Cours de Physique Statistique Avancée

Professeur Mabrouk Benhamou

Faculté des Sciences à Meknès

Public cible

Étudiants de Licence SMP
Semestre 6

Année académique 2020

جامعة مولاي إسماعيل
UNIVERSITÉ MOULAY ISMAÏL

Chapitre 7

Rayonnement des corps noirs

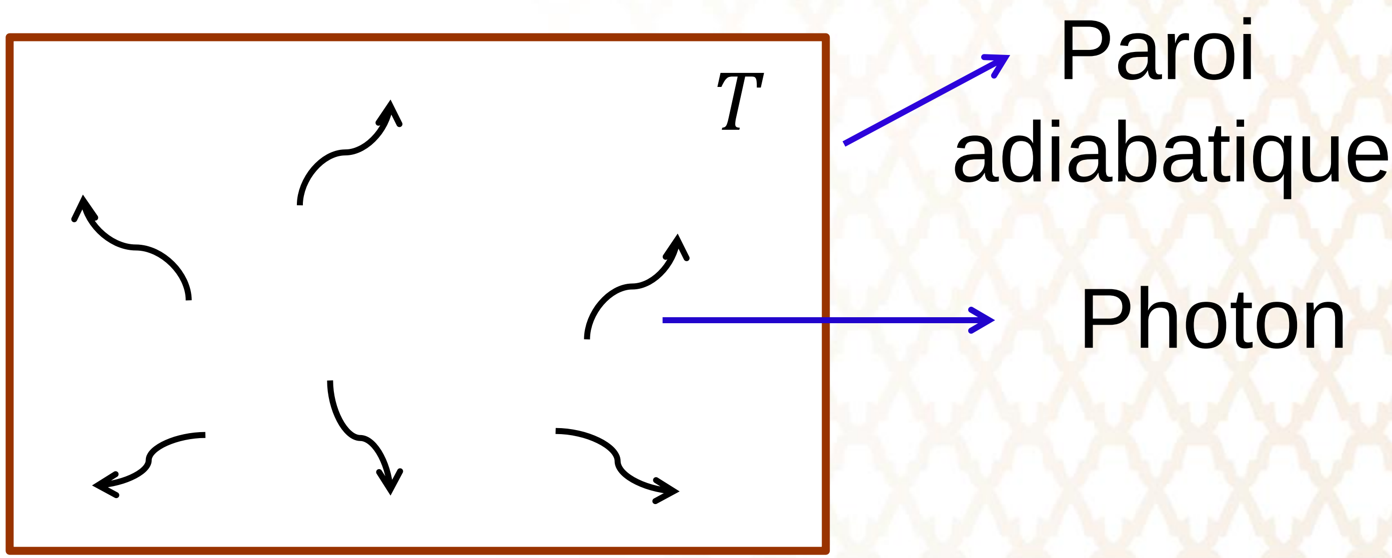
Contenu du chapitre 7

1. Présentation.
2. Loi de Planck.
3. Puissance rayonnée.
4. Grandeurs thermodynamiques.

1. Présentation

Définition d'un corps noir :

- On considère une enceinte fermée (de volume Ω), de température d'équilibre T.



• Un corps noir est un corps dont les parois absorbent et réémettent les rayonnements allant de l’ultraviolet à l’infrarouge.

Approche théorique :

• Le rayonnement à l’intérieur peut être regardé comme un ensemble de photons (bosons de spin égal à 1) : *Gaz photonique*.

• Ces photons sont sans interactions mutuelles, à cause de la linéarité des équations de Maxwell.

- Le gaz photonique est alors régi par la distribution de Bose-Einstein.

- Comme le nombre de photons n'est pas conservé (même en moyenne), le multiplicateur de Lagrange associé est nul : $\alpha = \beta\mu = 0$, donc le potentiel chimique est nul, $\mu = 0$.

- Comme conséquence, l'on peut appliquer tout l'arsenal de la Statistique de Bose-Einstein à ce gaz photonique, mais avec un potentiel chimique nul, $\mu = 0$.

- **Précision :**

Pour les photons, le facteur gyromagnétique g vaut 2, $g = 2$. Ceci est en contradiction avec le fait qu'un spin $s = 1$ donnerait : $g = 2s + 1 = 3$. En réalité, les photons possèdent <u>deux</u> polarisations circulaires, la troisième qui est <u>longitudinale</u>, <u>n'existe pas</u>, du fait de la <u>transversalité</u> du champ électromagnétique.

2. Loi de Planck

- On désigne par $\vec{p} = \hbar\vec{k}$, l'impulsion du photon, où $\vec{k}$ est le vecteur d'onde, dont le module est $k = \omega/c$ ou $k = 2\pi\nu/c$. Ici, ω est la pulsation et ν est la fréquence de la radiation.

