

Corrigé du TD N° 2 : Milieux aimantés

Exercice 1 : (Partie de l'examen de la session ordinaire, juin 2011)

Matériau magnétique parfait, de perméabilité magnétique relative μ_r , limité par deux surfaces cylindriques, de rayon externe R , de rayon interne a et de hauteur l . Il est aimanté sous l'action du champ magnétique créé par un courant réel, distribué avec une densité volumique $\vec{j} = j \cdot \vec{e}_z$ uniforme, parcourant le cylindrique de rayon a parallèlement à l'axe $Z'Z$.

En tout point $M(r, \theta, z)$ de milieu aimanté, l'aimantation est :

$$\vec{J}(M) = \frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi r} \cdot \vec{e}_\theta \text{ dans la base cylindrique } (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$$

On supposera dans cet exemple que le milieu magnétique est paramagnétique. Dans ce cas :

$$\mu_r - 1 = \chi_m > 0$$

1) Expressions des densités des courants fictifs d'aimantation :

♦ Densité volumique du courant fictif :

$$\vec{j}_a(M) = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{J}(M) = \vec{\nabla} \wedge \vec{J}(M)$$

Remarque : On appliquera l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques au vecteur $\vec{J}(M)$ tel que :

$$\vec{J}(M) = \begin{cases} J_r = 0 \\ J_\theta = \frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi r} \\ J_z = 0 \end{cases} (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$$

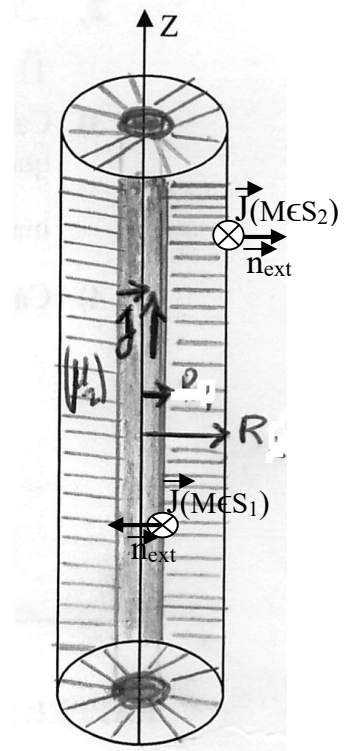
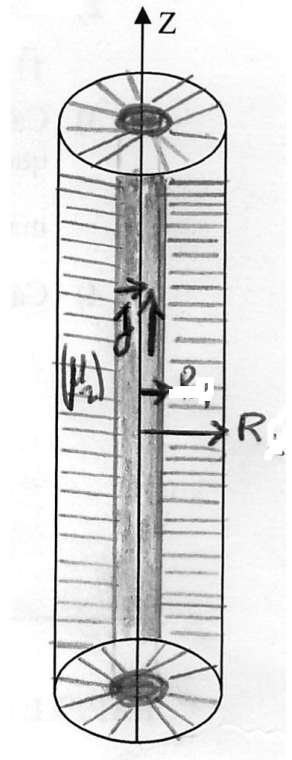
En tenant compte des composantes $J_r = J_z = 0$ et $J_\theta = J_\theta(r)$, on obtient :

$$\vec{j}_a(M) = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{J}(M) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \cdot J_\theta) \cdot \vec{e}_z = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi r} \right) \cdot \vec{e}_z = \vec{0}$$

Soit :
$$[\vec{j}_a(M) = \vec{0}]$$

♦ Densités surfaciques : $\vec{k}_a(M \in S) = \vec{J}(M \in S) \wedge \vec{n}_{\text{ext}}(M \in S)$

Les orientations du vecteur unitaire \vec{n}_{ext} normal à la surface latérale externe S_2 et interne S_1 du milieu aimanté (MA), sont représentées sur la figure ci-contre.



▪ **Densité surfacique du courant fictif au niveau de la surface latérale externe S_2 de rayon R :**

$$\begin{cases} \vec{n}_{\text{ext}}(M \in S_2) = \vec{e}_r \\ \vec{J}(M \in S_2) = \vec{J}(r = R) = \frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi R} \cdot \vec{e}_\theta \end{cases}$$

Soit :

$$\left[\vec{k}_{aS_2}(M \in S_2) = \frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi R} \cdot \vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_r = -\frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi R} \cdot \vec{e}_z \right]$$

▪ **Densité surfacique du courant fictif au niveau de la surface latérale interne S_1 de rayon a :**

$$\begin{cases} \vec{n}_{\text{ext}}(M \in S_1) = -\vec{e}_r \\ \vec{J}(M \in S_1) = \vec{J}(r = a) = \frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi a} \cdot \vec{e}_\theta \end{cases}$$

Soit :

$$\left[\vec{k}_{aS_1}(M \in S_1) = \frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi a} \cdot \vec{e}_\theta \wedge (-\vec{e}_r) = \frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi a} \cdot \vec{e}_z \right]$$

2) Expressions des intensités du courant fictif d'aimantation :

▪ **Intensité du courant fictif volumique :** $I_v^{\text{fictif}} = \iiint_{S'} \vec{j}_a \cdot d\vec{S}' = 0$ car $\vec{j}_a = \vec{0}$

▪ **Intensité du courant surfacique :**

RAPPEL : Par définition l'intensité I_S du courant surfacique qui circule au niveau d'une surface (S), (voir cours), s'exprime comme suit :

$$I_S = \int_{\ell} (\vec{k}_S \cdot \vec{u}) \cdot d\ell$$

Où :

$$\begin{cases} \vec{k}_S : \text{vecteur densité de courant, tangent à la surface (S) au point M} \\ d\ell = \text{longueur d'un segment tangent à (S) au point M} \\ \vec{u} : \text{vecteur unitaire perpendiculaire au segment et tangen à (S) au point M} \end{cases}$$

• **Cas du courant fictif d'aimantation au niveau de la surface latérale externe S_2 de rayon R :**

$$I_{S_2}^{\text{fictif}} = \int (\vec{k}_{aS_2} \cdot \vec{u}) \cdot d\ell$$

Où :

$$\begin{cases} \vec{k}_{aS_2} = -\frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi R} \vec{e}_z \\ d\ell = \text{longueur de l'arc PQ} = R \cdot d\theta \\ \vec{u} = \vec{e}_z \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad \text{(voir figure ci-après)}$$

REMARQUE :

La figure ci-contre représente uniquement la surface latérale externe (S_2), montrant le vecteur densité de courant surfacique fictif \vec{k}_{aS_2} , au point $M(r = R, \theta, z)$ de la surface ainsi que l'arc PQ de cercle de rayon R , assimilé à un segment de longueur infinitésimale $d\ell$.

