Chapitre II: Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques

Soient $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un K-espace vectoriel.

Definition 1.1.
1) On appelle **forme bilinéaire (fb)** sur E toute application $\varphi : E \times E \longrightarrow K$ telle que, pour tout $x, x', y, y' \in E$ et pour tout $\alpha, \beta \in K$, on a

a) $\varphi(\alpha x + \beta x', y) = \alpha\varphi(x, y) + \beta\varphi(x', y)$.

b) $\varphi(x, \alpha y + \beta y') = \alpha\varphi(x, y) + \beta\varphi(x, y')$.

2) Une application $\varphi : E \times E \longrightarrow K$ est appelée une **forme bilinéaire symétrique (fbs)** si φ est une fb qui est de plus symétrique, c'est à dire, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$, $\forall x, y \in E$.
3) Soit φ est une fbs sur E. On appelle **forme quadratique** associée à φ l'application $q : E \longrightarrow K$ definie par

$$q(x) = \varphi(x, x), \forall x \in E.$$

4) On note $\mathcal{L}(E, E, K)$ l'ensemble des fb, $\mathcal{S}(E, K)$ l'ensemble des fbs et $\mathcal{Q}(E)$ l'ensemble des fq.

Exemples 1.2.
1) Soient $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definie par

$$\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 + x_2 y_2 \text{ et } q(x, y) = x^2 + y^2.$$

Alors φ est une fbs et q est la fq associée à φ.
2) Soit $\varphi : M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application definie par $\varphi(A, B) =\text{tr}(AB)$ la trace de AB et $q : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definie par $q(A) =\text{tr}(A^2)$. Alors φ est une fbs et q est la fq associée à φ.

Proposition 1.3.
$\mathcal{L}(E, E, K)$, $\mathcal{S}(E, K)$ et $\mathcal{Q}(E)$ sont des K-espaces vectoriels.

Remarque.
Soit φ une fb sur E.
1) Soit $y \in E$ fixé. Soit $\varphi_y = \varphi(-,y) : E \longrightarrow K$ l'application telle que $\varphi_y(x) = \varphi(x,y)$. Alors φ_y est une forme linéaire sur E, i.e., $\varphi_y \in E^*$.
2) Soit $x \in E$ fixé. Soit $\varphi_x = \varphi(x,-) : E \longrightarrow K$ l'application telle que $\varphi_x(y) = \varphi(x,y)$. Alors φ_x est une forme linéaire sur E, i.e., $\varphi_x \in E^*$.

Definition 1.4.
Soit $q : E \longrightarrow K$ une application. On dit que q est une forme quadratique si il existe une fbs $\varphi : E \times E \longrightarrow K$ telle que $q(x) = \varphi(x,x), \forall x \in E$. φ s'appelle une forme polaire de q.

Voici quelques propriétés des formes quadratiques.

Proposition 1.5.
Soit $q : E \longrightarrow K$ une forme quadratique. Alors:
1) $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x), \forall x \in E, \forall \lambda \in K$.
2) $q(-x) = q(x), \forall x \in E$.
3) $q(0_E) = 0_K$.

Démonstration.
1) Soit φ une forme polaire de q. Soient $\lambda \in K$ et $x \in E$. On a

$$q(\lambda x) = \varphi(\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 \varphi(x,x) = \lambda^2 q(x).$$

2) $q(-x) = (-1)^2 q(x) = q(x)$.
3) $q(0_E) = q(0_k 0_E) = 0_K^2 q(0_E) = 0_K q(0_E) = 0_K$.

Proposition 1.6.
Soit $q : E \longrightarrow K$ une forme quadratique. Alors l'application

$\varphi : E \times E \longrightarrow K$ definie par

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$$

est l'unique forme polaire de q appelée la forme polaire de q.

Démonstration.
Soit ψ une fp arbitraire de q. D'où

$$\psi(x+y, x+y) = q(x) + q(y) + 2\psi(x, y) = q(x+y).$$

Ce qui donne $\psi(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)) = \varphi(x, y)$, $\forall x, y \in E$. Par suite $\psi = \varphi$.

Proposition 1.7.
Soit $q : E \longrightarrow K$ une application. Alors q est une forme quadratique sur E si et seulement si
1) $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x), \forall x \in E, \forall \lambda \in K$.
2) L'application $\varphi : E \times E \longrightarrow K$ definie par

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$$

est une forme bilinéaire sur E.

