Module: (MA_4) ALGEBRE 5

Programme

Chapitre I: **Formes linéaires et espace dual.**

Chapitre II: **Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques.**

Chapitre III: **Décomposition de Gauss des formes quadratiques.**

Chapitre IV: **Espaces Préhilbertiens réels.**

Chapitre V: **Espaces Euclidiens.**

Pr. Samir Bouchiba

Chapitre I: Formes linéaires et espace dual

Dans tout ce qui suit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1- Espace dual

Definition 1.1.
Soit E un espace vectoriel sur K. On appelle **forme linéaire** sur E toute application linéaire $u : E \longrightarrow K$ c'est à dire,

$$u(\alpha x + \beta y) = \alpha u(x) + \beta u(y), \forall x, y \in E, \forall \alpha, \beta \in K.$$

L'ensemble E^* des formes linéaires sur E est un espace vectoriel sur K.
E^* s'appelle l'**espace dual** de E.

Exemple 1.2.
Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n. Alors $\mathrm{tr} : E \longrightarrow \mathbb{R}$, tel que

$$\mathrm{tr}\Big(M = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}\Big) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

est la trace de M, est une forme linéaire sur E.

Remarque.
Soit E un espace vectoriel de dimension n sur K et soit $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ une base de E sur K. Soit $f : E \longrightarrow K$ une forme linéaire sur E. Alors la matrice de f relativement à la base B est

$$(f(e_1)\ f(e_2) \cdots f(e_n)).$$

Proposition 1.3.
Soit E un espace vectoriel de dimension n sur K et soit $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ une base de E sur K. Pour $i = 1, 2, \cdots, n$, on definit l'application $e_i^* : E \longrightarrow K$ tel que pour tout $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$, on a $e_i^*(x) = x_i$. Alors,

(1) $\forall i = 1, \cdots, n$, e_i^* est une forme linéaire sur E (c'est la ième projection).
(2) $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$, où δ_{ij} est le symbole de Kronecker, i.e., $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.
(3) $B^* = \{e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*\}$ est une base de E^* qui s'appelle **la base duale de B**.
(4) $\dim(E^*) = \dim(E) = n$.

Démonstration.
(1) et (2) sont clairs.
3) Soient $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in K$ tels que $\alpha_1 e_1^* + \alpha_2 e_2^* + \cdots + \alpha_n e_n^* = 0$. On applique cette application à e_1, on aura

$$(\alpha_1 e_1^* + \alpha_2 e_2^* + \cdots + \alpha_n e_n^*)(e_1) = 0$$

et alors, $\alpha_1 e_1^*(e_1) + \alpha_2 e_2^*(e_1) + \cdots + \alpha_n e_n^*(e_1) = \alpha_1 = 0$. Le même travail on le fait pour montrer que $\alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. Ce qui veut dire que B^* est une famille libre. Soit maintenant $f \in E^*$ une forme linéaire. Soit $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n \in E$. Alors $f(x) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \cdots + x_n f(e_n)$. Comme $x_i = e_i^*(x)$, on obtient $f(x) = f(e_1)e_1^*(x) + f(e_2)e_2^*(x) + \cdots + f(e_n)e_n^*(x)$. Par suite, pour tout $x \in E$,

$$f(x) = \Big(f(e_1)e_1^* + f(e_2)e_2^* + \cdots + f(e_n)e_n^*\Big)(x)$$

ce qui veut dire que

$$f = f(e_1)e_1^* + f(e_2)e_2^* + \cdots + f(e_n)e_n^*.$$

Par conséquent B^* est une famille génératrice et donc une base de E.
4) Il découle de (3).

Exemple 1.4.
Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n. Soit $B = \{E_{ij}\}_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de E avec E_{ij} est la matrice dont tous les coefficients sont tous nuls sauf le coefficient qui se trouve à la ième ligne et jème

colonne qui est égal à 1. Alors la forme linéaire trace s'écrit

$$\mathrm{tr} = E_{11}^* + E_{22}^* + \cdots + E_{nn}^*.$$

Voici quelques propriétés des formes linéaires.

