UNIVERSITE MOULAY ISMAIL
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Année académique 2021 / 2022
Filière : SMP-S4
Examen du module : Electricité 3

Session de rattrapage - Juillet 2022

CORRIGE

I-

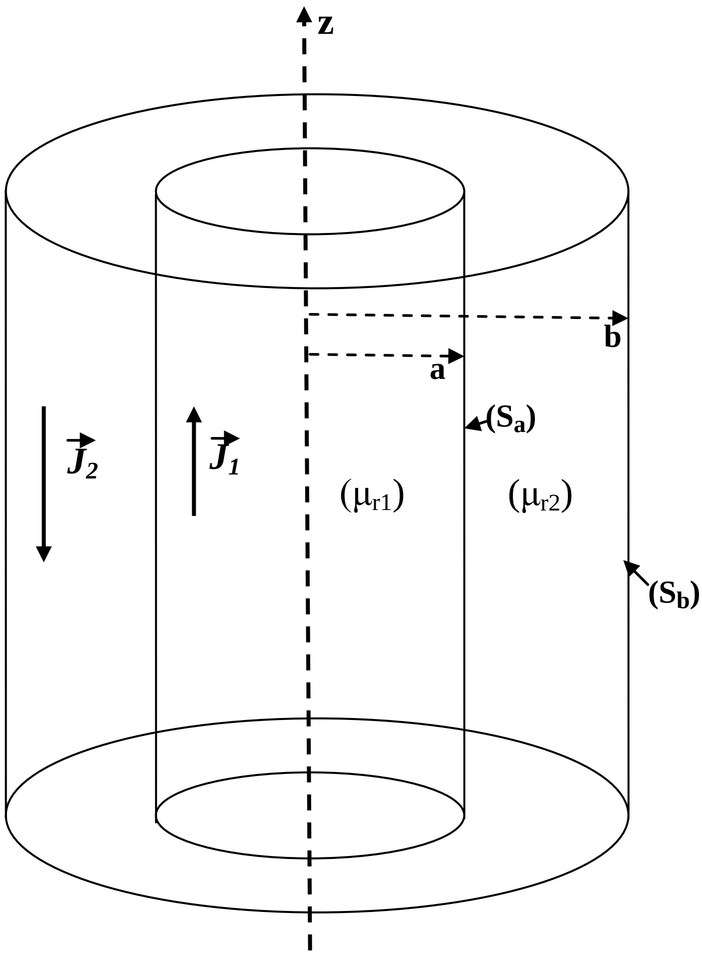
1) Expressions des champs $\vec{H}_1(M)$, $\vec{H}_2(M)$, $\vec{B}_1(M)$ et $\vec{B}_2(M)$:

On sait que dans un milieu magnétique parfait (ou linéaire, homogène et isotrope) l'aimantation $\vec{J}(M)$ et le champ magnétique $\vec{H}_{tot}(M)$ sont collinaires proportionnelles), soit :

$$\vec{J}(M) = \chi_m \vec{H}_{tot}(M) = (\mu_r - 1)\vec{H}_{tot}(M)$$

d'où :

$$\begin{cases} \vec{J}_1(M) = \chi_{m1}\vec{H}_1(M) = (\mu_{r1} - 1).\vec{H}_1(M) \\ \text{soit} \\ \vec{H}_1(M) = \dfrac{\vec{J}_1(M)}{(\mu_{r1} - 1).} = \dfrac{I.r}{2\pi\, a^2}\vec{e}_\theta \\ \vec{B}_1(M) = \mu_0\mu_{r1}\vec{H}_1(M) = \dfrac{\mu_0\mu_{r1} I.r}{2\pi\, a^2}\vec{e}_\theta \end{cases}$$



$$\begin{cases} \vec{J}_2(M) = \chi_{m2}\vec{H}_{2_1}(M) = (\mu_{r2} - 1).\vec{H}_2(M) \\ \text{soit} \\ \vec{H}_2(M) = \dfrac{\vec{J}_2(M)}{(\mu_{r2} - 1).} = \dfrac{(b^2 - r^2)I}{2\pi(b^2 - a^2).r}\vec{e}_\theta \\ \vec{B}_2(M) = \mu_0\mu_{r2}\vec{H}_2(M) = \dfrac{\mu_0\mu_{r2}(b^2 - r^2)I}{2\pi(b^2 - a^2).r}\vec{e}_\theta \end{cases}$$

2) Densités des courants fictifs d'aimantation :

♦ Densité volumique du courant fictif dans le volume du milieu 1 :

