Cours de Physique Statistique Avancée

Professeur Mabrouk Benhamou

Faculté des Sciences à Meknès

Public cible

Étudiants de Licence SMP
Semestre 6

Année académique 2020

جامعة مولاي إسماعيل
UNIVERSITÉ MOULAY ISMAÏL

Chapitre 6

Condensation de Bose-Einstein

Contenu du chapitre 6

1. Introduction.

2. Température de Bose.

3. Nombre de particules dans un condensat.

4. Propriétés thermiques.

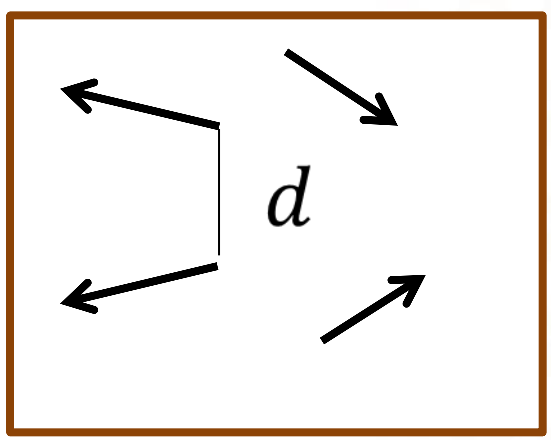
1. Introduction

Définition d'un Condensat de Bose-Einstein:

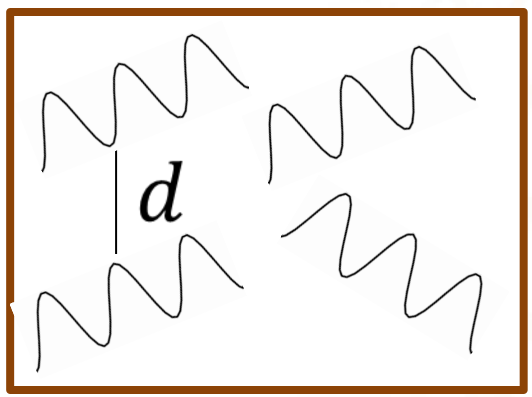
Un **Condensat de Bose-Einstein** est un état de la matière qui ne ressemble ni à un gaz ni à un liquide, formé par des bosons (typiquement des atomes se comportant comme des bosons), tel que le nombre de ces particules, à une température suffisamment basse, occupent un <u>unique</u> état quantique de plus basse énergie (état fondamental).

Schéma :

Étape 1 : On part d'un gaz de Bose à très haute température (gaz de Boltzmann) : Les particules se comportent comme des petites masses qui diffusent entre elles, et leur distance moyenne, d, est supérieure à la longue thermique : $\lambda_T = \sqrt{h^2/2mk_BT}$.



Étape 2 : On refroidit le gaz par laser ou par un champ magnétique. Ce gaz devient quantique et les particules se comportent comme des ondes. Dans ce cas, leur distance moyenne, d , est comprise entre la longueur d'onde de Broglie, $\lambda_D = h/mv$, et la longueur thermique : $\lambda_D < d < \lambda_T$.



Étape 3 : On refroidit suffisamment le gaz. Dans ce cas, les ondes chevauchent, et leur distance moyenne, d, devient inférieure à la longueur d'onde de Broglie, d_D: $d < d_D$.

Étape 4 : On tend vers $T = 0$ K. Dans ce cas, les ondes chevauchées forment un état unique (*état collectif*), et leur distance moyenne devient de l'ordre de la taille des atomes. C'est la *Condensation de Bose-Einstein* (CBE). Le condensat apparaît à une certaine température, $T_B \sim 0$ K, appelée *température de Bose* faisant passer de l'état dispersé à l'état condensé.

Historique :

- La CBE a été prédite théoriquement par Albert Einstein en 1925, qui a généralisé les statistiques des phonons de Bose aux bosons avec masse.

- La CBE a été observée dans les gaz ultra-froids (gaz alcalins), dans les liquides (sauf l'hydrogène), comme l'hélium 4 (superfluide), vers 2,17 K, et aussi dans les solides.

But : Décrire les propriétés thermiques en relation avec la CBE, à très basse température.

2. Température de Bose

Description :

- A $T = 0$ K, les degrés de liberté sont gelés, et l'énergie individuelle s'annule, $\epsilon_0 = 0$, et donc l'énergie interne s'annule aussi, $U = N\epsilon_0 = 0$; ce qui correspond à une impulsion individuelle nulle : $\vec{p} = \vec{0}$, entraînant une pression nulle. Donc, à $T = 0$ K, le potentiel chimique s'annule (aucune énergie est nécessaire pour faire varier le nombre de particules d'une unité) : $\mu = 0$.

