Université Moulay Ismail
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année universitaire
2022-2023
Filière : SMIA, Semestre 2

Analyse III

Youness MAZIGH

y.mazigh@umi.ac.ma

Table des matières

Chapitre 1

Formule de Taylor

Théorème 1.1 (Théorème des accroissements finis généralisés) *Soient f et g deux fonctions réelles continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. Alors, il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que*

$$(g(b) - g(a))f'(c) = (f(b) - f(a))g'(c)$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle sur $[a, b]$ à la fonction

$$x \longmapsto g(x)(f(b) - f(a)) - f(x)(g(b) - g(a))$$

Considérons l'application φ définie sur $[a, b]$ par

$$\varphi(x) = g(x)(f(b) - f(a)) - f(x)(g(b) - g(a)).$$

Par hypothèse f et g sont continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$; l'application φ est donc continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. De plus on a

$$\varphi(a) = \varphi(b) = g(a)f(b) - f(a)g(b).$$

D'où, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\varphi'(c) = 0$$

c'est-à-dire

$$g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(a)(g(b) - g(a)).$$

D'où le résultat

$\square$

Définition 1.2

- *Soit* $x_0 \in \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$*. On dit qu'une fonction* f *est définie au voisinage de* x_0 *s'il existe un voisinage* V *de* x_0 *tel que* f *soit définie sur* $V \setminus \{x_0\}$*.*
- *Soit* $x_0 \in \mathbb{R}$*. On dit qu'une fonction* f *est dérivable au voisinage de* x_0 *s'il existe un voisinage* V *de* x_0 *tel que* f *soit dérivable sur* $V \setminus \{x_0\}$*.*

Exemples 1.3

- *La fonction* $x \mapsto \frac{1}{x}$ *est définie au voisinage de* 0 *mais pas sur un voisinage de* 0*.*
- *La fonction* $x \mapsto |x|$ *est dérivable au voisinage de* 0 *mais pas sur un voisinage de* 0*.*

Proposition 1.4 (Règle de L'Hospital) *Soient* $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ *et* f*,* g *deux fonctions réelles continues et dérivables au voisinage de* x_0*. On suppose que* g' *ne s'annule pas au voisinage de* x_0*. Si*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \quad \textit{ou} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$$

alors

$$\left(\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \right) \Longrightarrow \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x))} = \ell \right)$$

Démonstration.

- Supposons que $x_0 \in \mathbb{R}$. Par hypothèse, les deux fonctions f et g sont continues et dérivables au voisinage de x_0. Donc, il existe un voisinage V de x_0 tel que f et g sont continues et dérivables sur $V \setminus \{x_0\}$.

  - Commençons par le cas $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$. Quitte à remplacer f et g par leurs prolongements par continuité, on peut supposer que $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Donc, il existe un intervalle ouvert $]a, b[\subset V$ contenant x_0 tel que les deux fonctions f, g sont continues sur $]a, b[$ et dérivables en tout point de cet intervalle sauf éventuellement en x_0. Supposons que $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Pour tout $x \in]a, b[\setminus\{x_0\}$, le théorème des accroissements finis généralisés appliqué à f et g sur l'intervalle d'extrémités x_0 et x assure l'existence d'un réel c_{x,x_0} dans l'intervalle d'extrémités x_0 et x tel que

  $$(f(x) - f(x_0))g'(c_{x,x_0}) = (g(x) - g(x_0))f'(c_{x,x_0})$$

  Puisque g' ne s'annule pas sur $]a, b[$, $g(x) - g(x_0) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[\setminus\{x_0\}$. Par conséquent, on obtient

  $$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c_{x,x_0})}{g'(c_{x,x_0})}$$

  Comme $\lim_{x\to x_0} c_{x,x_0} = x_0$ et $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, on obtient $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(c_{x,x_0})}{g'(c_{x,x_0})} = \ell$. On en déduit que

  $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \ell.$$

  ce qui établit la règle de l'Hospital dans ce cas.

  - Supposons maintenant que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$.