Démonstration.
Supposons que (1) et (2) sont vérifiés. D'où $\forall x \in E$,

$$\varphi(x, x) = \frac{1}{2}(q(2x) - 2q(x)) = \frac{1}{2}(4q(x) - 2q(x)) = q(x).$$

Alors q est une fq.

Proposition 1.8.
L'application $\psi : \mathcal{S}(E, K) \longrightarrow \mathcal{Q}(E)$ definie par $\psi(\varphi) = q$ pour toute fbs φ, avec q est la forme quadratique associée à φ,

est un isomorphisme d'espaces vectoriels sur K.

Démonstration.
Il est facile de voir que ψ est linéaire. Soit $q \in \mathcal{Q}(E)$. D'où il existe une unique $f \in \mathcal{S}(E,K)$ qui soit la forme polaire de q, c'est à dire que, $\psi(f) = q$. Alors ψ est un isomorphisme.

Application
Montrer que $q : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definie par $q(A) = \det(A)$ est une forme quadratique.
D'abord, $q(\alpha A) = \det(\alpha A) = \alpha^2 \det(A) = \alpha^2 q(A), \forall \alpha \in \mathbb{R}$ et $\forall A \in M_2(\mathbb{R})$. Soient $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ deux éléments de $M_2(\mathbb{R})$. Alors,

$$\det(A+B) = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \\ a_3+b_3 & a_4+b_4 \end{vmatrix} =$$

$$a_1a_4 + a_1b_4 + b_1a_4 + b_1b_4 - a_2a_3 - a_2b_3 - b_2a_3 - b_2b_3$$

Par suite,

$$\varphi(A,B) = \frac{1}{2}(\det(A+B) - \det(A) - \det(B)) = \frac{1}{2}(a_1b_4 + b_1a_4 - (a_2b_3 + a_3b_2))$$

definie une fb sur $M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R})$. Par conséquent, q est une fq sur $M_2(\mathbb{R})$.

Remarque.
L'application $\det : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ n'est pas une forme quadratique lorsque $n \neq 2$.

Definition 1.9.
Soient E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E. Soit $\varphi : E \times E \longrightarrow K$ une fbs.

Soeint $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ et $y = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n$. Alors

$$\varphi(x,y) = \sum_{i,j} x_iy_j\varphi(e_i,e_j).$$

1) La matrice de φ dans la base B est definie par

$$M(\varphi,B) = (\varphi(e_i,e_j))_{i,j} = \begin{pmatrix} \varphi(e_1,e_1) & \varphi(e_1,e_2) & \cdots & \varphi(e_1,e_n) \\ \varphi(e_2,e_1) & \varphi(e_2,e_2) & \cdots & \varphi(e_2,e_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi(e_n,e_1) & \varphi(e_n,e_2) & \cdots & \varphi(e_n,e_n) \end{pmatrix}$$

2) La matrice d'une forme quadratique q dans B est la matrice de sa forme polaire φ dans B, c'est à dire que $M(q,B) = M(\varphi,B)$.

Remarque.
La matrice d'une forme bilinéaire symetrique est une matrice symetrique.

Proposition 1.10.
Soit $\varphi : E \times E \longrightarrow K$ une fbs avec E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Soient B une base de E et $A = M(\varphi,B)$. Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Alors

$$\varphi(x,y) = {}^tX.A.Y = (x_1x_2\cdots x_n)A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Démonstration.

Soit $A=(a_{ij})_{i,j}$. On a $A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}y_1+a_{12}y_2+\cdots+a_{1n}y_n \\ a_{21}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{2n}y_n \\ \vdots \\ a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\cdots+a_{nn}y_n \end{pmatrix}$.

D'où

$$^tXAY = (a_{11}x_1y_1+a_{12}x_1y_2+\cdots+a_{1n}x_1y_n)+(a_{21}x_2y_1+ a_{22}x_2y_2+\cdots+a_{2n}x_2y_n)+\cdots+(a_{n1}x_ny_1+a_{n2}x_ny_2+\cdots+a_{nn}x_ny_n)$$

$$=\varphi(x,y).$$

Remarque.