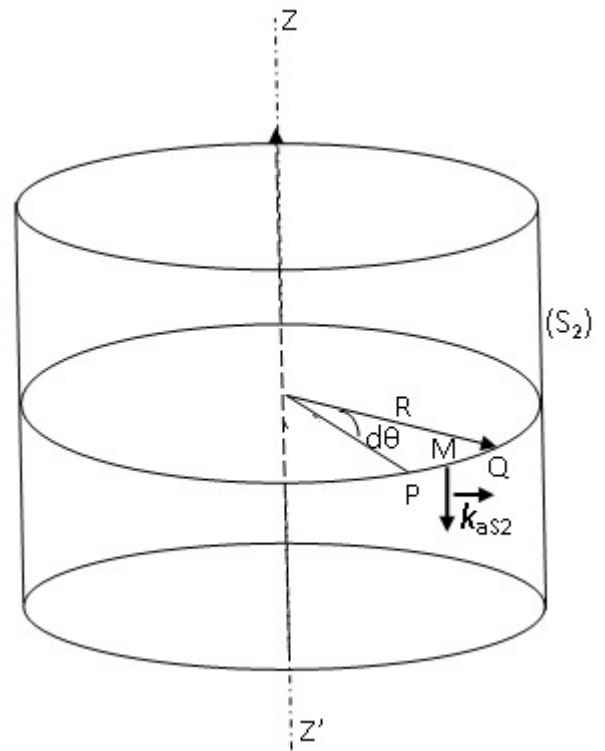
L'intensité I_{S2}^{fictif} du courant surfacique d'aimantation est donc :

$$I_{S2}^{\text{fictif}} = \int \left(-\frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi R} \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z \right) \cdot d\ell = -\frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi R} \int_0^{2\pi} R \cdot d\theta$$

$$= -\frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi R} \cdot R \cdot 2\pi$$

Soit : $I_{S2}^{\text{fictif}} = -(\mu_r - 1)I$

Le sens du vecteur densité de courant \vec{k}_{aS2} indique que le courant surfacique fictif d'intensité I_{S2}^{fictif} circule en imagination » dans le sens négatif de l'axe $Z'Z$ (de haut vers le bas).



• Cas du courant fictif d'aimantation au niveau de la surface latérale interne S_1 de rayon a :

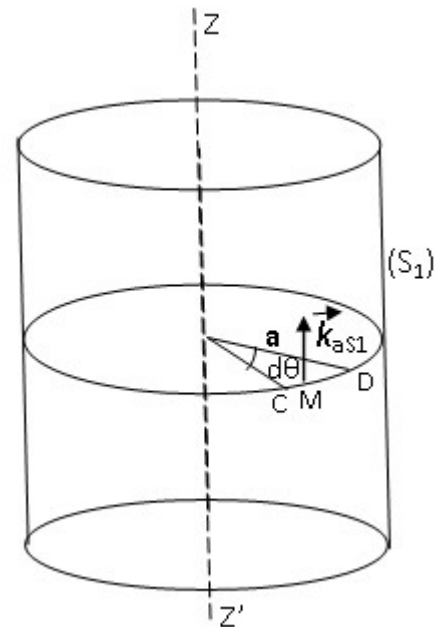
$$I_{S1}^{\text{fictif}} = \int (\vec{k}_{aS1} \cdot \vec{u}) \cdot d\ell$$

Où :

$$\begin{cases} \vec{k}_{aS1} = \frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi a} \vec{e}_z \\ d\ell = \text{longueur de l'arc CD} = a \cdot d\theta \\ \vec{u} = \vec{e}_z \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad \text{(voir figure)}$$

REMARQUE :

De la même façon la figure ci-contre représente uniquement la surface latérale externe (S_1), montrant le vecteur densité de courant surfacique fictif \vec{k}_{aS1} , au point $M(r = a, \theta, z)$ de la surface, ainsi que l'arc CD du cercle de rayon a , assimilé à un segment de longueur infinitésimale $d\ell$.



L'intensité I_{S1}^{fictif} du courant surfacique d'aimantation est donc :

$$I_{S1}^{\text{fictif}} = \int \left(\frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi a} \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z \right) \cdot d\ell = \left(\frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi a} \right) \int_0^{2\pi} a \cdot d\theta = \frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi a} \cdot a \cdot 2\pi$$

Soit :
$$I_{S1}^{\text{fictif}} = (\mu_r - 1)I$$

De même, le sens du vecteur densité de courant \vec{k}_{aS1} indique que le courant surfacique fictif d'intensité I_{S1}^{fictif} « circule en imagination » dans le sens positif de l'axe $Z'Z$.

On vérifie bien que la somme des courants fictifs est nulle :

$$I_v^a + I_{S2}^{\text{fictif}} + I_{S1}^{\text{fictif}} = 0 + (\mu_r - 1)I - (\mu_r - 1)I = 0$$

3) Expressions des champs $\vec{B}_{\text{tot}}(M)$ et $\vec{H}_{\text{tot}}(M)$ par application du théorème d'Ampère :

Montrons d'abord que les champs sont tes que :

$$\begin{cases} \vec{B}_0(M) = B_0(r) \cdot \vec{e}_\theta \\ \vec{H}_0(M) = H_0(r) \cdot \vec{e}_\theta \end{cases}$$

Pour cela, on étudiera l'invariance et la symétrie de la distribution de courant réel $\vec{j}(M)$.

