Série de TD n°1

Exercice 1 (Par primitives usuelles). Calculer

$$I = \int_0^1 \frac{t}{1+t^4}\, dt, \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos(3x))\, dx, \qquad K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)\, dt,$$

$$H = \int_0^4 t\exp(t^2)\, dt, \qquad R = \int_1^e \frac{\ln^3 t}{t}\, dt.$$

Exercice 2 (Intégration par parties). Calculer

$$I_2 = \int_{\ln 2}^1 xe^x\, dx, \qquad J_2 = \int_0^\pi x\sin x\, dx, \qquad K_2 = \int_{-1}^1 \arccos t\, dt.$$

Exercice 3.

1. (a) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{du}{u^2+u+1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

   (b) En effectuant un changement de variables déduire la valeur de $A = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\sin x}$.

2. En effectuant un changement de variables, calculer

   a) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt$, **b)** $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x} dx$, **c)** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\cos x\, dx$.

Exercice 4 (Intégration des fonctions rationnelles, trigonométriques). Calculer

1. $\displaystyle\int \frac{2t-1}{(t-1)(t-2)}\, dt$, $\displaystyle\int \frac{1}{2t^2-2t+1} dt$, $\displaystyle\int \cos^2 t\, dt$.

2. (a) Montrer que $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{1-t^2}{1+t^2}\, dt = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2} - 2\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

(b) En effectuant un changement de variables déduire la valeur de $B = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\, dx$.

Exercice 5. Calculer si elles existent les limites suivantes, quand n tend vers l'infini.

1. $\displaystyle u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}$ **2.** $\displaystyle u_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{1}{n}\cos\left(\frac{ka}{n}\right)$ $a \neq 0$.

Exercice 6.

1. Montrer que les intégrales suivantes sont divergentes:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^t + 1}{e^t + t}\, dt, \quad J = \int_0^{\pi/2} \tan x \, dx, \quad K = \int_0^{+\infty} \sin u \, du.$$

2. Calculer les intégrales généralisées suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+e^x)(1+e^{-x})}$

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}\, dx$

c) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx$

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}\, dx$

Exercice 7 (Critères pour des fonctions de signe constant)**.** Étudier la nature des intégrales suivantes

$$A = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\, dx, \quad B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx, \quad C = \int_4^{+\infty} \frac{-x}{\sqrt{(x^2+9)^3}}\, dx,$$

$$D = \int_4^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^3}\, dx, \quad E = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\, dx, \quad F = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2}\, dx.$$

Exercice 8 (Problème)**.** Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt$

1. En effectuant un développement limité en 0 de la fonction $t \mapsto e^{-t} - e^{-2t}$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt$ converge.

2. Vérifier que si $t \geq 1$, on a

$$0 \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t} \quad \text{et} \quad 0 \leq \frac{e^{-2t}}{t} \leq e^{-2t}$$

3. Déduire que I est convergente.

4. Pour $\varepsilon > 0$, établir, en posant $x = 2t$, la relation $\displaystyle\int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt = \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t} dt.$

5. En utilisant la première formule de la moyenne, trouver la valeur de I.

Exercice 9 (Facultatif)**.** Soit $I(\lambda) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\lambda)}$.

1. Montrer que $I(\lambda)$ converge pour tout réel λ.

2. Calculer I en utilisant le changement de variable $t = 1/x$.