- Le nombre moyen de photons de fréquence ν, $\langle n_k \rangle$, est donné par une distribution de Bose-Einstein, avec $\mu = 0$:

$$\langle n_k \rangle = \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

- Dans la limite de grands volumes, la somme sur tous les modes (discrets) possibles devient une intégrale :

$$g\frac{\Omega}{h^3}\int \dots d^3\vec{p} = \Omega\frac{8\pi}{c^3}\int_0^{\infty} \dots \nu^2 d\nu$$

avec l'impulsion $p = h\nu/c$ et $g = 2$.

- Le nombre de modes (photons) de fréquence comprise entre ν et $\nu + d\nu$ est alors :

$$dN_\nu = \Omega\frac{8\pi}{c^3}\frac{\nu^2}{e^{h\nu/k_B T} - 1}d\nu$$

• L'énergie élémentaire correspondant à cet intervalle de fréquences est :

$$dU_\nu = h\nu \times dN_\nu = \Omega \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1} d\nu$$

et la densité spectrale d'énergie volumique est :

$$u_\nu = \frac{1}{\Omega} \frac{dU_\nu}{d\nu}$$

ou encore :

$$u_\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

C'est la **loi de rayonnement de Max Planck.**

- Cette loi résulte de la quantification de l'énergie, en termes de quantum d'énergie, $h\nu$, et où figure la constante de Planck h. C'est le point de départ de la Mécanique Quantique.

- Cette loi nous enseigne aussi comment les fréquences sont distribuées, à toute température.

Limite de basses fréquences : $h\nu \ll k_B T$.

$$u_\nu \simeq \frac{8\pi}{c^3}\nu^2 k_B T\,, \qquad h\nu \ll k_B T$$

C'est la loi de Rayleigh-Jeans. Cette loi donne une énergie totale infinie lorsqu'on somme sur les fréquences de $\nu = 0$ à $\nu = \infty$, car la fonction ν^2 n'est pas intégrable sur cet intervalle : C'est la catastrophe de l'ultraviolet. Autrement dit, la loi précédente n'a de sens que pour les basses fréquences (domaine de l'infrarouge).

Limite de hautes fréquences : $h\nu \gg k_B T$.

$$u_\nu \simeq \frac{8\pi h}{c^3}\nu^3 e^{-h\nu/k_B T}\,, \qquad h\nu \gg k_B T$$

C'est la loi de Wien. Cette loi empirique n'est valable que pour les hautes fréquences (domaine de l'ultraviolet).

Conclusion : La loi de Planck est donc plus générale que les lois d'extrapolation décrites ci-dessus, et permet de renseigner sur le rayonnement dans tout le spectre de fréquences.

Graphique de la densité spectrale :

- $u_\nu = 0$, $\nu = 0$ et $\nu = \infty$.
- u_ν passe par un maximum d'abscisse ν_m :