Proposition 1.5.
Soit E un espace vectoriel sur K et $x \in E$. Alors

$$u(x) = 0, \forall u \in E^* \Rightarrow x = 0.$$

Démonstration.
On montre la contraposée. Supposons que $x \neq 0$. Soit H un suppl'ementaire de $\mathrm{Vect}(\{x\}) = Kx$, d'où $E = Kx \oplus H$. Soit $u : E = Kx \oplus H \longrightarrow K$ l'application telle que

$$u(\alpha x + h) = \alpha, \forall \alpha \in K, \forall h \in H.$$

Alors, $u \in E^*$ et $u(x) = 1 \neq 0$. Par suite il existe une forme linéaire u de E telle que $u(x) = 1 \neq 0$.

Corollaire 1.6.
Soit E un espace vectoriel sur K. Soit $x \in E$ tel que $x \neq 0$. Alors il existe $u \in E^*$ telle que $u(x) = 1$.

2- Hyperplan

Definition 2.1.
Soit E un espace vectoriel sur K. Un **hyperplan** H de E est un sous espace vectoriel de E tel qu'il existe une droite vectorielle non nulle D telle que $E = H \oplus D$.

Remarque.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Un

sous espace vectoriel H de E est un hyperplan si et seulement si $\dim(H) = n-1$.

Proposition 2.2.

Soit E un espace vectoriel sur K. Si H est un hyperplan de E, alors

$$E = Ka \oplus H, \forall a \notin H.$$

Démonstration.

Soit H un hyperplan de E et $a \in E \setminus H$. Soit $D = \mathrm{Vect}\{d\}$ une droite vectorielle de E telle que $E = H \oplus D$. En premier lieu, notez que $Ka \cap H = \{0\}$. En effet, soit $x = \alpha a \in H$ avec $\alpha \in K$. Alors, on a soit $\alpha = 0$ et donc $x = 0$, soit $\alpha \neq 0$ et donc $a = \alpha^{-1} x \in H$ ce qui est absurde puisque $a \notin H$. Alors $Ka \oplus H$ est une somme directe telle que $Ka \oplus H \subseteq E = D \oplus H$. D'où $a = \alpha d + h$, avec $0 \neq \alpha \in K$ (puisque $a \notin H$) et $h \in H$. Alors $d = \dfrac{1}{\alpha} a - \dfrac{1}{\alpha} h \in Ka \oplus H$. Par suite $D \subseteq Ka \oplus H$ et par conséquent, $E = D \oplus H \subseteq Ka \oplus H$. D'où $E = Ka \oplus H$.

Corollaire 2.3.

Soit E un espace vectoriel sur K et H un hyperplan de E. Soit $a \in E \setminus H$. Alors il existe $u \in E^*$ tel que la restriction $u/H = 0$ (c'est à dire $u(h) = 0, \forall h \in H$) et $u(a) = 1$.

Démonstration.

On a, d'après Proposition 2.2, $E = Ka \oplus H$. On considère $u \in E^*$ tel que $u(\alpha a + h) = \alpha, \forall \alpha \in K, \forall h \in H$. Alors, $u(h) = 0$, $\forall h \in H$ et $u(a) = 1$.

Proposition 2.4.

Soit E un espace vectoriel sur K. Alors
1) Un sous espace vectoriel H de E est un hyperplan si et seulement si il existe $u \in E^*$ tel que $u \neq 0$ et $H = \mathrm{Ker}(u)$.
2) Soit $u \in E^*$ tel que $u \neq 0$ et $H = \mathrm{Ker}(u)$ un hyperplan.

Alors l'égalité $u(x) = 0$ est appelée **une équation de** H et on a, pour $v \in E^*$,

$H = \ker(v) \Leftrightarrow \exists \lambda \in K \setminus \{0\} : v = \lambda u$ ($\{u, v\}$ est une famille liée).

