques de densité  $\dots$ , et surfaciques de densité  $\dagger$ , les densités de charges totales sont :

$$\dagger_{tot} = \dagger_p + \dagger = \vec{P} \cdot \vec{n} + \dagger$$

$$\dots_{tot} = \dots_p + \dots = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} + \dots$$

Le potentiel total au point N est :

$$V_{tot}(N) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\dagger_{tot}}{r} \cdot dS + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\dots_{tot}}{r} dV \quad (I-7)$$

### Remarque :

Ce sont ces charges mobiles qui peuvent être à l'origine du champ électrique éventuellement appliqué pour polariser le milieu diélectrique, que l'on note en général  $\vec{E}_0$  ou  $\vec{E}_{\text{ext}}$ .

### III.2 Champ électrique

Une fois le potentiel  $V_d(N)$  est connu, le champ électrique  $\vec{E}_d(N)$  est calculé à partir de la relation :

$$\vec{E}_d(N) = -\overrightarrow{\text{grad}} V_d(N) \quad (\text{I-8})$$

Le champ électrique total au point N est :

$$\vec{E}_{\text{tot}} = \vec{E}_d(N) + \vec{E}_{\text{ext}} \quad (\text{I-9})$$

Si Le point N se trouve dans le volume diélectrique, le champ  $\vec{E}_{\text{tot}}$  s'appelle champ macroscopique.

### IV- Vecteur déplacement électrique ou induction électrique $\vec{D}$

La forme locale du théorème de Gauss est donnée par :

$$\text{div } \vec{E}(M) = \frac{\dots_{\text{tot}}(M)}{\epsilon_0} = \frac{\dots + \dots_p}{\epsilon_0} = \frac{\dots - \text{div} \cdot \vec{P}}{\epsilon_0} \quad (\text{I-10})$$

soit :  $\text{div}(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \dots(M)$

On appelle vecteur induction électrique ou excitation électrique le vecteur :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (\text{I-11})$$

tel que :

$$\text{div } \vec{D}(M) = \dots(M) \quad (\text{I-12})$$

Cette relation exprime la forme locale du théorème de Gauss généralisé.

D s'exprime en Coulomb par mètre carré ( $C \cdot m^{-2}$ ).

Si on considère un élément de volume du milieu on a :

$$\iiint_V \text{div } \vec{D}(M) dV = \iiint_V \dots dV$$

en appliquant le théorème d'Ostrogradsky on obtient la forme intégrale du théorème de Gauss généralisé :

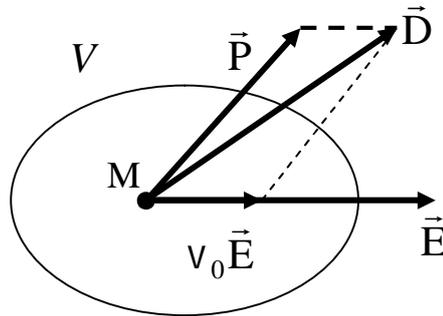
$$\iint_S \vec{D}(M) \cdot d\vec{S} = Q \text{ (totale mobile interne à S)} \quad (\text{I-13})$$

où (S) est la surface du volume V.

Q est la charge électrique réelle totale située à l'intérieur de la surface fermée de Gauss.

**Remarque :**

L'expression  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  est générale. Elle s'applique à tous les diélectriques. Elle montre, qu'en général, les vecteurs  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$  et  $\vec{P}$  ne sont pas colinéaires.



**V – Propriétés des milieux diélectriques**

**V.1 Milieux diélectriques parfaits ou linéaires, homogènes et isotropes**

En pratique, il n'y a pas de diélectriques parfaits. Les **diélectriques réels** sont caractérisés par :

- une faible conductivité électrique.
- la polarisation induite par le champ électrique extérieur ne disparaît pas instantanément lorsque ce champ disparaît. On dit que ces milieux présentent de l'hystérésis électrique.