♦ **Invariance de la distribution de courant :**

La distribution $j(M)$ de courant réel en un point $M(r, \theta, z)$ est telle que ;

$$j(M) = \begin{cases} = j = \frac{I}{\pi \cdot a^2} & \text{si } r \leq a \\ = 0 & \text{si } r > a \end{cases}$$

donc $\vec{j}(M) = \vec{j}(r)$ c'est-à-dire la distribution de courant est invariante par rapport à θ et z . Il en est de même pour le champ $\vec{B}_0(M)$ créé par la distribution $\vec{j}(M)$:

$$\vec{B}_0(M) = \vec{B}_0(r)$$

♦ **Symétrie de la distribution de courant :**

Tout plan contenant l'axe $Z'Z$ et partageant le cylindre de rayon r , parcouru par le courant réel, est un plan de symétrie (**P.Sym**) de la distribution de courant. On démontre (mathématiquement) qu'en tout point $M(r, \theta, z)$ appartenant à ce plan on a :

$$\vec{B}_0(M \in \text{P.Sym}) \perp \text{P.Sym.}$$

En coordonnées cylindriques ces plans sont parallèles au plan de base (\vec{e}_z, \vec{e}_r) , donc $\vec{B}_0(M)$ est suivant le vecteur unitaire \vec{e}_θ :

$$\vec{B}_0(M) = B_0(M) \cdot \vec{e}_\theta$$

Nous concluons donc que le champ $\vec{B}_0(M)$ est orthoradial et son module ne dépend que de la coordonnée r du point $M(r, \theta, z)$:

$$\vec{B}_0(M) = B_0(r) \cdot \vec{e}_\theta$$

En ce qui concerne les champs $\vec{B}_{\text{tot}}(M)$ et $\vec{H}_{\text{tot}}(M)$ on sait que :

- la distribution \vec{j} du courant réel crée le champ d'induction magnétique $\vec{B}_0(M) = B_0(r) \cdot \vec{e}_\theta$
- le champ $\vec{B}_0(M) = B_0(r) \cdot \vec{e}_\theta$ donne naissance à l'aimantation $\vec{J}(M) = J(r) \cdot \vec{e}_\theta$ de même forme que lui, car le milieu magnétique est parfait.
- une fois le milieu magnétique s'aimante, il crée un champ démagnétisant $\vec{B}_d(M) = B_d(r) \cdot \vec{e}_\theta$ de même forme.

Finalement on a :

$$\vec{B}_{\text{tot}}(\mathbf{M}) = B_0(r) \cdot \vec{e}_\theta + B_d(r) \cdot \vec{e}_\theta = B_{\text{tot}}(r) \cdot \vec{e}_\theta$$

Les lignes du champ d'induction magnétique sont donc des cercles d'axe $Z'Z$ et de rayon \mathbf{r} .

De même pour l'excitation magnétique $\vec{H}_{\text{tot}}(\mathbf{M})$ on a :

$$\vec{H}_{\text{tot}}(\mathbf{M}) = \frac{\vec{B}_{\text{tot}}(\mathbf{M})}{\mu_0 \mu_r} = \frac{B_{\text{tot}}(r) \cdot \vec{e}_\theta}{\mu_0 \mu_r} = H_{\text{tot}}(r) \cdot \vec{e}_\theta$$

♦♦ Expressions des champs $\vec{B}_{\text{tot}}(\mathbf{M})$ et $\vec{H}_{\text{tot}}(\mathbf{M})$ utilisant le théorème d'Ampère :

Le théorème d'Ampère est donné par l'intégrale (voir chapitre 2) :

$$\oint_C \vec{B}_{\text{tot}}(\mathbf{M}) \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 (I_{\text{tot}}^{\text{réel}} + I_{\text{tot}}^{\text{fictif}})$$

Etant donné que les lignes de champ d'induction magnétique sont des cercles, on choisit comme courbe fermée d'Ampère un cercle (C) de rayon \mathbf{r} et d'axe $Z'Z$. Elle est représentée en pointillés sur la figure ci-dessous. :

Calculons d'abord l'intégrale $\oint_C \vec{B}_{\text{tot}}(\mathbf{M}) \cdot d\vec{\ell}$, sachant qu'en tout point $\mathbf{M}(r, \theta, z)$ on a :

$$\begin{cases} \vec{B}_{\text{tot}}(\mathbf{M}) = B_{\text{tot}}(r) \cdot \vec{e}_\theta \\ d\vec{\ell} = r \cdot d\theta \cdot \vec{e}_\theta \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\oint_C \vec{B}_{\text{tot}}(\mathbf{M}) \cdot d\vec{\ell} = \oint_C B_{\text{tot}}(\mathbf{M}) \cdot d\vec{\ell} = \oint_C B_{\text{tot}}(r) \cdot r \cdot d\theta = B_{\text{tot}}(r) \cdot r \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \cdot r \cdot B_{\text{tot}}(r)$$

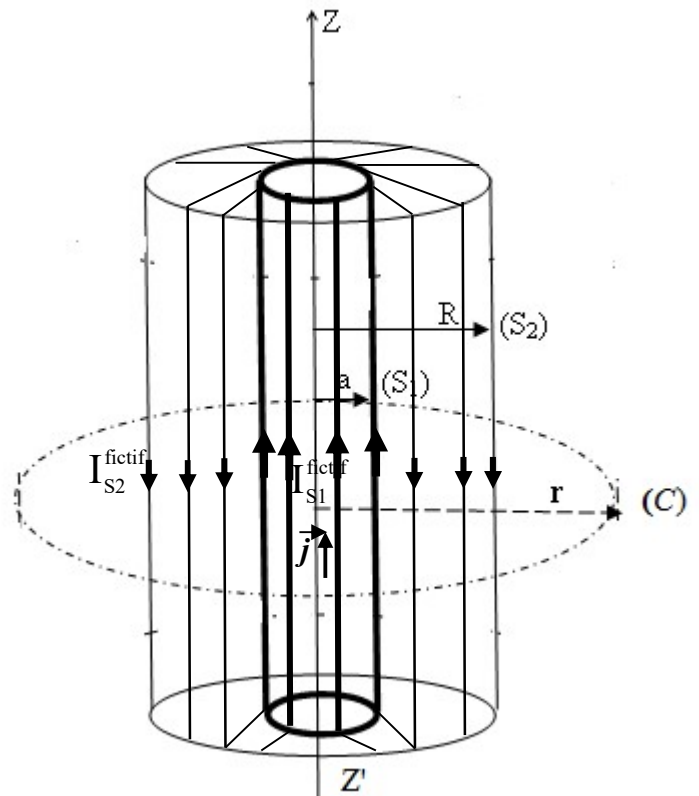
Remarque : L'induction magnétique $\vec{B}_{\text{tot}}(\mathbf{M})$ ne dépend que de la coordonnée r du point \mathbf{M} , donc elle est constante en tout point \mathbf{M} du cercle (C) d'Ampère (cercle de rayon \mathbf{r} fixe).