    - Si $\ell \in \mathbb{R}$ alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un un intervalle ouvert $]a, b[$ contenant x_0 tel que pour tout $x \in (V\cap]a, b[) \setminus \{x_0\}$, on a

    $$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - \ell\right| < \varepsilon,$$

    car $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$. Soit x_1 fixe dans $(V\cap]a, b[) \setminus \{x_0\}$. Le théorème des accroissements finis généralisés appliqué à f et g sur l'intervalle d'extrémités x_1 et x ($x \in (V\cap]a, b[) \setminus \{x_0\}$) assure l'existence d'un réel c_{x,x_1} dans l'intervalle d'extrémités x_1 et x tel que

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} = \frac{f'(c_{x,x_1})}{g'(c_{x,x_1})}.$$

Par suite

$$\left|\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} - \ell\right| = \left|\frac{f'(c_{x,x_1})}{g'(c_{x,x_1})} - \ell\right| < \varepsilon$$

ce qui montre que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} = \ell$$

D'où

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell,$$

puisque $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}$.

- Si $\ell = +\infty$ alors pour tout $A > 0$, il existe un un intervalle ouvert $]a,b[$ contenant x_0 tel que pour tout $x \in (V \cap]a,b[) \setminus \{x_0\}$, on a

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} > A.$$

Le théorème des accroissements finis généralisés appliqué à f et g sur l'intervalle d'extrémités x_1 et x ($x \in (V \cap]a,b[) \setminus \{x_0\}$) assure l'existence d'un réel c_{x,x_1} dans l'intervalle d'extrémités x_1 et x tel que

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} = \frac{f'(c_{x,x_1})}{g'(c_{x,x_1})}.$$

Par suite

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} = \frac{f'(c_{x,x_1})}{g'(c_{x,x_1})} > A$$

D'où

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} = +\infty$$

- Si $x_0 = \pm\infty$. Comme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})},$$

le raisonnement au-dessus montre que

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} &= \lim_{t\to 0} \frac{(f(\frac{1}{t}))'}{(g(\frac{1}{t}))'} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{-1}{t^2} f'(\frac{1}{t})}{\frac{-1}{t^2} g'(\frac{1}{t})} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} \end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$\square$

Exemples 1.5 *Utilisons la règle de l'Hospital pour calculer les limites*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}\quad et\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin^2(x))}{\sin(x)}$$

- *Posons $f: x\mapsto e^x-x-1$ et $g: x\mapsto x^2$. On a $f(0)=g(0)=0$. Les fonctions f et g sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ et*

$$f'(x)=e^x-1\quad et\quad g'(x)=2x$$

Comme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

La règle de l'Hospital permet de conclure que $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}=\frac{1}{2}$.

- *Posons $\varphi: x\mapsto \ln(1+\sin^2(x))$ et $\psi: x\mapsto \sin(x)$. On a $\varphi(0)=\psi(0)=0$. Les fonctions ψ et φ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et*

$$\varphi'(x)=\frac{2\sin(x)\cos(x)}{1+\sin^2(x)}\quad et\quad \psi'(x)=\cos(x)$$

Comme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\sin(x)\cos(x)}{1+\sin^2(x)}}{\cos(x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin(x)\cos(x)}{(1+\sin^2(x)).\cos(x)}=0\end{aligned}$$

La règle de l'Hôpital permet de conclure que $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin^2(x))}{\sin(x)}=0$.

Remarque 1.6 *L'implication réciproque dans la règle de L'Hospital est fausse. Par exemple considérons les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin(\frac{1}{x}) & si\ x\neq 0\\ \\ 0 & si\ x=0\end{cases}\qquad et\qquad g(x)=\sin(x)$$

On a
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=0 \quad \textit{mais} \quad \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}\notin\overline{\mathbb{R}}$$
puisque pour tout $x\in\mathbb{R}^*$
$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{1}{\cos(x)}\Big(2x\sin(\frac{1}{x})-\cos(\frac{1}{x})\Big).$$
et $\lim\limits_{x\to 0}\cos(\frac{1}{x})\notin\overline{\mathbb{R}}$. □

1.1 Formule de Taylor

On va généraliser le théorème des accroissements finis et établir le théorème de Taylor-Lagrange.

