Correction de la série de TD n°1

Exercice 1 (Par primitives usuelles)**.** Calculer
$I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+t^4}\,dt,\qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos(3x))\,dx,\qquad K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)\,dt,$
$H = \displaystyle\int_0^4 t\exp(t^2)\,dt,\qquad R = \int_1^e \frac{\ln^3 t}{t}\,dt.$

Solution. •

$$\begin{aligned} I = \int_0^1 \frac{t}{1+t^4}dt &= \int_0^1 \frac{1}{2}\cdot\frac{(t^2)'}{1+(t^2)^2}dt, \\ &= \frac{1}{2}\Big[\arctan(t^2)\Big]_0^1, \\ &= \frac{1}{2}\arctan(1), \\ &= \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

• Une primitive de $x \mapsto 1$ est $x \mapsto x$, et une primitive de $x \mapsto \cos(3x)$ est $x \mapsto \frac{1}{3}\sin(3x)$. On en déduit que

$$\begin{aligned} J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos(3x))\,\mathrm{d}x &= \left[x - \frac{1}{3}\sin(3x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} K = \int_0^{\pi/4} \tan(t)dt &= \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(t)}{\cos(t)}dt \\ &= \Big[-\ln|\cos(t)|\Big]_0^{\pi/4} \\ &= -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \ln\left(\sqrt{2}\right) \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} H = \int_0^4 te^{t^2}\,dt &= \int_0^4 \frac{1}{2}(t^2)'e^{t^2}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\Big[e^{t^2}\Big]_0^4 \\ &= \frac{e^{16}-1}{2}. \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} R = \int_1^e \frac{\ln(t)^3}{t}\,dt &= \int_1^e \frac{1}{t}\ln(t)^3\,dt \\ &= \int_1^e (\ln(t))'(\ln(t))^3\,dt \\ &= \left[\frac{\ln(t)^4}{4}\right]_1^e dt \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 2 (Intégration par parties)**.** Calculer
$I_2 = \displaystyle\int_{\ln 2}^1 xe^x\ dx, \qquad J_2 = \int_0^\pi x\sin x\ dx, \qquad K_2 = \int_{-1}^1 \arccos t\ dt.$

Solution. Posons $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$
Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\ln 2, 1]$, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_2 = \big[xe^x\big]_{\ln 2}^1 - \int_{\ln 2}^1 e^x\ dx &= \big[xe^x\big]_{\ln 2}^1 - \big[e^x\big]_{\ln 2}^1 \\ &= \big[xe^x - e^x\big]_{\ln 2}^1 \\ &= 2 - 2\ln 2 \end{aligned}$$

de la même façon

$$\begin{aligned} J_2 = \int_0^\pi x\sin x\ dx &= \big[-x\cos x\big]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\ dx \\ &= \big[-x\cos x\big]_0^\pi + \big[\sin x\big]_0^\pi \\ &= \big[\sin x - x\cos x\big]_0^\pi \\ &= \pi \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} K_2 = \int_{-1}^1 \arccos t\ dt &= \big[t\arccos t\big]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \\ &= \big[t\arccos t\big]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}\,dt \\ &= \big[t\arccos t\big]_{-1}^1 - \big[\sqrt{1-t^2}\big]_{-1}^1 \\ &= \big[t\arccos t - \sqrt{1-t^2}\big]_{-1}^1 \\ &= \pi \end{aligned}$$

Exercice 3.

1. a) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{du}{u^2+u+1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

   b) En effectuant un changement de variables déduire la valeur de $A = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\sin x}$.

2. En effectuant un changement de variables, calculer

   a) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$, **b)** $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x}dx$, **c)** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\cos x\ dx$.

Solution. 1. (a)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{du}{u^2+u+1} &= \int_0^1 \frac{du}{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right]_0^1\\ &= \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

(b) On pose $u = \tan(x/2)$, de sorte que

$$dx = \frac{2du}{1+u^2}.$$

Comme $\sin(x) = \dfrac{2u}{1+u^2}$, alors l'intégrale devient

$$\begin{aligned}A = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\sin x} &= \int_0^1 \frac{1}{2+\frac{2u}{1+u^2}} \times \frac{2du}{1+u^2}\\ &= \int_0^1 \frac{du}{u^2+u+1} \text{ (la question 1 (a), entaine que)}\\ A &= \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