En résumé on a :

$$2\pi \cdot r \cdot B_{\text{tot}}(r) = \mu_0 (I_{\text{tot}}^{\text{réel}} + I_{\text{tot}}^{\text{fictif}})$$

$$\text{Soit : } \vec{B}_{\text{tot}}(\mathbf{M}) = \frac{\mu_0 (I_{\text{tot}}^{\text{réel}} + I_{\text{tot}}^{\text{fictif}})}{2\pi \cdot r} \cdot \vec{e}_\theta$$

On doit donc exprimer les intensités des courants réels $I_{\text{tot}}^{\text{réel}}$ et fictifs $I_{\text{tot}}^{\text{fictif}}$, pour chaque région de l'espace, en s'appuyant sur la figure ci-contre, qui représente la situation équivalente au milieu aimanté dans le vide.



$$\diamond \text{ Si } r > R : \quad \begin{cases} I_{\text{tot}}^{\text{réel}} = I \\ I_{\text{tot}}^{\text{fictif}} = I_{S1}^{\text{fictif}} + I_{S2}^{\text{fictif}} = (\mu_r - 1)I - (\mu_r - 1)I = 0 \end{cases}$$

$$\text{Soit :} \quad \vec{B}_{\text{tot}}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi.r} \vec{e}_\theta$$

$$\text{On est dans le vide : } \mu_r = 1 \Rightarrow \vec{H}_{\text{tot}}(M) = \frac{\vec{B}_{\text{tot}}(M)}{\mu_0} = \frac{I}{2\pi.r} \vec{e}_\theta$$

$$\diamond \text{ Si } a < r < R : \quad \begin{cases} I_{\text{tot}}^{\text{réel}} = I \\ I_{\text{tot}}^{\text{fictif}} = I_{S1}^{\text{fictif}} = (\mu_r - 1)I \end{cases}$$

$$\text{Soit :} \quad \vec{B}_{\text{tot}}(M) = \frac{\mu_0 \mu_r \cdot I}{2\pi.r} \vec{e}_\theta$$

$$\text{On est dans le milieu aimanté : } \mu_r \neq 1 \Rightarrow \vec{H}_{\text{tot}}(M) = \frac{\vec{B}_{\text{tot}}(M)}{\mu_0 \mu_r} = \frac{I}{2\pi.r} \vec{e}_\theta$$

◆ Si $r < a$:

Remarque : La densité du courant réel $\vec{j} = j \cdot \vec{e}_z$ s'exprime en fonction de l'intensité I du courant réel qui circule dans le cylindre intérieur, de son rayon a et de sa hauteur h , comme suit :

$$\vec{j} = \frac{I}{\pi \cdot a^2} \vec{e}_z$$

$$\text{donc :} \quad \begin{cases} I_{\text{tot}}^{\text{réel}} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_S j \cdot \vec{e}_z \cdot dS \cdot \vec{e}_z = \int_S j \cdot dS = j \int_S dS = j \cdot S = j \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{r^2}{a^2} I \\ I_{\text{tot}}^{\text{fictif}} = 0 \end{cases}$$

$$\text{soit :} \quad \vec{B}_{\text{tot}}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi \cdot a^2} r \cdot \vec{e}_\theta$$

$$\text{On est dans un milieu non magnétique : } \mu_r = 1 \Rightarrow \vec{H}_{\text{tot}}(M) = \frac{\vec{B}_{\text{tot}}(M)}{\mu_0} = \frac{I}{2\pi \cdot a^2} r \cdot \vec{e}_\theta$$

Exercice 2 : (Partie de l'examen de la session rattrapage, juillet 2013)

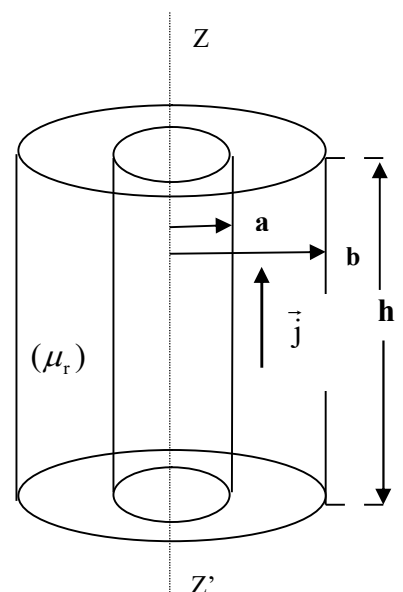
Milieu magnétique parfait, de perméabilité magnétique relative μ_r , limité par deux surfaces cylindriques (S_1) et (S_2) de même axe $Z'Z$, de hauteur h et de rayons respectifs a et b . Il est parcouru par un courant électrique volumique réel de densité volumique $\vec{j} = j \cdot \vec{e}_z$ uniforme (voir figure).

On supposera également que le milieu magnétique est paramagnétique, Ce qui correspond à :

$$\mu_r - 1 = \chi_m > 0$$

1) Montrons que le champ d'excitation magnétique s'écrit dans la base cylindrique ($\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$) :

$$\vec{H}(M) = H_\theta(r) \cdot \vec{e}_\theta. \quad (r \text{ est la distance du point } M \text{ à l'axe } Z'Z) :$$



Pour répondre à cette question on procédera comme dans l'exercice Précédent (question 3).