Les **diélectriques parfaits** sont des milieux linéaires, homogènes et isotropes (L.H.I.) qui ne présentent ni conductivité électrique ni hystérésis et pour les quels la polarisation  $\vec{P}$  et le champ électrique total  $\vec{E}$  sont colinéaires. La relation de proportionnalité est donnée par :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \epsilon_e \vec{E} \quad (I-14)$$

où  $\epsilon_e$  est un scalaire qui représente la susceptibilité diélectrique de la substance.

Dans ces diélectriques parfaits les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{D}$  sont aussi colinéaires. En effet :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + \epsilon_e) \vec{E}$$

on pose  $1 + \epsilon_e = \epsilon_r$  d'où :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad (I-15)$$

$\epsilon_r$  est un nombre sans dimension qui représente la permittivité électrique relative du milieu.

$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$  est la permittivité absolue. Ici c'est un scalaire.

L'expression (I-14) peut aussi s'écrire :

$$\vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E} \quad (I-16)$$

## V.2 Milieux diélectriques linéaires anisotropes

Un milieu diélectrique est dit linéaire si l'application qui, à tout point M du milieu, fait correspondre  $\vec{D}(M)$  à  $\vec{E}(M)$  est linéaire.

Soit  $\vec{D}(D_x, D_y, D_z)$  et  $\vec{E}(E_x, E_y, E_z)$  dans un repère cartésien orthonormé direct  $\mathfrak{R}(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

La relation entre ces deux vecteurs est une relation matricielle :

$$(\mathbf{D}) = (\mathbf{v}) (\mathbf{E})$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{xx} & v_{xy} & v_{xz} \\ v_{xy} & v_{yy} & v_{yz} \\ v_{xz} & v_{yz} & v_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (\text{I-17})$$

La matrice  $(\mathbf{v})$  des permittivités diélectriques étant symétrique, il existe une base orthonormée directe  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  appelée base principale dans laquelle on a :

$$(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} v_1 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & v_3 \end{pmatrix} \quad (\text{I-18})$$

La relation matricielle entre  $\vec{D}(D_1, D_2, D_3)$  et  $\vec{E}(E_1, E_2, E_3)$  dans cette base s'écrit :

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (\text{I-19})$$

ce qui donne :

$$D_1 = v_1 E_1 \quad ; \quad D_2 = v_2 E_2 \quad ; \quad D_3 = v_3 E_3 \quad (\text{I-20})$$

Les trois axes  $Mx_1, Mx_2, Mx_3$  de vecteurs unitaires respectifs  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  sont les axes électriques (ou axes principaux) du milieu diélectrique au point M.

$v_1, v_2, v_3$  sont les permittivités diélectriques principales en M.

La permittivité diélectrique dépend donc de la direction considérée dans le milieu. On dit que le milieu diélectrique est anisotrope. Les vecteurs  $\vec{D}$  et  $\vec{E}$  ne sont pas colinéaires.

De même pour les composantes  $P_1, P_2$  et  $P_3$  du vecteur polarisation  $\vec{P}$  :

$$P_1 = (v_1 - v_0) E_1 \quad ; \quad P_2 = (v_2 - v_0) E_2 \quad ; \quad P_3 = (v_3 - v_0) E_3 \quad (\text{I-21})$$

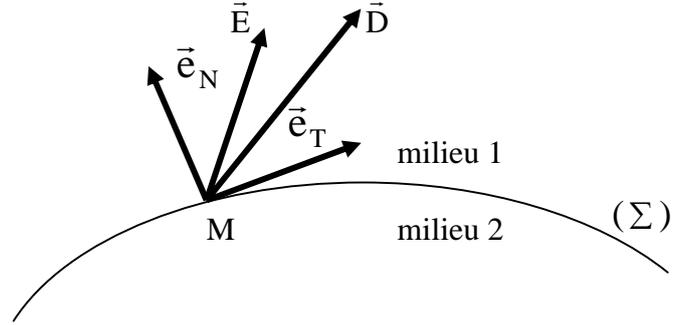
Les vecteurs  $\vec{P}$  et  $\vec{E}$  ne sont pas colinéaires.

- Si  $v_1 = v_2 = v_3 = v(M)$  indépendant de la direction considérée le milieu est isotrope.
- Si  $v$  ne dépend pas du point M considéré le milieu est homogène.