2. a) La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est une bijection de classe C^1 de $[1,4]$ sur $[1,2]$. On peut donc poser $u = \sqrt{t}$. Lorsque $t = 1$, $u = 1$ et lorsque $t = 4$, u vaut 2. De plus, on a

$$\frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}} = \frac{1-u}{u}$$

et

$$u = \sqrt{t} \implies t = u^2 \implies dt = 2udu.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{t}dt &= \int_1^2 \frac{1-u}{u}2udu\\ &= \int_1^2 (2-2u)du\\ &= \left[2u-u^2\right]_1^2\\ &= -1\end{aligned}$$

b) La fonction $x \mapsto e^x$ réalise une bijection de $[1,2]$ sur $[e,e^2]$. Effectuons le changement de variables $u = e^x$ dans l'intégrale, de sorte que $du = e^x dx$. Il vient

$$\int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x}dx = \int_e^{e^2} \frac{du}{1+u} = \big[\ln|1+u|\big]_e^{e^2} = \ln\left(\frac{1+e^2}{1+e}\right).$$

c) Posons $u = \phi(x) = \sin x$, la fonction ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ (bijective) de l'intervalle $[0,\frac{\pi}{2}]$ dans $[0,1]$ et plus précisément,

$x = 0 \Rightarrow u = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1$ et $du = \cos x\, dx$, d'où

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\cos x\ dx = \int_0^1 \sqrt{u}\ du = \left[\frac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

Exercice 4 (Intégration des fonctions rationnelles, trigonométriques). Calculer

1. $\displaystyle\int \frac{2t-1}{(t-1)(t-2)}\ dt$, $\quad\displaystyle\int \frac{1}{2t^2-2t+1}\ dt$, $\quad\displaystyle\int \cos^2 t\ dt.$

2. a) Montrer que $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{1-t^2}{1+t^2}\ dt = -1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{2}-2\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$

b) En effectuant un changement de variables déduire la valeur de $B = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\ dx.$

Solution. 1.• Calcul de $\displaystyle\int \frac{2t-1}{(t-1)(t-2)}dt$

L'intégrale est définie sur $]-\infty,1[\cup]1,2[\cup]2,+\infty[$. La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\dfrac{2t-1}{(t-1)(t-2)}$ donne

$$\frac{2t-1}{(t-1)(t-2)} = \frac{-1}{t-1}+\frac{3}{t-2}$$

ce qui entraîne que

$$\int \frac{2t-1}{(t-1)(t-2)}\ dt = \int \left(\frac{-1}{t-1}+\frac{3}{t-2}\right)\ dt = -\ln|t-1|+3\ln|t-2|+c(t),$$

où $c(\cdot)$ est définie par

$$c(t) = \begin{cases} c_1, & \text{si } t \in]-\infty,1[\\ c_2, & \text{si } t \in]1,2[\\ c_3, & \text{si } t \in]2,+\infty[\end{cases} \qquad (c_i \in \mathbb{R},\ i = 1,2,3)$$

• Calcul de $\displaystyle\int \frac{1}{2t^2-2t+1}dt$

Cette intégrale indéfinie est définie sur $\mathbb{R}$. En écrivant le trinôme $2t^2+2t+1$ sous sa forme canonique, on obtient

$$\frac{1}{2t^2-2t+1} = \frac{1}{\frac{1}{2}\big((2t-1)^2+1\big)} = \frac{2}{(2t-1)^2+1} = \frac{(2t-1)'}{(2t-1)^2+1}$$

ce qui implique que

$$\int \frac{1}{2t^2-2t+1}\,dt = \arctan(2t-1)+c,$$

où c est une constante réelle.

• Calcul de $\displaystyle\int \cos^2 t\ dt$

En linéarisant $\cos^2 t$ on obtient $\cos^2 t = \dfrac{1+\cos(2t)}{2}$ ce qui implique que

$$\int \cos^2 t\ dt = \int \frac{1+\cos(2t)}{2}\ dt = \frac{1}{2}t + \frac{\sin(2t)}{4} + c, \quad c\in\mathbb{R},$$

2. (a)

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{1-t^2}{1+t^2}\ dt &= -\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{1+t^2}{1+t^2}\ dt + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{2}{1+t^2}\ dt\\ &= -1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{2}-2\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).\end{aligned}$$

(b) $B = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\ dx.$

On a $w(x) = \dfrac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\ dx$ est invariante par $w(-x)=w(x)$, alors d'après la règles de Bioche, on pose donc $t=\cos x$, ainsi $dt = -\sin x\ dx$ et $\sin^3 x\ dx = (\sin^2 x)\sin x\ dx = -(1-t^2)\ dx$.