♦ **Invariance de la distribution de courant $\vec{j}(M)$:**

La distribution de courant réel en un point $M(r, \theta, z)$ est telle que ;

$$\vec{j}(M) = \begin{cases} = 0; & \text{si } r < a \\ = j; & \text{si } a \leq r \leq b \\ = 0; & \text{si } r > b \end{cases}$$

donc $\vec{j}(M) = \vec{j}(r)$ c'est-à-dire la distribution de courant est invariante par rapport à θ et z . Il en est de même pour le champ $\vec{B}_0(M)$ créé par la distribution $\vec{j}(M)$:

$$\vec{B}_0(M) = \vec{B}_0(r)$$

♦ **Symétrie de la distribution de courant :**

Tout plan contenant l'axe $Z'Z$ et partageant le cylindre de rayon r , parcouru par le courant réel, est un plan de symétrie (**P. Sym**) de la distribution de courant. On démontre (mathématiquement) qu'en tout point $M(r, \theta, z)$ appartenant à ce plan on a :

$$\vec{B}_0(M \in \text{P.Sym}) \perp \text{P.Sym}$$

En coordonnées cylindriques ces plans sont parallèles à la base (\vec{e}_z, \vec{e}_r) , donc $\vec{B}_0(M)$ est suivant le vecteur unitaire \vec{e}_θ :

$$\vec{B}_0(M) = B_0(M) \cdot \vec{e}_\theta$$

Nous concluons donc que le champ $\vec{B}_0(M)$ est orthoradial et son module ne dépend que de la coordonnée r du point $M(r, \theta, z)$, soit :

$$\vec{B}_0(M) = B_0(r) \cdot \vec{e}_\theta$$

En ce qui concerne les champs $\vec{B}_{\text{tot}}(M)$ et $\vec{H}_{\text{tot}}(M)$ on sait que :

- la distribution \vec{j} de courant réel crée le champ d'induction magnétique $\vec{B}_0(M) = B_0(r) \cdot \vec{e}_\theta$
- le champ $\vec{B}_0(M) = B_0(r) \cdot \vec{e}_\theta$ donne naissance à l'aimantation $\vec{J}(M) = J(r) \cdot \vec{e}_\theta$ de même forme que lui, car le milieu magnétique est parfait.
- une fois le milieu magnétique s'aimante, il crée un champ démagnétisant $\vec{B}_d(M) = B_d(r) \cdot \vec{e}_\theta$ de même forme.

Finalement on a :
$$\vec{B}_{\text{tot}}(M) = B_0(r) \cdot \vec{e}_\theta + B_d(r) \cdot \vec{e}_\theta = B_{\text{tot}}(r) \cdot \vec{e}_\theta$$

De même pour le champ d'excitation magnétique $\vec{H}_{\text{tot}}(M)$ on a :

$$\vec{H}_{\text{tot}}(M) = \frac{\vec{B}_{\text{tot}}(M)}{\mu_0 \mu_r} = \frac{B_{\text{tot}}(r) \cdot \vec{e}_\theta}{\mu_0 \mu_r} = H_{\text{tot}}(r) \cdot \vec{e}_\theta$$

Les lignes des champs $\vec{B}_{\text{tot}}(M)$ et $\vec{H}_{\text{tot}}(M)$ sont donc des cercles d'axe $Z'Z$ et de rayon r .

2) Expression de la densité volumique \vec{j} , du courant réel, en fonction de a , b et de l'intensité I du courant réel total qui circule dans le milieu aimanté :

Le courant réel circule dans le volume du milieu aimanté limité par les surfaces cylindriques S_2 de rayon b et S_1 de rayon a . On a :

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint_S j \vec{e}_z \cdot dS \vec{e}_z = \iint_S j \cdot dS = j \iint_S r \cdot dr \cdot d\theta = j \int_a^b r \cdot dr \int_0^{2\pi} d\theta = j\pi \cdot (b^2 - a^2)$$

Où $dS = r \cdot dr \cdot d\theta$ en coordonnées polaires

Soit :

$$\vec{j} = \frac{I}{\pi \cdot (b^2 - a^2)} \vec{e}_z$$

3) a-Expression de l'excitation magnétique $\vec{H}_{\text{tot}}(\mathbf{M})$:

On utilisera le théorème d'Ampère généralisé, donné par l'intégrale :

$$\oint_C \vec{H}_{\text{tot}}(\mathbf{M}) \cdot d\vec{\ell} = I_{\text{tot}}^{\text{réel}}$$

Puisque les lignes de champ magnétique sont des cercles, on choisit comme courbe fermée d'Ampère un cercle (C) de rayon r et d'axe $Z'Z$. Elle est représentée en pointillés sur la figure ci-dessous :

On calcule comme d'habitude, d'abord l'intégrale $\oint_C \vec{H}_{\text{tot}}(\mathbf{M}) \cdot d\vec{\ell}$.

En sachant qu'en tout point $\mathbf{M}(r, \theta, z)$ on a :

$$\begin{cases} \vec{H}_{\text{tot}}(\mathbf{M}) = H_{\text{tot}}(r) \cdot \vec{e}_\theta \\ d\vec{\ell} = dl \cdot \vec{e}_\theta = r \cdot d\theta \cdot \vec{e}_\theta \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

On peut donc écrire :

$$\oint_C \vec{H}_{\text{tot}}(\mathbf{M}) \cdot d\vec{\ell} = \oint_C H_{\text{tot}}(\mathbf{M}) \cdot dl = \oint_C H_{\text{tot}}(r) \cdot r \cdot d\theta = B_{\text{tot}}(r) \cdot r \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \cdot r H_{\text{tot}}(r)$$

Remarque : L'excitation magnétique $H_{\text{tot}}(r)$ ne dépend que de la coordonnée r du point \mathbf{M} , donc elle est constante en tout point \mathbf{M} du cercle (C) d'Ampère (cercle de rayon r fixe).

En résumé on a : $2\pi \cdot r H_{\text{tot}}(r) = I_{\text{tot}}^{\text{réel}}$

Soit :

$$\vec{H}_{\text{tot}}(r) = \frac{I_{\text{tot}}^{\text{réel}}}{2\pi \cdot r} \vec{e}_\theta$$

Il faut évaluer les intensités des courants réel $I_{\text{tot}}^{\text{réel}}$ et fictif $I_{\text{tot}}^{\text{fictif}}$, pour chaque région de l'espace :

♦ Si $r > b$: $I_{\text{tot}}^{\text{réel}} = I$; $\vec{H}_{\text{tot}}(\mathbf{M}) = \frac{I}{2\pi \cdot r} \vec{e}_\theta$

♦ Si $a < r < b$:

$$I_{\text{tot}}^{\text{réel}} = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint_S j \vec{e}_z \cdot dS \vec{e}_z = \iint_S j \cdot dS = j \cdot \iint_S dS = j\pi(r^2 - a^2) = \frac{I}{\pi(b^2 - a^2)} \pi(r^2 - a^2) = \frac{I(r^2 - a^2)}{b^2 - a^2}$$