- Pour $T \sim 0$ K, un grand nombre de particules, $N_{\epsilon=0}$, se trouve à l'état fondamental. Le reste est le nombre de particules à l'état dispersé (état excité) d'énergie $\epsilon > 0$, noté $N_{\epsilon>0}$: $N_{\epsilon=0} + N_{\epsilon=0} = N$, où N est le nombre total de particules.

- Quand la température diminue, à densité constante, la valeur absolue du potentiel chimique $|\mu|$ diminue, et il existe une température caractéristique, T_B, appelé <u>température de Bose</u>, à laquelle le potentiel chimique s'annule : $\mu(T_B) = 0$. C'est une température quantique et dépendant de la densité des atomes, N/Ω.

Expression de la température de Bose :

On part de la formule donnant le nombre de particules, avec $\mu(T_B) = 0$: $\quad z = \epsilon/k_B T_B$.

$$N = g \frac{\Omega}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3} m^{3/2} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{1/2}}{e^{\epsilon/k_B T_B} - 1} d\epsilon$$

$$N = g \frac{\Omega}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3} m^{3/2} (k_B T_B)^{3/2} \int_0^\infty \frac{z^{1/2}}{e^z - 1} dz$$

- On utilise l’intégrale :

$$\int_0^\infty \frac{z^{x-1}}{e^z - 1} dz = \Gamma(x)\zeta(x) , \qquad Re[x] > 1$$

Ici,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty z^{x-1} e^{-z} dz , \qquad Re[x] > 1$$

est la *fonction gamma d’Euler*, et

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} , \qquad Re[x] > 1$$

est la *fonction zêta de Riemann*. On trouve :

$$T_B = \left[\frac{1}{g\zeta(3/2)}\right]^{2/3} \frac{h^2}{2\pi k_B m}\left(\frac{N}{\Omega}\right)^{2/3}$$

On a utilisé : $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Numériquement,

$$T_B = \frac{1}{k_B}\frac{3{,}31\hbar^2}{g^{2/3}m}\left(\frac{N}{\Omega}\right)^{2/3}$$

On a utilisé la valeur : $\zeta(3/2) = 2{,}6124$.

Incidemment, la température de Bose, T_B, varie avec la densité N/Ω, comme la température de Fermi, T_F.

3. Nombre de particules dans un condensat

- Lorsque $T < T_B$, les particules d'énergie $\epsilon > 0$, avec $\mu = 0$, sont distribuées selon la formule :

$$dN_{\epsilon>0} = g \frac{\Omega}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3} m^{3/2} \frac{\epsilon^{1/2}}{e^{\epsilon/k_B T} - 1} d\epsilon$$

qui est le nombre de particules d'énergie comprise entre ϵ et $\epsilon + d\epsilon$.

- Le nombre total de particules, avec $\epsilon > 0$, est alors :

$$N_{\epsilon>0} = \int dN_{\epsilon>0} = g\frac{\Omega}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3}m^{3/2}\int_0^\infty \frac{\epsilon^{1/2}d\epsilon}{e^{\epsilon/k_BT}-1}$$

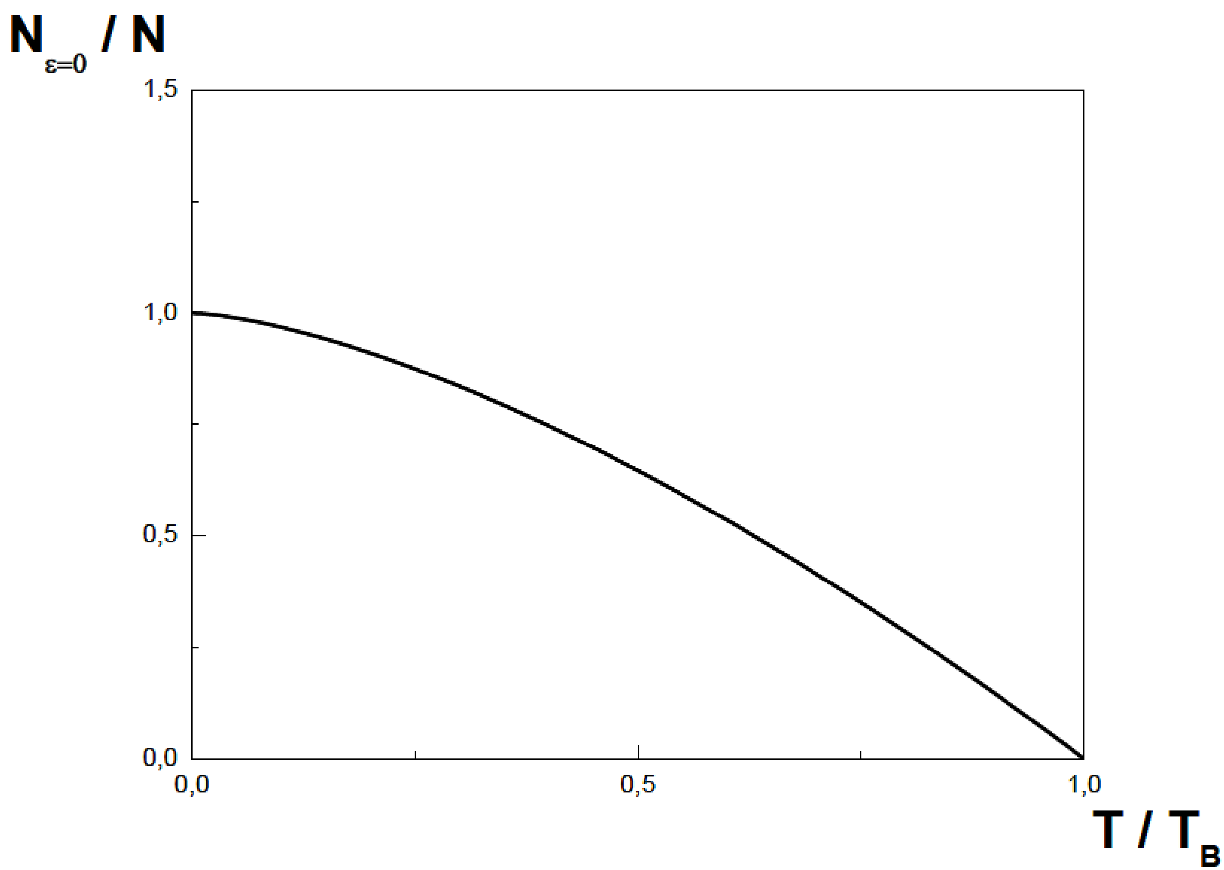
$$N_{\epsilon>0} = g\frac{\Omega}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3}m^{3/2}(k_BT)^{3/2}\underbrace{\int_0^\infty \frac{z^{1/2}}{e^z-1}dz}_{\Gamma(3/2)\zeta(3/2)}$$