D'où l'appellation linéaire, homogène et isotrope des milieux diélectriques parfaits.

## VI – Relations de passage, pour $\vec{D}$ et $\vec{E}$ , entre deux milieux

Au point M de la surface de séparation  $\Sigma$   
le vecteur  $\vec{D}$  s'exprime suivant les directions tangente et normale de vecteurs unitaires respectifs  $\vec{e}_T$  et  $\vec{e}_N$  par :



$$\vec{D} = D_T \cdot \vec{e}_T + D_N \cdot \vec{e}_N \quad \text{et} \quad \vec{E} = E_T \cdot \vec{e}_T + E_N \cdot \vec{e}_N$$

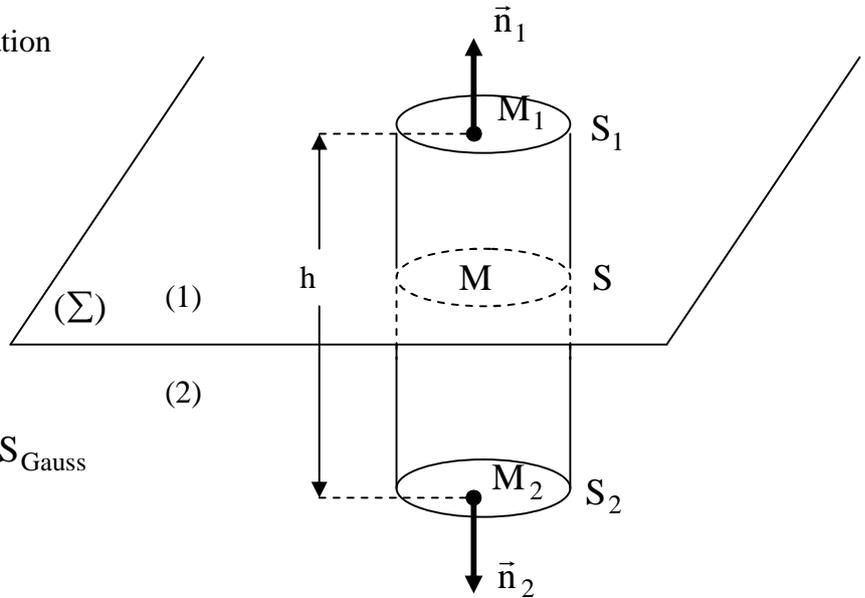
### VI.1 Composante normale de $\vec{D}$

On applique le théorème de Gauss à une surface cylindrique fermée  $S_{\text{Gauss}}$  de hauteur  $h$  tendant vers zéro.

Considérons une surface de séparation plane ( $\Sigma$ ) :

$$S_{\text{Gauss}} = S_1 + S_2 + S_L$$

$$\oiint_{S_{\text{Gauss}}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$$



$Q$  : charge mobile totale interne à  $S_{\text{Gauss}}$

$$\oiint_{S_{\text{Gauss}}} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{D}_1(M_1) \cdot \vec{n}_1 dS_1 + \iint_{S_2} \vec{D}_2(M_2) \cdot \vec{n}_2 dS_2 + \Phi_{\vec{D}/S_L} = \iiint_V \dots dV \quad (\text{I-22})$$

On veut établir la relation de passage à la surface de séparation entre les milieux (1) et (2), c'est à dire lorsque  $h$  tend vers zéro.

Lorsque  $h \rightarrow 0$

$$S_L \rightarrow 0 \quad ; \quad \Phi_{\vec{D}/S_L} \rightarrow 0 \quad ; \quad S_1 \text{ et } S_2 \rightarrow S$$

$$M_1 \text{ et } M_2 \rightarrow M \in (\Sigma) \quad ; \quad \begin{aligned} \vec{D}_1(M_1) &\rightarrow \vec{D}_1(M) \\ \vec{D}_2(M_2) &\rightarrow \vec{D}_2(M) \end{aligned}$$

$$\dots dV \rightarrow \dagger dS \quad ; \quad \vec{n}_1 = -\vec{n}_2$$

L'expression du théorème de Gauss précédente devient dans ce cas :

$$\iint_{S_1} [\vec{D}_1(M) \cdot \vec{n}_1 - \vec{D}_2(M) \cdot \vec{n}_1] dS = \iint_S \dagger dS \quad (I-23)$$