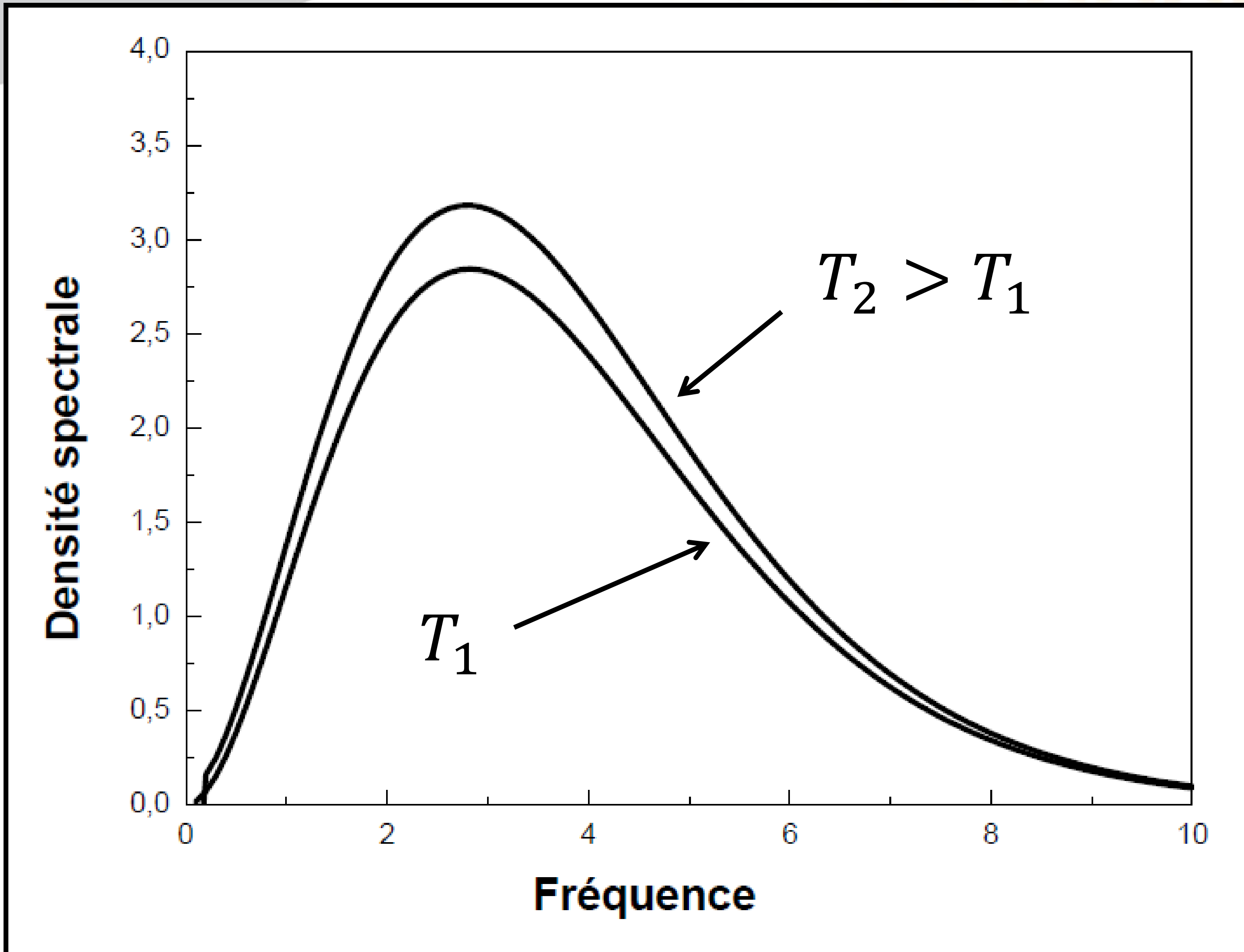
$$\frac{h\nu_m}{k_B T} \cdot \frac{1}{1 - e^{-h\nu_m/k_B T}} = 3$$

- La résolution numérique donne :

$$\nu_m = 2{,}82 \times \frac{k_B T}{h}$$

- Lorsque la température augmente, le maximum <u>se déplace</u> vers les <u>hautes fréquences</u>. Cette formule permet d’estimer la température des étoiles par une analyse de leur spectre d’émission.

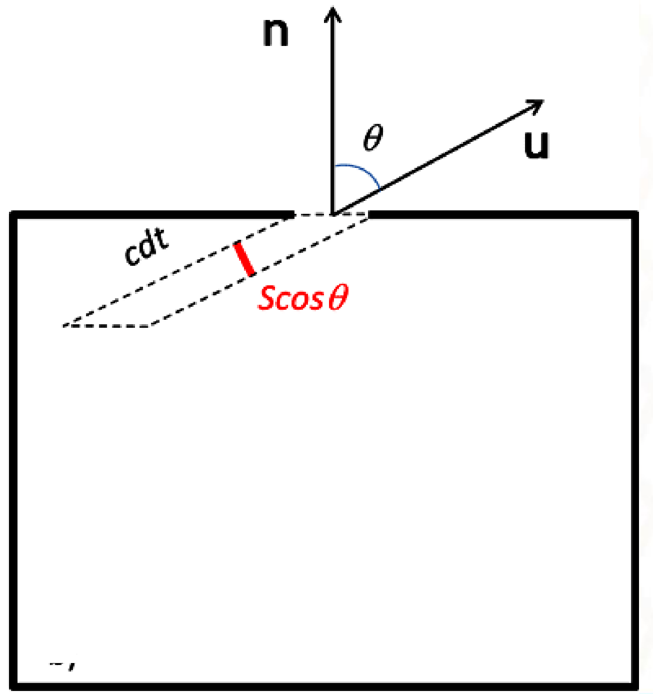
- Enfin, je dessine la densité spectrale, en fonction de la fréquence, pour deux températures différentes :



4,0
3,5
3,0
2,5
2,0
1,5
1,0
0,5
0,0
0
2
4
6
8
10
Densité spectrale
Fréquence
$T_2 > T_1$
T_1

3. Puissance rayonnée

- On creuse un petit orifice circulaire, d'aire ds, pour analyser le rayonnement du corps noir. Comme hypothèse, on suppose que cette opération n'affecte pas l'équilibre thermique initial.