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert I et dérivable sur I. Si la dérivée de f est à son tour dérivable, on note f'' ou $f^{(2)}$ la dérivée de f' qui est appelée dérivée seconde de f. On peut ainsi de proche en proche définir pour $n\in\mathbb{N}^*$, la dérivée n-ième (ou d'ordre n) de f que l'on note $f^{(n)}$. On dit alors que f est n-fois dérivable sur I. Par convention $f^{(0)}=f$ et $f^{(1)}=f'$.

Définition 1.7 *On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si f est n-fois dérivable et la dérivée n-ième $f^{(n)}$ est continue sur I.*
Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I pour tout n, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

Théorème 1.8 (Formule de Taylor-Lagrange d'ordre n) *Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$. On suppose que f admet une dérivée d'ordre $(n+1)$ sur $]a,b[$. Alors il existe $c\in]a,b[$ tel que*
$$f(b) \;=\; f(a)+\sum_{k=1}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$
Le terme $\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$ est appelé le reste de Lagrange d'ordre n.

Démonstration. Considérons la fonction φ définie sur $[a,b]$ par
$$\varphi(x)=f(x)+\sum_{k=1}^{n}\frac{(b-x)^k}{k!}f^{(k)}(x)$$

La fonction φ est continue sur $[a,b]$, puisque f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$. Comme f admet une dérivée d'ordre $(n+1)$ sur $]a,b[$, la fonction φ est dérivable sur $]a,b[$. De plus pour tout $x\in]a,b[$, on a

$$\begin{array}{rcl}\varphi'(x) & = & f'(x)+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{-k(b-x)^{k-1}}{k!}f^{(k)}(x)+\frac{(b-x)^k}{k!}f^{(k+1)}(x)\right)\\ & = & f'(x)+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{-(b-x)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k)}(x)+\frac{(b-x)^k}{k!}f^{(k+1)}(x)\right)\\ & = & \dfrac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)\end{array}$$

Posons $\psi(x)=\frac{-(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$. La fonction ψ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. D'où d'après le théorème des accroissements finis généralisés, il existe $c\in]a,b[$ tel que

$$\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{\psi(b)-\psi(a)}=\frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}$$

Or $\varphi'(x)=\frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)=f^{n+1}(x)\psi'(x)$, on obtient

$$\begin{array}{rcl}\dfrac{\varphi(b)-\varphi(a)}{\psi(b)-\psi(a)} & = & \dfrac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}\\ & = & f^{(n+1)}(c)\end{array}$$

Ainsi,

$$\begin{array}{rcl}\varphi(b)-\varphi(a) & = & \Big(\psi(b)-\psi(a)\Big)f^{(n+1)}(c)\\ & = & \dfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)\end{array}$$

ce qui montre que

$$f(b)=f(a)+\sum_{k=1}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

□

Théorème 1.9 (Inégalité de Taylor-Lagrange) *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I telle que $f^{(n+1)}$ existe sur I. Supposons que $f^{(n+1)}$ est bornée sur I, c'est-à-dire qu'il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que*

$$\forall x\in I,\quad |f^{(n+1)}(x)|\le M.$$

Alors pour tout $a \in I$, on a

$$\forall x \in I \qquad \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

La quantité $M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$ est appelée la borne d'erreur absolue.

Démonstration. Exercice □

Exemple 1.10 *Considérons la fonction f définie sur $]-1, +\infty[$ par :*

$$f(x) = \ln(1+x)$$

On a pour tout $x > -1$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad \textit{et} \quad f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$$

Donc pour tout $x \geq 9$

$$|f''(x)| \leq 10^{-2}$$

et par suite

$$\forall x \geq 9 \quad |f(x) - f(9) - f'(9)(x-9)| \leq \frac{1}{2} 10^{-2} (x-9)^2$$

c-à-d

$$|\ln(1+x) - \ln(10) - 0,1(x-9)| \leq \frac{1}{2} 10^{-2} (x-9)^2$$

Prenons par exemple $x = 10$, on obtient

$$|\ln(11) - \ln(10) - 0,1| \leq \frac{1}{2} 10^{-2}$$

c'est-à-dire

$$|\ln(1,1) - 0,1| \leq \frac{1}{2} 10^{-2}$$

Donc $0,1$ est une valeur approchée de $\ln(1,1)$ à $0,005$ près. □

Voici un autre énoncé du théorème de Taylor-Lagrange sur un intervalle I non nécessairement fermé borné :