Démonstration.

1) Soit H un hyperplan de E et D une droite vectorielle telle que $E = D \oplus H$. Soit $a \in D$ tel que $a \neq 0$. D'où $\exists u \in E^*$ tel que $u(a) = 1$ et $u/H = 0$. Par suite $\mathrm{Ker}(u) = H$ puisque $u(\alpha a + h) = \alpha, \forall \alpha \in K, \forall h \in H$. Inversement, montrons que, si $u \in E^*$ tel que $u \neq 0$, alors $H = \mathrm{Ker}(u)$ est un hyperplan. En effet, soit $0 \neq u : E \longrightarrow K$ une forme linéaire sur E et soit $H = \mathrm{Ker}(u)$. Premièrement notez que u est surjective. Par suite $\mathrm{Im}(u) = K$. D'où il existe $a \in E$ tel que $u(a) = 1$. D'où $Ka \oplus H$ est une somme directe. Soient $x \in E$ et $\alpha = u(x)$. Notez que

$$u(\alpha a) = \alpha = u(x).$$

D'où $x - \alpha a \in \mathrm{Ker}(u) = H$. Par suite $x \in Ka \oplus H$. Par conséquent, $E = Ka \oplus H$ et par suite H est un hyperplan.

2) Si $\exists \lambda \in K \setminus \{0\}$ tel que $v = \lambda u$, alors $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(v) = H$. Maintenant, supposons que $H = (\mathrm{Ker}(u)) = \mathrm{Ker}(v)$ pour un certain $v \in E^*$. D'après Corollaire 2.3, il existe $a \in E \setminus H$ tel que $u/H = 0$ et $u(a) = 1$. Par suite $u(\alpha a + h) = \alpha, \forall \alpha \in K, \forall h \in H$. Soit $\lambda = v(a)$. D'où $\lambda \neq 0$ puisque $a \notin H$ (car sinon $\lambda = v(a) = 0 \Rightarrow a \in \mathrm{Ker}(v) = H$ absurde). Par suite

$$v(\alpha a + h) = \lambda\alpha = \lambda u(\alpha a + h) = (\lambda u)(\alpha a + h), \forall \alpha \in K, \forall h \in H.$$

Par conséquent, comme $E = Ka \oplus H$, $v(x) = (\lambda u)(x), \forall x \in E$, et ainsi $v = \lambda u$.

3-Equation d'un hyperplan

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ une base de E. Soit $u \in E^*$. D'où la matrice de u relativement à B est $M(u,B) = (a_1\ \ a_2 \cdots a_n)$ avec $a_i = u(e_i), \forall i = 1, \cdots, n$. Soit $x \in E$ avec $x = x_1e_1 + \cdots x_ne_n$, alors

$$u(x) = (a_1\ a_2\ \cdots a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n.$$

Proposition 3.1.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et soit $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E. L'equation cartésienne d'un hyperplan H est de la forme

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$$

avec $a_1, a_2, \cdots, a_n \in K$ **non tous nuls**. Alors $H = \ker(u)$ avec $u \in E^*$ de matrice $(a_1\ a_2\ \cdots a_n)$.

Démonstration.

Soit H un sous espace vectoriel de E. Alors H est un hyperplan si et seulement si $\exists 0 \neq u \in E^*$ tel que $H = \text{Ker}(u)$ si et seulement si $\exists 0 \neq u \in E^*$ tel que $H = \{x \in E : u(x) = 0\}$ si et seulement si $\exists 0 \neq u \in E^*$ tel que $(x \in H \Leftrightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0)$, où $(a_1\ a_2 \cdots a_n)$ est la matrice de u.

4-Base duale et base préduale

Proposition-Définition 4.1.

Soient E un espace vectoriel sur K de dimension $n \geq 1$ et $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ une base de E. Pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, on définit le dual $e_i^* \in E^*$ de e_i par $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}, \forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Alors, $B^* = \{e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*\}$ est une base de E^* appelée base duale de B. Aussi, la base B de E est appelée base préduale de B^*.