On trouve donc, en tenant compte de l'expression de N donnant la température de Bose :

$$N_{\epsilon>0} = N(T/T_B)^{3/2}, \qquad T < T_B$$

- Le nombre de particules dans un condensat est alors : $N_{\epsilon=0} = N - N_{\epsilon>0}$. Explicitement,

$$N_{\epsilon=0} = N\left[1 - (T/T_B)^{3/2}\right], \qquad T < T_B$$



4. Propriétés thermiques

4.1. Énergie interne.

Pour $T < T_B$, l'énergie interne ne fait intervenir que les particules d'énergie individuelle, $\epsilon > 0$, car les particules formant le condensat, ont une énergie individuelle nulle, $\epsilon = 0$:

$$U = g\frac{\Omega}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3}m^{3/2}(k_B T)^{5/2}\underbrace{\int_0^\infty \frac{z^{3/2}dz}{e^z - 1}}_{\Gamma(5/2)\zeta(5/2)}$$

En combinant cette relation avec celle donnant le nombre de particules, N, en fonction de la température de Bose, on trouve :

$$\frac{U}{Nk_BT_B} = \frac{3}{2}\frac{\zeta(5/2)}{\zeta(3/2)}\left(\frac{T}{T_B}\right)^{5/2}, \qquad T < T_B$$

ou encore,

$$U = 0{,}128 \times g\frac{m^{3/2}}{\hbar^3}(k_BT)^{5/2}\Omega, \qquad T < T_B$$

On a utilisé :

$$\Gamma(5/2) = 3\Gamma(3/2)/2, \quad \zeta(3/2) = 2{,}6124$$
$$\zeta(5/2) = 1{,}3415$$

Donc, pour $T < T_B$, l'énergie interne croît avec la température, selon la loi : $U \sim T^{5/2}$.

4.2. Chaleur spécifique.

Elle est donnée par :

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{N,\Omega}$$

Explicitement,

$$C_V = \frac{5}{2}\frac{U}{T} \sim T^{3/2}, \qquad T < T_B$$

4.3. Entropie.

Elle se calcule à partir de la relation :

$$C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{N,\Omega}$$

Par intégration du rapport C_V/T, par rapport à la température, l'on trouve :

$$S = \frac{5}{3}\frac{U}{T} \sim T^{3/2}, \qquad\qquad T < T_B$$

4.4. Pression.

On part de la relation générale : $P\Omega = 2U/3$, on trouve :

$$P = 0{,}0851 \times g \frac{m^{3/2}}{\hbar^3} (k_B T)^{5/2}, \qquad T < T_B$$

Commentaires :

- Pour $T < T_B$, la pression croît avec la température, comme $T^{5/2}$, mais elle est indépendante du volume.

- Au zéro absolu, et contrairement aux gaz de Fermi, la pression s’annule. Ceci est dû au fait que les particules se trouvant dans l’état d’énergie $\epsilon = 0$, ne possèdent aucune impulsion, et par suite, elles ne peuvent contribuer à la pression. ■