Soit :

$$\vec{H}_{\text{tot}}(r) = \frac{(r^2 - a^2)I}{2\pi(b^2 - a^2)r} \vec{e}_\theta$$

♦ Si $r < a$: $I_{\text{tot}}^{\text{réel}} = 0$; $\vec{H}_{\text{tot}}(M) = \vec{0}$

b- Expression du champ d'induction magnétique $\vec{B}_{\text{tot}}(M)$:

♦ Si $r > b$: On est dans le vide ; $\mu_r = 1 \Rightarrow \vec{B}_{\text{tot}}(M) = \mu_0 \vec{H}_{\text{tot}}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi.r} \vec{e}_\theta$

♦ Si $a < r < b$: On est dans le milieu aimanté (MA) ; $\mu_r \neq 1$:

$$\vec{B}_{\text{tot}}(M) = \mu_0 \mu_r \vec{H}_{\text{tot}}(M) = \frac{\mu_0 \mu_r I (r^2 - a^2)}{2\pi(b^2 - a^2).r} \vec{e}_\theta$$

♦ Si $r < a$: On est dans un milieu non aimanté : $\mu_r = 1$

$$\vec{B}_{\text{tot}}(M) = \mu_0 \vec{H}_{\text{tot}}(M) = \vec{0} \quad (\text{car } \vec{H}_{\text{tot}}(M) = \vec{0}).$$

4) Expression du vecteur aimantation $\vec{J}(M)$ du milieu aimanté :

Le M.A. est parfait, donc l'aimantation est donnée par la relation :

$$\vec{J}(M) = (\mu_r - 1) \vec{H}_{\text{tot}}(r) = \frac{(\mu_r - 1)(r^2 - a^2).I}{2\pi(b^2 - a^2).r} \vec{e}_\theta$$

5) a- Densités du courant fictif d'aimantation :

♦ **Densité volumique du courant fictif :** $\vec{j}_a(M) = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{J}(M)$

D'après l'expression de $\vec{J}(M)$, question 4, on a :

$$\vec{J}(M) \begin{cases} J_r = 0 \\ J_\theta = \frac{(\mu_r - 1)(r^2 - a^2).I}{2\pi(b^2 - a^2).r} \\ J_z = 0 \end{cases} \quad (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$$

Donc :

$$\vec{j}_a(M) = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{J} = \frac{1}{r} \left(\frac{d(r.J_\theta)}{dr} \right) \cdot \vec{e}_z = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{(\mu_r - 1)(r^2 - a^2).I}{2\pi(b^2 - a^2).r} \right) \cdot \vec{e}_z = \frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi(b^2 - a^2).r} \frac{d(r^2 - a^2)}{dr} \cdot \vec{e}_z$$

soit :

$$\vec{j}_a(M) = \frac{(\mu_r - 1)I}{\pi(b^2 - a^2)} \cdot \vec{e}_z$$

♦ **Densités surfaciques du courant fictif :**

▪ **Au niveau de la surface latérale S_2 de rayon b :**

$$\vec{k}_{aS_2}(M \in S_2) = \vec{J}(M \in S_2) \wedge \vec{n}_{\text{ext}}(M \in S_2)$$

avec

$$\begin{cases} \vec{J}(M \in S_2) = \frac{(\mu_r - 1)(b^2 - a^2).I}{2\pi(b^2 - a^2).b} = \frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi.b} \vec{e}_\theta \\ \vec{n}_{\text{ext}}(M \in S_2) = \vec{e}_r \end{cases}$$

soit :

$$\vec{k}_{aS_2}(M) = \frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi.b} \vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_r = -\frac{(\mu_r - 1)I}{2\pi.b} \vec{e}_z$$

▪ Au niveau de la surface latérale S_1 de rayon a :

$$\vec{k}_{aS_1} (M \in S_1) = \vec{J}(M \in S_1) \wedge \vec{n}_{\text{ext}}(M \in S_1)$$

avec
$$\begin{cases} \vec{J}(M \in S_1) = \frac{(\mu_r - 1)(a^2 - a^2).I}{2\pi(b^2 - a^2).a} = \vec{0} \\ \vec{n}_{\text{ext}}(M \in S_1) = -\vec{e}_r \end{cases}$$

soit :
$$\vec{k}_{aS_1} (M) = \vec{0}$$

b- Intensités des courants fictifs, équivalents au milieu aimanté dans le vide :

♦ Intensité du courant volumique fictif :

$$I_v^{\text{fictif}} = \iint_S \vec{j}_a \cdot d\vec{S} = j_a \iint_S dS = j_a \cdot S = \frac{(\mu_r - 1).I}{\pi(b^2 - a^2)} \cdot \pi(b^2 - a^2) = (\mu_r - 1)I > 0$$

L'intensité I_v^{fictif} est positive. Le courant fictif volumique « circule du bas vers le haut ».

♦ Intensité du courant surfacique fictif au niveau de la surface latérale S_1 :

$$I_{S_1}^{\text{fictif}} = \int (\vec{k}_{aS_1} \cdot \vec{u}) \cdot dl = 0 \quad \text{car} \quad \vec{k}_{aS_1} = \vec{0}$$

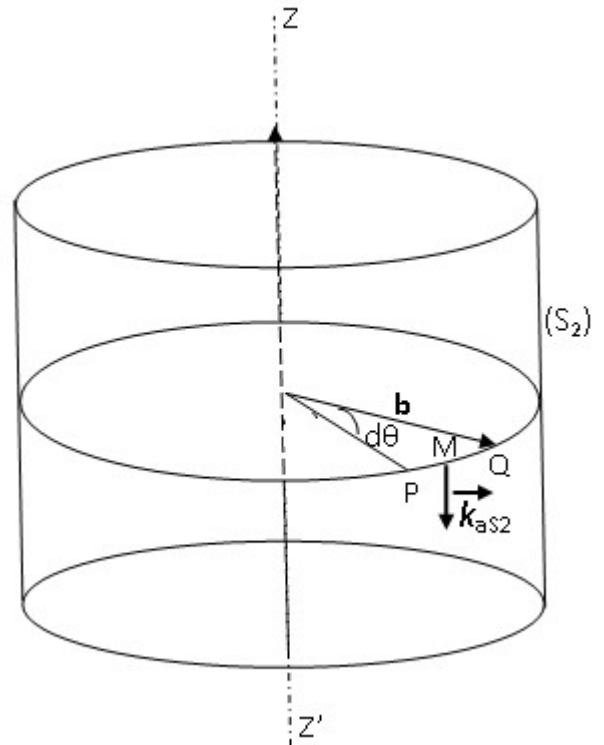
♦ Intensité du courant surfacique fictif au niveau de la surface latérale S_2 :