Corollary 2.10.
Soit E un espace vectoriel sur K de dimension n et soit $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E. Soit $u \in E^*$. Alors

$$u = u(e_1)e_1^* + u(e_2)e_2^* + \cdots + u(e_n)e_n^*.$$

Proposition 2.11.
Soit E un espace vectoriel sur K de dimension n. Soient $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une famille de E et $B^* = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ une famille de E^* telles que

$$u_i(e_j) = \delta_{ij}, \forall i, j.$$

Alors
1) B est une base de E.
2) B^* est une base de E^* et B^* est la base duale de B.

Démonstration.
1) Soient $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in K$ tels que $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = 0$. D'où, $\forall j \in \{1, \cdots, n\}$,

$$\begin{aligned} u_j(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n) &= \alpha_1 u_j(e_1) + \alpha_2 u_j(e_2) + \cdots + \alpha_n u_j(e_n) \\ &= \alpha_j = 0. \end{aligned}$$

Par suite B est une famille libre et par conséquent B est une base de E.
2) Elle provient de Proposition-Definition 2.9.

Proposition 2.12.
Soient E un espace vectoriel de dimension n et $u_1, u_2, \cdots, u_p$ une famille libre de E^*. Alors il existe p vecteurs $x_1, x_2, \cdots, x_p$ tels que $u_i(x_j) = \delta_{ij}, \forall i, j$.

Démonstration.
On complète $\{u_1, \cdots, u_p\}$ en une base $\{u_1, \cdots, u_n\}$ de E^*. Soit $f : E \longrightarrow K^n$ tel que $f(x) = (u_1(x), \cdots, u_n(x))$. f est une application linéaire. Montrons que f est injective. Soit $x \in E$ tel que $f(x) = (0, \cdots, 0)$. Supposons que $x \neq 0$. D'où, d'après

Corollaire 2.3, il existe $u \in E^*$ tel que $u(x) = 1$. Comme $\{u_1, \cdots, u_n\}$ est une base de E^*, il existe $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in K$ tels que $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$. On a $f(x) = (u_1(x), \cdots, u_n(x)) = (0, \cdots, 0)$, d'où $u_1(x) = \cdots = u_n(x) = 0$ et par suite $u(x) = 0$ ce qui est absurde puisque $u(x) = 1$. Par suite $x = 0$ et ainsi $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$. D'où f est injective. Maintenant, comme $\dim(E) = \dim(K^n) = n$, on obtient que f est bijective et par suite f est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Soit $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ et $(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0) \in K^n$ avec le 1 est placé à la $j$ième place. D'où il existe $x_j \in E$ tel que

$$f(x_j) = (u_1(x_j), \cdots, u_n(x_j)) = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0).$$

Par suite $u_j(x_j) = 1$ et $u_i(x_j) = 0, \forall i \neq j$. Par conséquent $u_i(x_j) = \delta_{ij}, \forall i, j$.

Corollaire 2.13.

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ sur K. Soit $L = \{u_1, \cdots, u_n\}$ une base de E^*. Alors il existe une base $B = \{x_1, \cdots, x_n\}$ de E telle que $B^* = L$ c'est à dire que B est la base préduale de L. Les vecteurs x_j sont déterminés par le système d'equations $u_i(x_j) = \delta_{ij}, \forall i, j$.

Démonstration.

Elle provient de la combinaison de Proposition 2.11 et Proposition 2.12.

Exercice.

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E. Soient $f_1, f_2, f_3 \in E^*$ telles que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f_1 & = & 2e_1^* + e_2^* + e_3^* \\ f_2 & = & -e_1^* + 2e_3^* \\ f_3 & = & e_1^* + 3e_2^* \end{array} \right.$$

Montrer que $\{f_1, f_2, f_3\}$ est une base E^* et donner sa base préduale.