Soit E un espace vectoriel de dimension $n\geq 1$ et soit B une base de E.

1) Soit φ une fbs sur E. Si $\varphi(x,y)=\sum_{i,j} a_{ij}x_iy_j, \forall x,y\in E$, alors

$$M(\varphi,B)=(a_{ij})_{i,j}.$$

2) Soit q une fq sur E. Si $q(x)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2+\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}x_ix_j$, alors

$$M(q,B)=\begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} & \cdots & \frac{1}{2}a_{1n} \\ \frac{1}{2}a_{21} & a_{22} & \cdots & \frac{1}{2}a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2}a_{n1} & \frac{1}{2}a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemple

Soit $q:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ la forme quadratique telle que

$$q(x,y,z)=x^2+2y^2+2z^2+2xy-4xz-6yz.$$

1) Donner la matrice $M(q,B)$ de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2) Déterminer la forme polaire φ de q.

Proposition 1.11.
Soient E un espace vectoriel sur K et $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E. Soit $\mathcal{S}_n(K)$ l'espace vectoriel des matrices symétriques sur K de degré n. Alors l'application

$$\psi : \mathcal{S}(E,K) \longrightarrow \mathcal{S}_n(K)$$

telle que $\psi(\varphi) = M(\varphi, B)$, est un isomorphisme d'espaces vectoriels sur K avec $\psi^{-1}(A) = \varphi$ telle que $\varphi(X,Y) = {}^tXAY$ pour toute matrice symetrique A et tout $X, Y \in K^n$.

Démonstration.
Il est facile de voir que ψ est linéaire. Soit $A \in \mathcal{S}_n(K)$. Alors $\varphi : E \times E \longrightarrow K$ definie par $\varphi(x,y) = {}^tXAY$ est une fbs sur E, $\psi(\varphi) = A$ et $\varphi \in \mathcal{S}(E,K)$ est l'unique fbs telle que $M(\varphi, B) = A$. D'où ψ est bijective. Par suite $\mathcal{S}(E,K) \overset{\psi}{\cong} \mathcal{S}_n(K)$.

Corollaire 1.13.
Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Alors

$$\dim_K(\mathcal{S}(E,K)) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Démonstration.
On a $\dim_K(\mathcal{S}_n(K)) = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Par suite, puisque $\mathcal{S}(E,K) \cong \mathcal{S}_n(K)$, on obtient, $\dim_K(\mathcal{S}(E,K)) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Corollaire 1.14.
Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(K)$ telles que pour tout $X, Y \in K^n$,

$${}^tXAY = {}^tXBY$$

Alors $A = B$.

Démonstration.
Supposons que ${}^tXAY = {}^tXBY$, $\forall X, Y \in K^n$. Donc

$$\psi^{-1}(A)(X,Y) = \psi^{-1}(B)(X,Y), \forall X, Y \in K^n.$$

Par suite $\psi^{-1}(A) = \psi^{-1}(B)$. Comme ψ est bijective, on obtient $A = B$.

Corollaire 1.15.
Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(K)$ telles que pour tout $X \in K^n$,

$$ {}^tXAX = {}^tXBX $$

Alors $A = B$.

Démonstration.
Soient $\varphi_A = \psi^{-1}(A)$ et $\varphi_B = \psi^{-1}(B)$. D'où $\varphi_A(X,X) = \varphi_B(X,X), \forall X$.
Par suite, $q_A(X) = q_B(X), \forall X$. Ce qui implique que $q_A = q_B$.
On obtient alors $A = M(q_A, \mathcal{B}) = M(q_B, \mathcal{B}) = B$.

Application.
Soit $q : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definie par $q(A) = \det(A)$. Soit $\mathcal{B} = \left\{E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$. Donner la matrice et la forme polaire de q.

Soit $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = xE_{11} + yE_{12} + zE_{21} + tE_{22}$ un élément de $M_2(\mathbb{R})$. Alors $q(A) = \det(A) = xt - yz$. Par suite

$$M(q, \mathcal{B}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soient $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} x' & y' \\ z' & t' \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned}
\varphi(A, A') &= (x\ y\ z\ t)\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}(x\ y\ z\ t)\begin{pmatrix} t' \\ -z' \\ -y' \\ x' \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}(xt' - yz' - zy' + tx').
\end{aligned}$$

Changement de bases