Chapitre III: Décomposition de Gauss des formes quadratiques

1-Orthogonalité pour une forme quadratique

On considère dans ce paragraphe l'orthogonalité d'un sous espace vectoriel F d'un espace vectoriel E par rapport à une forme quadratique non dégénérée q.

Proposition 1.1.
Soit q une forme quadratique non dégénérée q sur un espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$. Soit F un sous espace vectoriel de E. Alors
1) $\dim(F) + \dim(F^{\perp}) = \dim(E)$.
2) $F^{\perp\perp} = F$.

Démonstration.
Soit φ la forme polaire de q. Notez que, $\forall x \in E$, l'application $\varphi_x : E \longrightarrow K$ définie par $\varphi_x(y) = \varphi(x, y), \forall y \in E$ est une forme linéaire, c'est à dire que $\varphi_x \in E^*, \forall x \in E$. On considère l'application $g : E \longrightarrow E^*$ définie par $g(x) = \varphi_x, \forall x \in E$. Donc g est une application linéaire. Montrons que g est injective. En effet, soit $x \in E$ tel que $g(x) = \varphi_x = 0$. D'où, $\varphi_x(y) = \varphi(x, y) = 0, \forall y \in E$. Comme q est non dégénérée, on obtient que $x = 0$. Alors $\mathrm{Ker}(g) = (0)$, c'est à dire que g est injective. Comme $\dim(E) = \dim(E^*)$ est finie, on a g est bijective et donc c'est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
1) Soit F un sous espace vectoriel de E de dimension $p \leq n$. Soit $\{e_1, \cdots, e_p\}$ une base de F. On complète cette base de F en une base $B = \{e_1, \cdots, e_p, e_{p+1}, \cdots, e_n\}$ de E. On considère $B^* = \{e_1^*, \cdots, e_n^*\}$ la base duale de B. Soit $x \in E$ et soit

$\varphi_x = \alpha_1 e_1^* + \cdots + \alpha_n e_n^*$. Alors

$$x \in F^\perp \Leftrightarrow \varphi_x(y) = 0, \forall y \in F \Leftrightarrow \varphi_x(e_i) = 0, \forall i = 1, \cdots, p \Leftrightarrow$$

$$\alpha_i = 0, \forall i = 1, \cdots, p \Leftrightarrow g(x) = \varphi_x \in \mathrm{Vect}(e_{p+1}^*, \cdots, e_n^*) \Leftrightarrow$$

$$x \in g^{-1}(\mathrm{Vect}(e_{p+1}^*, \cdots, e_n^*)).$$

Par suite

$$F^\perp = g^{-1}(\mathrm{Vect}(e_{p+1}^*, \cdots, e_n^*)).$$

Comme g est un isomorphisme, on obtient

$$\dim(F^\perp) = \dim(\mathrm{Vect}(e_{p+1}^*, \cdots, e_n^*) = n - p.$$

Alors $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$.
2) On a, d'après (1), $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$ et $\dim(F^\perp) + \dim(F^{\perp\perp}) = \dim(E)$. Par suite $\dim(F) = \dim(F^{\perp\perp})$. Comme $F \subseteq F^{\perp\perp}$, on obtient $F = F^{\perp\perp}$.

2- Décomposition de Gauss des formes quadratiques

Le but de ce paragraphe est de décomposer une forme quadratique quelconque en somme de carrés de formes linéaires libres.

Théorème 2.1.
Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n et soit q une forme quadratique sur E. Soit $t = \mathrm{rg}(q)$. Alors il existe des formes linéaires linéairement indépendants (dans E^*) $L_1, \cdots, L_t$ et il existe $\alpha_1, \cdots, \alpha_t \in K \setminus \{0\}$ tels que

$$\forall x \in E, q(x) = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i L_i(x)^2.$$

1) Si $K=\mathbb{C}$, alors il existe des formes linéaires linéairement indépendants $L_1,\cdots,L_t$ tels que

$$\forall x\in E, q(x)=\sum_{i=1}^{t} L_i(x)^2.$$

2) Si $K=\mathbb{R}$, alors alors il existe des formes linéaires linéaires linéairement indépendants $L_1,\cdots,L_t$ et il existe $r,s\in\mathbb{N}$ tels que

$$\forall x\in E, q(x)=\sum_{i=1}^{r} L_i(x)^2-\sum_{i=r+1}^{t} L_i(x)^2$$

avec $s=t-r$, c'est à dire que $\mathrm{rg}(q)=t=r+s$. Le couple (r,s) s'appelle **la signature de** q et est notée $\mathbf{sgn(q)}=(\mathbf{r},\mathbf{s})$. La signature de q est indépendante de la base choisie.

Démonstration.

On rappelle que $\forall x\in E$, $q(x)=\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j$, où $a_{ij}=\varphi(e_i,e_j)$, $\forall i,j$ avec φ est la forme polaire de q. Il y a deux cas:

Cas 1. Il existe $i\in\{1,\cdots,n\}$ tel que $a_{ii}\neq 0$.