Théorème 1.11 (Formule de Taylor-Mac-Laurin) *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I contenant 0. On suppose qu'il existe $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $h \in I$ et que f admet une dérivée d'ordre $(n+1)$ sur l'intervalle ouvert d'extrémités 0 et h. Alors il existe $\theta \in]0,1[$ tel que :*

$$f(h) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(h\theta).$$

Démonstration. Sans perte de généralité en peut supposer $h > 0$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, en particulier sur l'intervalle ouvert $]0,h[$. Comme f admet une dérivée d'ordre $(n+1)$ sur l'intervalle ouvert $]0,h[$, le théorème de Taylor-Lagrange montre qu'il existe $c \in]0,h[$ tel que

$$f(h) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Ainsi la bijection

$$\begin{array}{ccc}]0,1[& \longrightarrow &]0,h[\\ x & \longmapsto & hx \end{array}$$

assure l'existence d'un élément $\theta \in]0,1[$ tel que $c = h\theta$. D'où le résultat □

Exemples 1.12 *Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors*

1. *La dérivée d'ordre k de la fonction $f : x \mapsto e^x$ est $f^{(k)}(x) = e^x$.*
2. *La dérivée d'ordre k de la fonction $x \mapsto \sin(x)$ est $\sin^{(k)}(x) = \sin(x + k\frac{\pi}{2})$. En particulier*

$$\sin^{(2n+2)}(x) = (-1)^{n+1} \sin(x) \quad \textit{et} \quad \sin^{(2n+3)}(x) = (-1)^{n+1} \cos(x).$$

3. *La dérivée d'ordre k de la fonction $x \mapsto \cos(x)$ est $\cos^{(k)}(x) = \cos(x + k\frac{\pi}{2})$. En particulier*

$$\cos^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \sin(x) \quad \textit{et} \quad \cos^{(2n+2)}(x) = (-1)^{n+1} \cos(x).$$

D'où d'après la formule de Taylor-Maclaurin, on obtient

- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists \theta \in]0,1[$ *tel que* $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists \theta \in]0,1[$ *tel que* $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \sin(\theta x)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists \theta \in]0,1[$ *tel que* $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \cos(\theta x)$

- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists \theta \in]0,1[$ *tel que* $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin(\theta x)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists \theta \in]0,1[$ *tel que* $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos(\theta x)$.

Application 1 *On peut encadrer des fonctions par des polynômes. Montrons par exemple que*

$$\forall x \in]0, \pi[, \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

En effet, d'après la formule de Taylor-Maclaurin d'ordre 3 *et* 5*, on obtient respectivement*

$$\forall x \in]0, \pi[, \exists \theta \in]0,1[\quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \sin(\theta x)$$

$$\forall x \in]0, \pi[, \exists \theta \in]0,1[\quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} \sin(\theta x)$$

Or $x \in]0, \pi[$ *et* $\theta \in]0,1[$, $\theta x \in]0, \pi[$. *Donc* $\sin(\theta x) \geq 0$ *On en déduit que*

$$\forall x \in]0, \pi[, \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \tag{1.1}$$

Exercice 1.13 *Montrer que*

$$\forall x > 0, \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Définition 1.14 *Soient* $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$*,* f *et* g *deux fonctions définies au voisinage de* x_0*. On dit que* f *est négligeable devant* g *au voisinage de* x_0 *s'il existe un voisinage* V *de* x_0 *et une fonction* ε *définie sur* $V \setminus \{x_0\}$ *tels que*

$$\forall x \in V \setminus \{x_0\} \quad f(x) = \varepsilon(x) g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

On note $f = \circ_{x_0}(g)$ *ou* $f(x) = \circ_{x_0}(g(x))$ *ou* $f = \circ(g)$ *au voisinage de* x_0*.*