Puisque $J_{1r} = J_{1z} = 0$ et $J_{1\theta} = J_{1\theta}(r)$ le rotationnel de $\vec{J}_1(M)$ se réduit à :

$$\vec{j}_{a1}(M) = \vec{\nabla}\Lambda\vec{J}_1(M) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{(\mu_{r1} - 1)I.r^2}{2\pi\, a^2}\right).\vec{e}_z = \frac{(\mu_{r1} - 1)I}{\pi\, a^2}.\vec{e}_z$$

♦ **Densité volumique du courant fictif dans le volume du milieu 2 :**

De même, $J_{2r} = J_{2z} = 0$ et $J_{2\theta} = J_{2\theta}(r)$ le rotationnel de $\vec{J}_1(M)$ se réduit à :

$$\vec{j}_{a2}(M) = \vec{\nabla}\Lambda\vec{J}_2(M) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{(\mu_{r2}-1)(b^2-r^2)I}{2\pi(b^2-a^2).r}\right).\vec{e}_z = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{(\mu_{r2}-1)(b^2-r^2)I}{2\pi(b^2-a^2)}\right).\vec{e}_z$$

$$= -\frac{(\mu_{r2}-1).I}{\pi(b^2-a^2)}.\vec{e}_z$$

♦ **Densité surfacique du courant surfacique fictif au niveau de la surface latérale (S_b) :**

$$\vec{k}_{Sb} = \vec{J}_2(M\in S_b)\Lambda\vec{n}_{ext}(M\in S_b) = \vec{J}_2(r=b)\Lambda\vec{e}_r$$

$$= \vec{0}\Lambda\vec{e}_r = \vec{0}$$

♦ **Densité surfacique du courant surfacique fictif au niveau de la surface (S_a) commune aux deux milieux :**

$$\vec{k}_{aSa} = \vec{J}_1(M\in S_a)\Lambda\vec{n}_{ext}(M\in S_a) + \vec{J}_2(M\in S_a)\Lambda\vec{n}_{ext}(M\in S_a)$$

$$= \vec{J}_1(r=a)\Lambda\vec{e}_r + \vec{J}_2(r=a)\Lambda(-\vec{e}_r)$$

$$= \frac{(\mu_{r1}-1)I}{2\pi\, a}\vec{e}_\theta\Lambda\vec{e}_r - \frac{(\mu_{r2}-1)(b^2-a^2)I}{2\pi(b^2-a^2).a}\vec{e}_\theta\Lambda\vec{e}_r$$

$$= -\frac{(\mu_{r1}-1)I}{2\pi\, a}\vec{e}_z + \frac{(\mu_{r2}-1)I}{2\pi\, a}\vec{e}_z = \frac{(\mu_{r2}-\mu_{r1})I}{2\pi\, a}\vec{e}_z$$

3) Intensités des courants d'aimantation :

♦ **Intensité du courant fictif volumique dans le milieu 1 :**

$$I^f_{v1} = \iint_{S'}\vec{j}_{a1}.d\vec{S}' = \iint_{S} j_{a1}.\vec{e}_z.dS'.\vec{e}_z = j_{a1}\iint_{S} dS' = j_{a1}\pi.a^2 = (\mu_{r1}-1)I$$

♦ **Intensité du courant fictif volumique dans le milieu 2 :**

$$I^f_{v2} = \iint_{S''}\vec{j}_{a2}.d\vec{S}'' = -\iint_{S''} j_{a2}.\vec{e}_z.dS''.\vec{e}_z = -j_{a2}\iint_{S''} dS'' = -j_{a1}\pi(b^2-a^2)$$

$$= -\frac{(\mu_{r2}-1).I}{\pi(b^2-a^2)}.\pi(b^2-a^2) = -(\mu_{r2}-1).I$$

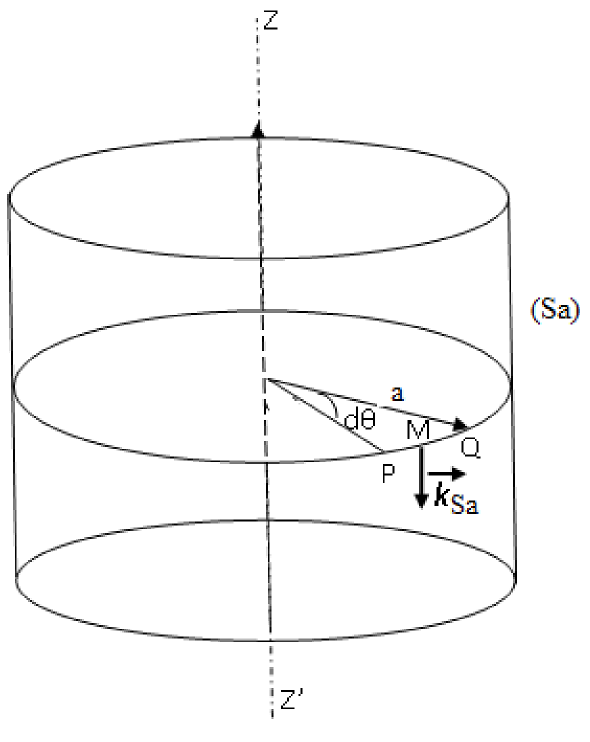
♦ **Intensité du courant surfacique fictif au niveau de la surface latérale (S_b) :**