- On s’intéresse au nombre de photons de fréquence comprise entre ν et $\nu + d\nu$, ayant traversé l’orifice d’aire ds, dans l’angle solide $d\varpi$, pendant l’intervalle de temps dt, et autour d’une direction faisant un angle θ avec la normale à l’orifice. Ce nombre est :

$$d\Omega \times \frac{d\varpi}{4\pi}$$

Ici, $d\Omega = \mathrm{c.cos\theta}dsdt$ est le volume du cylindre et $d\varpi/4\pi$ est la fraction des photons sortants et dirigés dans l’angle solide $d\varpi$.

- La puissance rayonnée par l’orifice d’aire ds, dans l’angle solide $d\varpi$, dans l’intervalle de frequence $d\nu$, est :

$$\delta R = u_\nu d\Omega \frac{d\varpi}{4\pi} d\nu$$

Donc, la puissance rayonnée totale vers l’extérieur, par unité d’aire de l’orifice et par unité de temps, est :

$$R = \int \delta R = \frac{c}{4\pi} \int_0^\infty u_\nu d\nu \times \int_0^{\pi/2} cos\theta d\varpi$$

Explicitement :

$$R = \int \delta R$$

$$= \frac{c}{4\pi} \times \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^{\infty} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1} d\nu \times \int_0^{\pi/2} cos\theta d\varpi$$

Or

$$\int_0^{\pi/2} cos\theta d\varpi = \pi \,, \qquad d\varpi = 2\pi sin\theta d\theta$$

Par changement de variables : $x = h\nu/k_B T$ et utilisant l'intégrale :

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \pi^4/15$$

l'on trouve :

$$R = \sigma T^4 , \qquad \sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60\hbar^3 c^2} = 5{,}67 \times 10^{-8} \text{ SI}$$

C'est la **loi de Stefan-Boltzmann**, en parfait accord avec l'expérience. Ici, σ est la constante (universelle) de Stefan qui permet de mesurer la constante de Planck h.

4. Grandeurs thermodynamiques

4.1. Énergie interne.

Elle est telle que :

$$\frac{U}{\Omega} = \int_0^{\infty} u_\nu d\nu = \frac{8\pi h}{c^3}\left(\frac{k_B T}{h}\right)^4 \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx}_{\pi^4/15}$$

On trouve la loi de croissance :

$$\frac{U}{\Omega} = \frac{4\sigma}{c} T^4$$

4.2. Énergie libre d'Helmholtz.

- Comme le potentiel chimique est nul, l'énergie libre d'Helmholtz s'identifie avec le grand potentiel : $F = A$.

$$F = k_B T \times g \frac{\Omega}{h^3} \int d^3\vec{p} Log\left(1 - e^{-\beta cp}\right)$$

avec $g = 2$.

- On remplace $d^3\vec{p}$ par $4\pi p^2 dp$, l'on a, après avoir fait le changement de variables :

$x = pc/k_B T$,

$$F(\Omega,T)=\frac{\Omega}{\pi^2(\hbar c)^3}(k_BT)^4\int_0^\infty x^2 Log(1-e^{-x})dx$$

Par intégration par parties, l'on trouve :

$$F(\Omega,T)=-\frac{\Omega}{3\pi^2(\hbar c)^3}(k_BT)^4\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}dx$$

L'intégrale vaut $\pi^4/15$. L'on trouve :

$$\frac{F}{\Omega}=-\frac{4\sigma}{3c}T^4$$

L'on a la relation simple :

$$U = -3F$$

Comme $A = F$, alors

$$A = -\frac{1}{3}\,U$$

- Cette relation est vraie pour les particules ultra-relativistes, telles que le photon, et elle remplace l'équation analogue pour les bosons massifs non relativistes : $A = -2U/3$.

4.3. Entropie.

Elle est donnée par :

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{\Omega}$$

On trouve la loi de croissance avec la température de l'entropie :

$$\frac{S}{\Omega} = \frac{16\sigma}{3c}\, T^3$$

On peut retrouver cette relation, rapidement, par : $F = U - TS = -3F - TS$ et $S = -4F/T$.

4.4. Chaleur spécifique.

De la relation :

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_\Omega$$

On trouve :

$$\frac{C_V}{\Omega} = \frac{16\sigma}{c} T^3$$

C_V croît avec la température comme T^3.

4.5. Équation d'état.

De la relation :

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial \Omega}\right)_T$$

On trouve :

$$P = \frac{4\sigma}{3c}\,T^4$$

Cette équation d'état est <u>universelle</u> et ne dépend pas du volume du corps noir, et montre que la pression croît comme la *puissance quatrième* de la température. ■