Le calcul donne alors

$$B = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{1-t^2}{1+t^2}\ dt = -1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{2}-2\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

<u>Exercice</u> 5. Calculer si elles existent les limites suivantes,quand n tend vers l'infini.

$$\textbf{1}.\quad u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n^2+kn}} \qquad \textbf{2}.\quad u_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{1}{n}\cos\left(\frac{ka}{n}\right) \quad a\neq 0.$$

Solution. En utilisant le fait que : si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue , alors:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f(a+k\frac{b-a}{n}) = \lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f(a+k\frac{b-a}{n})$$

1. Soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n^2+kn}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}.$

Ici $a=0$, $b=1$ et $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$. Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}}dx = [2\sqrt{1+x}]_0^1 = 2\sqrt{2}-2.$

2. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{1}{n}\cos\left(\frac{ka}{n}\right)$. Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \cos ax dx = \left[\frac{1}{a}\sin ax\right]_0^1 = \frac{1}{a}\sin a.$

<u>Exercice</u> 6.

1. Montrer que les intégrales suivantes sont divergentes:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^t + 1}{e^t + t}\, dt, \quad J = \int_0^{\pi/2} \tan x\, dx, \quad K = \int_0^{+\infty} \sin u\, du.$$

2. Calculer les intégrales généralisées suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+e^x)(1+e^{-x})}$ c) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx$

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}\, dx$ d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}\, dx$

Solution. 1. Montrons que les intégrales I, J et K sont divergentes:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \frac{e^t + 1}{e^t + t}\, dt, \\ &= \lim_{u\to+\infty} \int_0^{u} \frac{(e^t + t)'}{e^t + t}\, dt, \\ &= \lim_{u\to+\infty} \left[\ln(e^t + t)\right]_0^u, \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

cette intégrale est donc divergente.

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\pi/2} \tan(x)\, dx, \\ &= \lim_{u\to\pi/2} \int_0^{u} \tan(x)\, dx, \\ &= \lim_{u\to\pi/2} \int_0^{u} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\, dx, \\ &= -\lim_{u\to\pi/2} \int_0^{u} \frac{(\cos(x))'}{\cos(x)}\, dx, \\ &= -\lim_{u\to\pi/2} [\ln(|\cos(x)])]_0^u, \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

Ainsi cette intégrale diverge.

$$\begin{aligned} K &= \int_0^{+\infty} \sin(x)\, dx, \\ &= \lim_{u\to+\infty} \int_0^{u} \sin(x)\, dx, \\ &= \lim_{u\to+\infty} [-\cos(x)]_0^u, \\ &= \lim_{u\to+\infty} -\cos(u) + 1. \end{aligned}$$

On sait que $\lim\limits_{u\to+\infty}\cos(u)$ n'existe pas, en effet si l'on considére les deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ qui sont définies pour tout entier n par $u_n = 2n\pi$ et $v_n = 2n\pi + \pi$, on a

$$\left\{\begin{array}{ll} u_n \to +\infty, & \text{quand } n \to +\infty; \\ v_n \to +\infty, & \text{quand } n \to +\infty; \end{array}\right. \text{ alors que } \left\{\begin{array}{ll} \cos(u_n) \to 1, & \text{quand } n \to +\infty; \\ \cos(v_n) \to -1, & \text{quand } n \to +\infty; \end{array}\right.$$

Celà veut dire que l'intégrale K diverge.