$$I^f_{Sb} = 0 \text{ car } \vec{k}_{Sb} = \vec{0}$$

♦ **Intensité du courant surfacique fictif au niveau de la surface (S_a) de rayon a commune aux deux milieux :**

Par définition :

$$I^f_{Sa} = \int(\vec{k}_{Sa}.\vec{u}).d\ell$$



Où : $\begin{cases} \vec{k}_{Sa} = \dfrac{(\mu_{r2}-\mu_{r1})I}{2\pi\,a}\vec{e}_z \\ d\ell = \text{longueur de l'arc PQ} = a.d\theta \\ \vec{u} = \vec{e}_z \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$

L'intensité I^f_{Sa} du courant surfacique d'aimantation est donc :

$$I^f_{Sa} = \int \left(\frac{(\mu_{r2}-\mu_{r1})I}{2\pi\,a}\vec{e}_z.\vec{e}_z\right).a d\theta = \frac{(\mu_{r2}-\mu_{r1})I}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta = (\mu_{r2}-\mu_{r1})I$$

On vérifie très bien que :

$$I^f_{v1} + I^f_{v2} + I^f_{Sb} + I^f_{Sa} = (\mu_{r1}-1)I - (\mu_{r2}-1)I + 0 + (\mu_{r2}-\mu_{r1})I = 0$$

4) Energie magnétique W_{m1} emmagasinée dans le milieu 1 :

$$W_{m1} = \iiint_{v1} \omega_{m1}.dv$$

Où ω_{m1} est la densité volumique d'énergie magnétique, donnée par :

$$\omega_{m1} = \frac{1}{2\mu_0\mu_{r1}}(B_1(M))^2 = \frac{1}{2\mu_0\mu_{r1}}\left(\frac{\mu_0\mu_{r1}I.r}{2\pi\,a^2}\right)^2 = \frac{\mu_0\mu_{r1}I^2.r^2}{8\pi^2a^4}$$

L'énergie magnétique emmagasinée dans le milieu est telle que :

$$W_{m1} = \iiint_{v1}\omega_{m1}.dv = \frac{\mu_0\mu_{r1}I^2}{8\pi^2a^4}\iiint_{v1} r^2 dv = \frac{\mu_0\mu_{r1}I^2}{8\pi^2a^4}\int_0^a r^3.dr\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^h dz = \frac{\mu_0\mu_{r1}I^2h}{16\pi}$$

II-

1) Relations de passage à la surface (∑) du conducteur parfait :

Sachant que dans le conducteur parfait il y a absorption du champ électromagnétique, donc :

$$\vec{E}_2 = \vec{0},\ \vec{D}_2 = \vec{0},\ \vec{B}_2 = \vec{0} \text{ et } \vec{H}_2 = \vec{0}$$

Les relations de passage à la surface du conducteur parfait s'écrivent (voir cours) :

$$\begin{cases} \vec{E}_1(M,t).\vec{T} = \vec{0} \\ \vec{D}_1(M,t).\vec{n}_{21} = \sigma \\ \vec{B}_1(M,t).\vec{n}_1 = 0 \\ \vec{H}_1(M,t).\vec{T} = \vec{k}.(\vec{n}_{21}\Lambda.\vec{T}) \end{cases}$$

2) ■ Expression du champ électrique incident $\vec{E}_i(M,t)$:

On tiendra compte des informations suivantes :

- L'onde incidente est polarisée rectilignement suivant Ox : $\vec{E}_i(M,t) = E_{iz}(M,t).\vec{e}_z$
- La direction de propagation parallèle à Oy : $\vec{k}_i = k_i.\vec{e}_y$
- $\vec{k}_i = -\vec{k}_r$; $k_i = k_r = k = \dfrac{\omega}{v_1}$