Cette expression est vraie quelque soit  $dS$ , donc, on a nécessairement :

$$\vec{D}_1(M) \cdot \vec{n}_1 - \vec{D}_2(M) \cdot \vec{n}_1 = \dagger \quad (I-24)$$

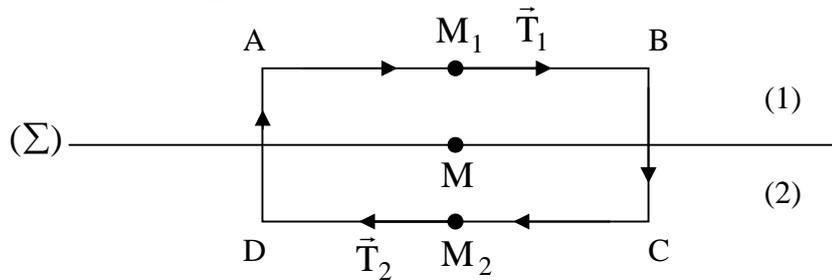
**Conclusion :** A la traversée d'une surface de séparation, entre deux milieux, contenant une charge surfacique réelle de densité  $\dagger$ , il y a discontinuité de la composante normale de  $\vec{D}$ .

## VI.2 Composante tangentielle de $\vec{E}$

Le champ étant électrostatique, sa circulation est conservative :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

$\Gamma$  = contour fermée = rectangle ABCD



$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{AB} \vec{E}_1(M_1) \cdot d\vec{\ell}_{AB} \cdot \vec{T}_1 + \int_{CD} \vec{E}_2(M_2) \cdot d\vec{\ell}_{CD} \cdot \vec{T}_2 + C_{\vec{E}/BC} + C_{\vec{E}/DA} = 0$$

On s'intéresse à ce qui se passe à la surface de séparation ( $\Sigma$ ), donc lorsque :

$$BC \text{ et } DA \rightarrow 0 \quad ; \quad C_{\vec{E}/BC} \text{ et } C_{\vec{E}/DA} \rightarrow 0$$

$$M_1 \text{ et } M_2 \rightarrow M \in (\Sigma) \quad ; \quad \begin{aligned} \vec{E}_1(M_1) &\rightarrow \vec{E}_1(M) \\ \vec{E}_2(M_2) &\rightarrow \vec{E}_2(M) \end{aligned}$$

$$d\ell_{AB} = d\ell_{CD} = d\ell \quad ; \quad \vec{T}_1 = -\vec{T}_2$$

La circulation de  $\vec{E}$  s'écrit donc :

$$\vec{E}_1(M) \cdot \vec{T}_1 = \vec{E}_2(M) \cdot \vec{T}_1 \quad (I-25)$$

**Conclusion :**

A la traversée d'une surface de séparation entre deux milieux il y a continuité de la composante tangentielle de  $\vec{E}$ .

## VII – Energie électrostatique en présence du champ B

### VII.1 Densité volumique d'énergie

On démontre que la densité volumique d'énergie électrostatique emmagasinée dans un milieu où règne un champ électrique est égale à :

$$w_e(\mathbf{M}) = \frac{1}{2} \vec{D}(\mathbf{M}) \cdot \vec{E}(\mathbf{M}) \quad (\text{I-26})$$

Dans le cas d'un milieu parfait (L.H.I.),  $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$ , la densité d'énergie s'écrit :

$$w_e(\mathbf{M}) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2(\mathbf{M}) = \frac{1}{2 \epsilon_0 \epsilon_r} D^2(\mathbf{M}) \quad (\text{I-27})$$

### VII.2 Energie électrostatique

L'énergie électrostatique contenue dans un volume  $V$  d'un milieu diélectrique parfait est donnée par :

$$W_e = \iiint_V w_e(\mathbf{M}) dV = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r \iiint_V E^2(\mathbf{M}) dV = \frac{1}{2 \epsilon_0 \epsilon_r} \iiint_V D^2(\mathbf{M}) dV \quad (\text{I-28})$$