On peut supposer que $a_{11}\neq 0$. On obtient

$$q(x)=a_{11}x_1^2+2x_1P(x_2,x_3,\cdots,x_n)+Q(x_2,x_3,\cdots,x_n)$$

en factorisant par x_1 dans tous les termes qui contiennent x_1 et où P est une forme linéaire sur K^{n-1} et Q est une forme quadratique sur K^{n-1}. Par suite

$$q(x)=a_{11}x_1^2+2x_1P(y)+Q(y),$$

où $y=(x_2,\cdots,x_n)\in K^{n-1}$. D'où

$$q(x)=a_{11}\Big(x_1+\frac{P(y)}{a_{11}}\Big)^2+\Big(Q(y)-\frac{P(y)^2}{a_{11}}\Big).$$

On a $q' : K^{n-1} \longrightarrow K$ tel que $q'(y) = Q(y) - \dfrac{P(y)^2}{a_{11}}$ est une forme quadratique sur K^{n-1}. D'où

$$q(x) = a_{11}\Big(x_1 + \frac{P(y)}{a_{11}}\Big)^2 + q'(y) = a_{11}L_1(x) + q'(y),$$

où $L_1 : E \longrightarrow K$ tel que $L_1(x) = x_1 + \dfrac{P(y)}{a_{11}}, \forall x \in E$ est une forme linéaire sur E. On répéte le procédé jusqu'à traiter tous les carrés $a_{ii}x_i^2$ de $q(x)$ tels que $a_{ii} \neq 0$. On obtient alors

$$q(x) = \alpha_1 L_1(x_1, x_2, \cdots, x_n))^2 + \alpha_2 L_2(x_2, \cdots, x_n)^2 + \cdots + \alpha_p L_p(x_p, \cdots, x_n)^2 + q_1(x_{p+1}, \cdots, x_n), \forall x \in E$$

avec $q_1 : K^{n-p} \longrightarrow K$ est une forme quadratique telle que

$$q_1(x) = \sum_{1 \leq i < j \leq n-p} b_{ij} x_i x_j, \forall x \in K^{n-p}$$

(il n'y a pas de carrés dans l'expression de q_1). Il est facile de vérifier que

$$L_1(x) = x_1 + P_1(x_2, \cdots, x_n), L_2(x_2, \cdots, x_n) = x_2 + P_2(x_3, \cdots, x_n), \cdots, L_p = x_p + P_p(x_{p+1}, \cdots, x_n),$$

avec les P_i sont des formes linéaires. Soient $\alpha_1, \cdots, \alpha_p \in K$ tels que $\alpha_1 L_1 + \cdots + \alpha_p L_p = 0$. Si on prend $x_1 \neq 0$ et $x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$, alors on aura $\alpha_1 = 0$. On repéte ce processus jusqu'à montrer que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0$. D'où $\{L_1, \cdots, L_p\}$ est une famille libre.

Cas 2. $a_{ii} = 0$, $\forall i = 1, \cdots, n$.

D'où $q(x) = a_{12}x_1x_2 + x_1 A(x_3, \cdots, x_n) + x_2 B(x_3, \cdots, x_n) + Q(x_3, \cdots, x_n)$, $\forall x \in E$, où A, B sont des formes linéaires sur K^{n-2} et Q est une forme quadratique sur K^{n-2}. Notons $y = (x_3, \cdots, x_n)$. D'où

$$q(x) = a_{12}\Big(x_1 + \frac{1}{a_{12}}B(y)\Big)\Big(x_2 + \frac{1}{a_{12}}A(y)\Big) + \Big(Q(y) - \frac{1}{a_{12}}A(y)B(y)\Big).$$

On note que $Q - \frac{1}{a_{12}} AB$ est une forme quadratique sur K^{n-2}. En utilisant l'identité: $xy = \frac{1}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2$, on obtient

$$q(x) = \frac{a_{12}}{4}\Big(x_1 + x_2 + \frac{1}{a_{12}}A(y) + \frac{1}{a_{12}}B(y)\Big)^2 - \frac{a_{12}}{4}\Big(x_1 - x_2 + \frac{1}{a_{12}}B(y) - \frac{1}{a_{12}}A(y)\Big)^2 +$$

$$\Big(Q(y) - \frac{1}{a_{12}}A(y)B(y)\Big).$$

On pose $L_1(x) = x_1 + x_2 + \frac{1}{a_{12}}A(y) + \frac{1}{a_{12}}B(y)$ et $L_2 = x_1 - x_2 + \frac{1}{a_{12}}B(y) - \frac{1}{a_{12}}A(y)$. L_1 et L_2 sont des formes linéaires et il est facile de voir qu'ils sont libres. Maintenant, par recurrence sur n, on vérifie que

$$q(x) = \alpha_1 L_1(x)^2 + \cdots + \alpha_t L_t^2(x), \forall x \in E$$

avec $L_1, \cdots, L_t$ sont des formes linéaires libres.
En combinant les deux cas, on termine la décomposition de q en somme de carrés de formes linéaires libres.