2. a) On a

$$\frac{1}{(1+e^x)(1+e^{-x})} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}.$$

Cette expression est de la forme $u'/(1+u)^2$ et admet comme primitive $-1/(1+u)$. Donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+e^x)(1+e^{-x})} = \left[-\frac{1}{1+e^x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2} - \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2}.$$

b) Posons $t = \phi(x) = \sqrt{1+e^x}$, ϕ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ dans $]\sqrt{2},+\infty[$ avec $\phi(0) = \sqrt{2}$ et $\lim_{+\infty}\phi(x) = +\infty$. Avec ce changement de variable, sachant que $x = \phi^{-1}(t) = \ln(t^2-1)$, et que $dx = \dfrac{2t}{t^2-1}\,dt$, on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$ et $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{2}{t^2-1}\,dt$ sont égaux et de même nature. Par la méthode de la décomposition en élements simples, on montre que pour $X \geq \sqrt{2}$ on a

$$\int_{\sqrt{2}}^{X}\frac{2}{t^2-1}\,dt = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\,dt = \left[\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\right]_{\sqrt{2}}^{X} = \ln\left(\frac{X-1}{X+1}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)$$

En faisant tendre $X \to +\infty$ on obtient $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{2}{t^2-1}\,dt = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)$. Par suite l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$ converge et on a l'égalité

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{2}{t^2-1}\,dt = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right).$$

c) En intégrant par parties ($x > 0$)

$$\int\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx = -\frac{\ln x}{1+x} + \int\frac{dx}{x(1+x)}.$$

Mais en décomposant la fraction rationnelle

$$\frac{1}{x(1+x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x},$$

on obtient

$$\int\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx = -\frac{\ln x}{1+x} + \ln x - \ln(1+x) = \frac{x\ln x}{1+x} - \ln(1+x) + c.$$

Alors

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)^2}dx = \left[\frac{x\ln x}{1+x} - \ln(1+x)\right]_0^1 = -\ln 2 - \lim_{x\to 0}\left(\frac{x\ln x}{1+x} - \ln(1+x)\right) = -\ln 2.$$

d) Posons $I_1 := \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$, alors I_1 est impropre en 0 et on a pour tout $t \in]0,1]$,

$$\int_t^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = 2\int_t^1 \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}^2}\,dx = \left[2\arctan\sqrt{x}\right]_t^1 = 2\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\sqrt{t}\right)$$

donc $I_1 = \lim_{t\to 0^+} 2\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\sqrt{t}\right) = \frac{\pi}{2}$. De la même manière on obtient pour $k > 1$

$$\int_1^k \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = 2\int_1^k \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}^2}\,dx = \left[2\arctan\sqrt{x}\right]_1^k = 2(\arctan\sqrt{k} - \frac{\pi}{4}).$$

Si on pose $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$, donc

$$I_2 = \lim_{k\to+\infty}\int_1^k \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \lim_{k\to+\infty} 2(\arctan\sqrt{k} - \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}.$$

Puisque I_1 et I_2 convergent, leur somme $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$ converge et de plus

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = I_1 + I_2 = \pi.$$

<u>Exercice</u> 7 (Critères pour des fonctions de signe constant)**.** Étudier la nature des intégrales suivantes

$$A = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx, \quad B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx, \quad C = \int_4^{+\infty} \frac{-x}{\sqrt{(x^2+9)^3}}\,dx,$$

$$D = \int_4^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^3}\,dx, \quad E = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,dx, \quad F = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2}\,dx.$$

Solution. • L'intégrale A est impropre en $+\infty$ et la fonction sous le signe intégrale est positive sur $[1,+\infty[$ et on a

$$(\forall x \in [1,+\infty[) \quad 1 \leq \sqrt{1+\frac{1}{x^4}} \Rightarrow (\forall x \in [1,+\infty[) \quad \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}$$

Comme l'intégrale de Reimann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ diverge, d'après le critère de comparaison on déduit que A diverge.

<u>Autrement:</u> on peut utiliser l'équivalence suivante $\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}} \sim_{+\infty} \frac{1}{x}$ et utiliser le critère d'équivalence.

• Posons $B_1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$ et $B_2 = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$.
On a $\big(\forall x \in]-\infty, 0]\big)$ $\dfrac{e^x}{1+e^{2x}} \leq e^x$ et comme $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx$ converge (utiliser la définition).
• Au voisinage de $+\infty$ on a $\dfrac{e^x}{1+e^{2x}} \sim e^{-x}$ et puisque $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\,dx$ converge (utiliser encore la définition) B_2 converge d'après le critère déquivalence.
la convergence de B_1 et de B_2 entraîne la convergence de B.
Remarque: L'usage de ces critères nous permet seulement de déterminer la nature de l'intégrale. Pour déterminer la valeur, nous utilisons souvent la définition: pour le cas de B, on remarque que