$$I_{S_2}^{\text{fictif}} = \int (\vec{k}_{aS_2} \cdot \vec{u}) \cdot dl$$

Où :
$$\begin{cases} \vec{k}_{aS_2} = -\frac{(\mu_r - 1).I}{2\pi.b} \vec{e}_z \\ dl = \text{longueur de l'arc PQ} = b.d\theta \\ \vec{u} = \vec{e}_z \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I_{S_2}^{\text{fictif}} &= \int \left(-\frac{(\mu_r - 1).I}{2\pi.b} \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z \right) \cdot dl = -\frac{(\mu_r - 1).I}{2\pi.b} \int_0^{2\pi} b.d\theta \\ &= -\frac{(\mu_r - 1).I}{2\pi.b} \cdot b \cdot 2\pi = -(\mu_r - 1)I < 0 \end{aligned}$$

L'intensité $I_{S_2}^{\text{fictif}}$ est négative. Le courant fictif surfacique « circule du haut vers le bas ».



Exercice 3 :

Matériau magnétique parfait (L,H,I) de forme sphérique de centre O , de rayon R et de perméabilité magnétique relative μ_r , ne contenant aucun courant réel, est soumis à un champ d'induction magnétique uniforme $\vec{B}_0 = B_0 \cdot \vec{e}_z$ parallèle à la direction OZ . Son aimantation induite est uniforme $\vec{J} = J \cdot \vec{e}_z$.

1) ♦ Densité volumique du courant fictif d'aimantation :

$$\vec{j}_a(M) = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{J}(M) = \vec{0} \quad \text{car } \vec{J} \text{ est uniforme.}$$

♦ Densité surfacique du courant fictif d'aimantation au niveau de la surface S du M.A. :

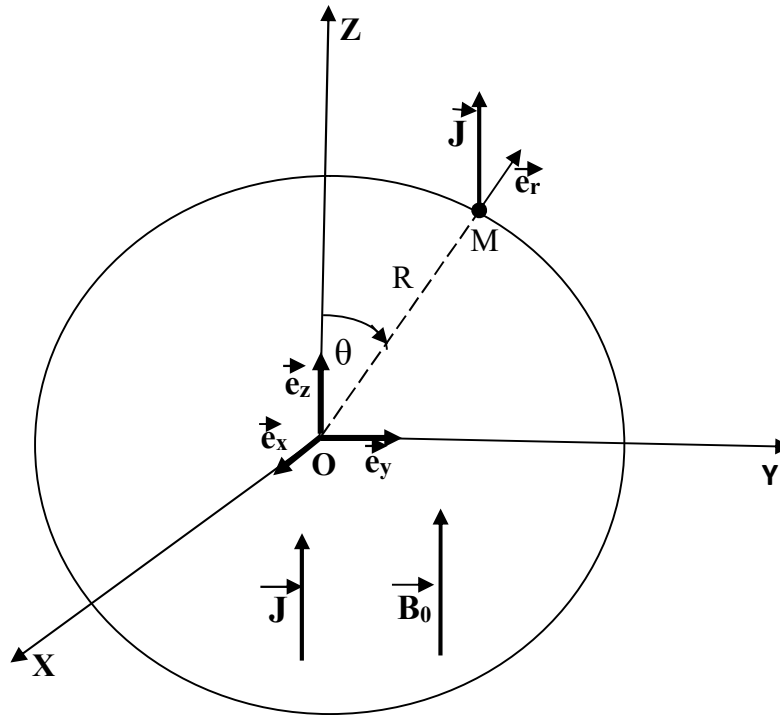
$$\vec{k}_{aS}(M \in S) = \vec{J}(M \in S) \wedge \vec{n}_{\text{ext}}(M \in S)$$

avec

$$\begin{cases} \vec{J}(M \in S) = J \cdot \vec{e}_z \\ \vec{n}_{\text{ext}}(M \in S) = \vec{e}_r \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\vec{k}_{aS}(M \in S) = J \cdot \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r$$



REMARQUE : Pour faciliter les calculs on exprimera le vecteur densité $\vec{k}_{aS}(M \in S)$ dans la base sphérique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$.

D'après la figure ci-haut, le vecteur unitaire \vec{e}_z de l'axe Z'Z est tel que :

$$\vec{e}_z = \cos \theta \cdot \vec{e}_r - \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta$$

Soit :

$$\begin{aligned} \vec{k}_{aS}(M \in S) &= J \cdot \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r \\ &= J(\cos \theta \cdot \vec{e}_r - \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta) \wedge \vec{e}_r \\ &= J \sin \theta \cdot \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

REMARQUE : Le vecteur densité surfacique $\vec{k}_{aS}(M \in S)$ est suivant le vecteur unitaire \vec{e}_φ de la base sphérique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$, donc le courant surfacique fictif correspondant forme une nappe de courant autour de l'axe Z'Z.

2) a-♦ Expression du champ démagnétisant \vec{B}_d^i en un point M à l'intérieur de la sphère aimantée (supposé uniforme) :

Pour calculer le champ \vec{B}_d^i on se basera sur les deux données suivantes :

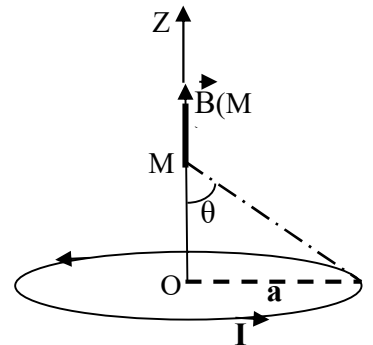
- Le courant surfacique fictif « circule » suivant la direction du vecteur unitaire \vec{e}_φ , donc il forme un courant fictif circulaire autour de l'axe $Z'Z$
- le champ démagnétisant \vec{B}_d^i est supposé uniforme à l'intérieur de la sphère magnétique, il serait plus facile de déterminer, alors, au centre O.

On utilisera donc, l'expression usuelle du champ d'induction magnétique créé par une spire circulaire, parcourue par un courant d'intensité I , en un point M de son axe $Z'Z$.