D'où l'expression : $\vec{E}_i(M,t) = E_{0i}\cos(\omega.t - k.y)\vec{e}_z$

■ **Expression du champ électromagnétique réfléchi** $\vec{E}_r(M,t)$ **:**

$$\vec{E}_r(M,t) = E_{0r}\cos(\omega.t + k.y)\vec{e}_z$$

3) Relation entre l'amplitude E_{0r} **du champ réfléchi et** E_{0i} **du champ incident :**

♦ **Relation de passage pour la composante tangentielle de** $\vec{E}_i(M,t)$ **:**

En tout point M(x,y,z) de la surface de séparation (plan ZOX)) on a $y = 0$:

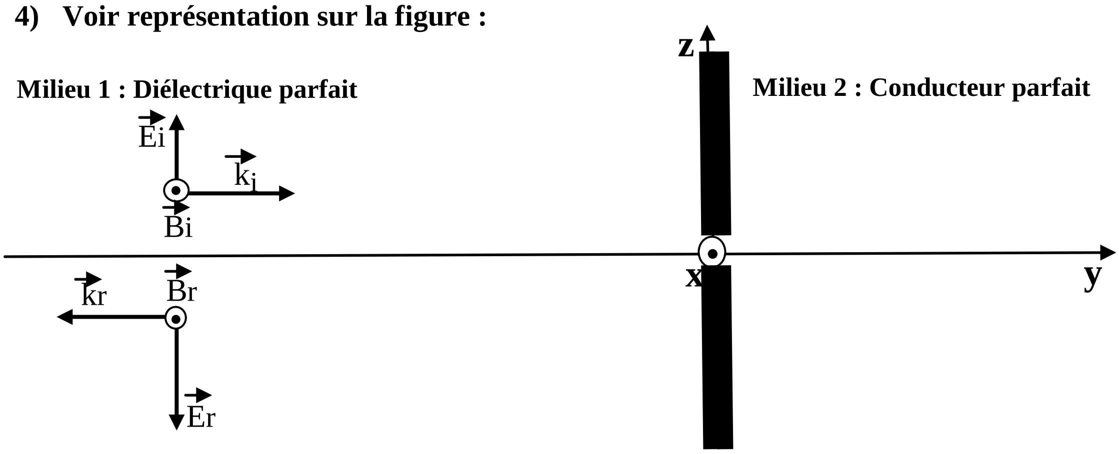
$$\begin{cases} \vec{E}_1(y=0,t).\vec{T} = 0 \\ \vec{T} = \vec{e}_z \\ \vec{E}_1(y=0,t) = \vec{E}_i(y=0,t) + \vec{E}_r(y=0,t) \\ \vec{E}_i(y=0,t).\vec{e}_z + \vec{E}_r(y=0,t).\vec{e}_z = 0 \\ E_{0i} + E_{0r} = 0 \qquad (1) \end{cases}$$

Nous déduisons à partir de la relation (1) que : $E_{0r} = -E_{0i}$

D'où l'expression du champ réfléchi : $\vec{E}_r(M,t) = -E_{0i}\cos(\omega.t + k.y)\vec{e}_z$

Conclusion : Le champ électrique réfléchi à la surface d'un conducteur est en opposition de phase avec le champ électrique incident.

4) Voir représentation sur la figure :



5) Expressions des champs magnétiques incident $\vec{B}_i(M,t)$ **et réfléchi** $\vec{B}_r(M,t)$ **:**

Les deux ondes incidente et réfléchie sont planes, donc :

$$\vec{B}_i(M,t) = \frac{\vec{k}_i}{\omega}\Lambda\vec{E}_i(M,t) = \frac{k}{\omega}\vec{e}_y\Lambda E_i(M,t).\vec{e}_z = \frac{kE_i(M,t)}{\omega}\vec{e}_x$$

Soit : $$\vec{B}_i(M,t) = \frac{k}{\omega}E_{0i}\cos(\omega.t - ky)\vec{e}_x = B_{0i}\cos(\omega.t - ky)\vec{e}_x$$

De même :

$$\vec{B}_r(M,t) = \frac{\vec{k}_r}{\omega}\Lambda\vec{E}_r(M,t) = -\frac{\vec{k}_i}{\omega}\Lambda\vec{E}_r(M,t) = -\frac{k}{\omega}\vec{e}_y\Lambda E_r(M,t).\vec{e}_z = -\frac{kE_r(M,t)}{\omega}\vec{e}_x$$

Soit :

$$\vec{B}_r(M,t) = -\frac{k}{\omega}E_{0r}\cos(\omega.t + ky)\vec{e}_x = \frac{k}{\omega}E_{0i}\cos(\omega.t + ky)\vec{e}_x = B_{0i}\cos(\omega.t + ky)\vec{e}_x$$

===