On montre que $t = \mathrm{rg}(q)$. En effet, on compléte $\{L_1, L_2, \cdots, L_t\}$ en une base $\{L_1, \cdots, L_t, \cdots, L_n\}$ de E^* et soit $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ la base préduale de $\{L_1, \cdots, L_n\}$. Soit $x = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$. D'où $L_i(x) = a_i, \forall i = 1, \cdots, n$. Par suite la matrice de q dans la base $\{u_1, \cdots, u_n\}$ est une matrice diagonale qui est

$$\begin{pmatrix}
\alpha_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & \alpha_2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \alpha_t & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0\cdots & 0\cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0\cdots & 0\cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{pmatrix}$$

D'où $t = \mathrm{rg}(A)$. L'assertion (1) et (2) du théorème decoulent facilement de la décomposition déja montrée.
Il reste à montrer l'indépendance de la signature de q de la base choisie lorsque $K = \mathbb{R}$. On considère alors deux bases $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ et $B' = \{e'_1, \cdots, e'_n\}$ de E. Soient (r, s) la signature de q relativement à B et (r', s') celle de q relativement à B'. D'òu, $\forall x \in E$,

$$q(x) = \sum_{i=1}^{r} L_i(x)^2 - \sum_{i=r+1}^{t} L_i(x)^2 = \sum_{i=1}^{r'} L'_i(x)^2 - \sum_{i=r'+1}^{t} L'_i(x)^2$$

avec $\{L_1, \cdots, L_t\}$ et $\{L'_1, \cdots, L'_t\}$ sont deux familles libres de E^*. On compléte ces deux familles libres en deux bases $\{L_1, \cdots, L_t, \cdots, L_n\}$ et $\{L'_1, \cdots, L'_t, \cdots, L'_n\}$ de E^* et on considère leurs bases préduales respéctives $\{u_1, \cdots, u_t \cdots, u_n\}$ et $\{u'_1, \cdots, u'_t \cdots, u'_n\}$ de E. Donc si $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i u'_i$, on a $L_i(x) = \alpha_i$ et $L'_i(x) = \beta_i$, $\forall i = 1, \cdots, n$, et par suite

$$q(x) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^2 - \sum_{i=r+1}^{t} \alpha_i^2 = \sum_{i=1}^{r'} \beta_i^2 - \sum_{i=r'+1}^{t} \beta_i^2.$$

Soient $F = \mathrm{vect}\{u_1, \cdots, u_r\}$ et $G = \mathrm{vect}\{u'_{r'+1}, \cdots, u'_n\}$. On a $\forall x \in F \setminus \{0\}, q(x) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^2 > 0$ et $\forall x \in G \setminus \{0\}, q(x) = -\sum_{i=r'+1}^{n} \beta_i^2 < 0$. D'où $F \cap G = \{0\}$. Par suite $F \oplus G$ est une somme directe et on a

$$\begin{aligned} \dim(F \oplus G) &= \dim(F) + \dim(G) \\ &= r + n - r' \\ &\leq \dim(E) = n. \end{aligned}$$

Ce qui donne $r - r' \leq 0$, d'où $r \leq r'$. En utilisant la même demarche avec $F' = \mathrm{vect}\{u_{r+1}, \cdots, u_n\}$ et $G' = \mathrm{vect}\{u'_1, \cdots, u'_{r'}\}$, on aura $r' \leq r$. D'où $r = r'$ et $s = s'$ puisque $r + s = r' + s' = t$. Par conséquent, la signature de q est indépendante de la base choisie.

Applications.

1) Donner la décomposition de Gauss de la forme quadratique q suivante et en déduire le rang et la signature:

$$q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 8x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3.$$

On a

$$\begin{aligned} q(x) &= x_1^2 + 2x_1(2x_3 - x_2) + 2x_2^2 + 8x_3^2 \\ &= (x_1 + 2x_3 - x_2)^2 - (2x_3 - x_2)^2 + 2x_2^2 + 8x_3^2 \\ &= (x_1 + 2x_3 - x_2)^2 + x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2 \\ &= (x_1 + 2x_3 - x_2)^2 + (x_2 + 2x_3)^2. \end{aligned}$$

D'où $\mathrm{rg}(q) = 2$ et $\mathrm{sgn}(q) = (2,0)$.

2) $q(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 + x_1x_4 + x_2x_3$.

On a

$$\begin{aligned} q(x) &= (x_1 + x_3)(x_2 + x_4) - x_3x_4 \\ &= \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - \frac{1}{4}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 - x_3x_4 \\ &= \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - \frac{1}{4}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 - \frac{1}{4}(x_3 + x_4)^2 + \frac{1}{4}(x_3 - x_4)^2. \end{aligned}$$

D'où $\mathrm{sgn}(q) = (2,2)$ et $\mathrm{rg}(q) = 4$.