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \arctan(e^x) + c.$$

• La fonction $x \mapsto \dfrac{-x}{\sqrt{(x^2+9)^3}}$ est négative sur $[4, +\infty[$. L'intégrale C est impropre en $+\infty$ et au voisinage de $+\infty$, on a l'équivalence suivante:

$$\frac{-x}{\sqrt{(x^2+9)^3}} \sim \frac{-1}{x^2}.$$

l'intégrale de Reimann $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge, donc la convergence de C en découle d'après le critère d'équivalence.
• La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin^2 x}{x^3}$ est positive sur $[4, +\infty[$. De plus pour tout x dans $[4, +\infty[$, $0 \leq \sin^2 x \leq 1$ ce qui implique que $\forall x \in [4, +\infty[\quad 0 \leq \dfrac{\sin^2 x}{x} \leq \dfrac{1}{x}$. Par le critère de comparaison des limites on déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sin^2 x}{x^3}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} = 0$$

ce qui implique que

$$\frac{\sin^2 x}{x^3} = o_{+\infty}\big(\frac{1}{x^2}\big)$$

l'intégrale de Reimann $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge donc d'après le critère de négligeabilité, l'intégrale D converge.
• L'intégrale E est impropre en 0 et la fonction sous le signe intégrale est négative sur $]0, \pi/2]$ et on a le $\mathrm{DL}_2(0)$ de la fonction sin s'écrit $\sin x = x + o(x)$ ce qui entraîne que si x est voisin de 0,

$$\ln(\sin x) = \ln(x + o(x)) = \ln x + \ln(1 + o(1)),$$ [1]

[1] On rappelle qu'au voisinage de 0 on a $\ln(1+u) = u + o(u) \sim u$

donc

$$\ln(\sin x) \sim_{0^+} \ln x$$

Or $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln x\, dx$ converge (utiliser que $x \to x\ln x - x$ est une primitive de $x \to \ln x$), par suite E converge par le critère d'équivalence.

• L'intégrale F est impropre en $+\infty$ et on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2x^2e^{-x^2} = 0$ ce qui implique que $x^2e^{-x^2}$ est negligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ c.à.d que

$$x^2e^{-x^2} = o_{+\infty}(\frac{1}{x^2}).$$

ce qui entraîne la convergence de F par le critère de négligeabilité.

<u>**Exercice**</u> **8** (Problème)**.** Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt$

1. En effectuant un développement limité en 0 de la fonction $t \mapsto e^{-t} - e^{-2t}$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt$ converge.
2. Vérifier que si $t \geq 1$, on a
$$0 \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t} \quad \text{et} \quad 0 \leq \frac{e^{-2t}}{t} \leq e^{-2t}$$
3. Déduire que I est convergente.
4. Pour $\varepsilon > 0$, établir, en posant $x = 2t$, la relation $\displaystyle\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt = \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t} dt.$
5. En utilisant la première formule de la moyenne, trouver la valeur de I.

Solution. 1. En effectuant un développement limité en 0, on a

$$e^{-t} - e^{-2t} = 1 - t - (1 - 2t) + \circ(t) = t + \circ(t),$$

donc

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} = 1$$

et la fonction se prolonge par continuité en 0. Il en résulte que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt$ converge.

2. Si $t \geq 1$, alors $\dfrac{1}{t} \leq 1$, donc

$$0 \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t} \quad \text{et} \quad 0 \leq \frac{e^{-2t}}{t} \leq e^{-2t}$$

3. Puisque les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-2t}dt$ convergent, les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t}dt$ convergent également. Donc la différence $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}dt$ converge. Avec le résultat de la question de 1, on déduit que I est convergente.

4. Transformons $\displaystyle\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t}dt$ par le changement de variable $x = 2t$. On obtient

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t}dt = \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$$

d'où

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}dt = \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt - \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt = \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}dt$$

5. On cherche la limite lorsque ε tend vers 0 du membre de droite. En utilisant la première formule de la moyenne, il existe c_ε dans $[\varepsilon, 2\varepsilon]$ tel que

$$\int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}dt = e^{-c_\varepsilon}\int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{1}{t}dt = e^{-c_\varepsilon}\ln 2.$$

Comme c_ε tend vers zéro quand ε tend vers zéro, alors d'après le théorème d'encadrement, il en résulte que

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}dt = \lim_{\varepsilon\to 0} = e^{-c_\varepsilon}\ln 2 = \ln 2.$$

.