Proposition 1.15 *Soient* $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$*,* f *et* g *deux fonctions définies au voisinage de* x_0*. Si* g *ne s'annule pas au voisinage de* x_0 *alors*

$$f = \circ_{x_0}(g) \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Démonstration. Supposons que $f = \circ_{x_0}(g)$. Alors il existe un voisinage V de x_0 et une fonction ε définie sur $V \setminus \{x_0\}$ tels que

$$\forall x \in V \setminus \{x_0\} \quad f(x) = \varepsilon(x) g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Comme la fonction g ne s'annule pas au voisinage de x_0, il existe un voisinage V_1 de x_0 tel que

$$\forall x \in V_1 \setminus \{x_0\} \quad g(x) \neq 0.$$

Ainsi

$$\forall x \in (V_1 \cap V) \setminus \{x_0\} \quad f(x) = \varepsilon(x)g(x), \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0 \quad \text{et} \quad g(x) \neq 0$$

Par suite

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Réciproquement, supposons que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Comme la fonction g ne s'annule pas au voisinage de x_0, il existe un voisinage V_1 de x_0 tel que

$$\forall x \in V_1 \setminus \{x_0\} \quad g(x) \neq 0.$$

Donc la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ est définie sur $V_1 \setminus \{x_0\}$. D'où

$$\forall x \in V_1 \setminus \{x_0\} \quad f(x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) \times g(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

ce qui montre que $f = \circ_{x_0}(g)$. □

Exemples 1.16

- $x^2 = \circ_0(x)$
- $\ln(|x|) = \circ_0(\frac{1}{|x|})$
- $x = \circ_{+\infty}(x^2)$
- $x = \circ_{+\infty}(e^x)$

Théorème 1.17 (Formule de Taylor-Young) *Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant 0. Supposons que $f^{(n+1)}(0)$ existe. Alors, lorsque h tend vers 0 on a*

$$f(h) = f(0) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0) + \circ(h^{n+1}).$$

Démonstration. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$, comme $f'(0) \in \mathbb{R}$, on obtient

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0) - hf'(0)}{h} = 0$$

ce qui montre que

$$f(h) = f(0) + hf'(0) + \circ(h).$$

Supposons le résultat vrai au rang $n-1$ et montrons le au rang n. L'hypothèse de récurrence appliqué à la fonction f', donne

$$g(h) = f'(h) - f'(0) - hf''(0) - \cdots - \frac{h^n}{n!} f^{(n+1)}(0) = \circ(h^n)$$

La fonction g est la dérivée de la fonction

$$G(h) = f(h) - f(0) - hf'(0) - \cdots - \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0)$$

La formule à l'ordre n sera démontrée si l'on établit que $G(h) = \circ(h^{n+1})$, autrement dit, si l'on établit que $\lim\limits_{h\to 0} \frac{G(h)}{h^{n+1}} = 0$. La fonction G et $r : h \mapsto h^{n+1}$ étant continues et dérivables sur un voisinage de 0 et $G(0) = r(0) = 0$, la règle de l'Hospital indique que

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{G(h)}{r(h)} &= \lim_{h\to 0} \frac{G(h) - G(0)}{r(h) - r(0)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{G'(h)}{r'(h)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(h)}{(n+1)h^n} = 0 \quad (\text{car } g(h) = \circ(h^n))
\end{aligned}$$

On en conclut que $G(h) = \circ(h^{n+1})$. La formule à l'ordre n est démontrée et le raisonnement par récurrence achevé. □

Théorème 1.18 (Formule de Taylor avec reste intégral.) *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I contenant 0. Alors pour tout $x \in I$, on a*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x)^k}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

Démonstration. Considérons la fonction φ définie sur I par

$$\varphi(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k)}(t)$$

La fonction φ est dérivable sur I, puisque f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I. De plus pour tour tout $t \in I$, on a

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= f'(t) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{-k(x-t)^{k-1}}{k!} f^{(k)}(t) + \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) \right) \\
&= f'(t) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{-(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t) + \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) \right) \\
&= \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)
\end{aligned}$$

Comme $\int_0^x \varphi'(t)dt = \varphi(x) - \varphi(0)$, on obtient

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

ce qui donne

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

□