Rappel (voir cours d'Electricité 2, SMP-3)

Le champ d'induction magnétique créé par une spire circulaire, de rayon a , parcourue par un courant I , en un point M de son axe $Z'Z$ est donné par :

$$\vec{B}_{\text{spire}}(M) = \frac{\mu_0 I \sin^3 \theta}{2a} \cdot \vec{e}_z$$



Dans le cas de la sphère magnétique, le point M de l'axe est confondu avec le centre O.

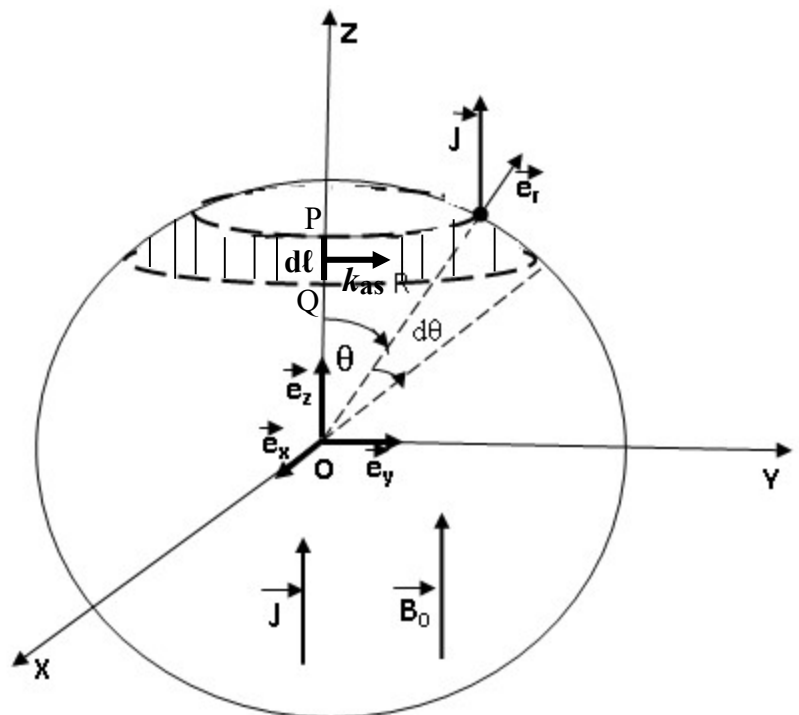
♦ Calcul du champ $\vec{B}_d^i(O)$:

On considère une couronne sphérique d'axe $Z'Z$, de rayon $a = R \sin \theta$ et de largeur $d\ell = R \cdot d\theta$, parcourue par un courant surfacique fictif d'intensité :

$$dI = (\vec{k}_{aS} \cdot \vec{u}) d\ell = k_{aS} d\ell = J \cdot R \sin \theta \cdot d\theta$$

Où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{k}_{aS} = J \sin \theta \cdot \vec{e}_\varphi \\ d\ell = \text{longueur de l'arc PQ} = R \cdot d\theta \\ \vec{u} = \vec{e}_\varphi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{array} \right.$$



Cette couronne sphérique élémentaire crée au centre O (point de son axe) un champ démagnétisant élémentaire tel que :

$$d\vec{B}_d^i(O) = \frac{\mu_0 dI \sin^3 \theta}{2a} = \frac{\mu_0 (J.R \sin \theta . d\theta) \sin^3 \theta}{2R \sin \theta} = \frac{\mu_0 J \sin^3 \theta . d\theta}{2} \vec{e}_z$$

L'induction démagnétisante créée, en O, par tout le milieu aimanté est :

$$\begin{aligned} \vec{B}_d^i(O) &= \left(\frac{\mu_0 J}{2} \int_0^\pi \sin^3 \theta . d\theta \right) \vec{e}_z = \left(\frac{\mu_0 J}{2} \int_0^\pi \sin \theta . \sin^2 \theta . d\theta \right) \vec{e}_z = \left(\frac{\mu_0 J}{2} \int_0^\pi \sin \theta . (1 - \cos^2 \theta) . d\theta \right) \vec{e}_z \\ &= \left(\frac{\mu_0 J}{2} \int_0^\pi [\sin \theta - \cos^2 \theta . \sin \theta] d\theta \right) \vec{e}_z = \frac{\mu_0 J}{2} \left[-\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^\pi \vec{e}_z \end{aligned}$$

$$\text{Soit :} \quad \vec{B}_d^i(O) = \frac{2}{3} \mu_0 J \vec{e}_z = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{J}$$

On voit bien que le champ d'induction démagnétisant est uniforme, donc il est le même en tout point à l'intérieur de la sphère magnétique : $\vec{B}_d^i = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{J}$

♦ Expression de l'excitation démagnétisante \vec{H}_d^i :

$$\text{On utilisera la relation générale :} \quad \vec{B}_d^i = \mu_0 (\vec{J} + \vec{H}_d^i)$$

$$\text{Soit :} \quad \vec{H}_d^i = \frac{\vec{B}_d^i}{\mu_0} - \vec{J} = \frac{2}{3} \vec{J} - \vec{J} = -\frac{\vec{J}}{3}$$

b-♦ Expressions de \vec{B}_{tot}^i et \vec{H}_{tot}^i et \vec{J} en fonction du champ appliqué \vec{B}_0 :

A l'intérieur du milieu on a :

$$\vec{B}_{\text{tot}}^i = \vec{B}_0 + \vec{B}_d^i = \vec{B}_0 + \frac{2}{3} \mu_0 \vec{J}$$

$$\vec{H}_{\text{tot}}^i = \vec{H}_d^i + \vec{H}_0 = -\frac{\vec{J}}{3} + \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$$

On doit exprimer le vecteur aimantation \vec{J} en fonction de \vec{B}_0 , puis le remplacer dans les expressions de \vec{B}_{tot}^i et \vec{H}_{tot}^i précédentes.

$$\text{Dans un milieu aimanté parfait on a :} \quad \vec{J} = \chi_m \vec{H}_{\text{tot}}^i = (\mu_r - 1) \vec{H}_{\text{tot}}^i$$

$$\text{En remplaçant } \vec{H}_{\text{tot}}^i \text{ par son expression } \vec{H}_{\text{tot}}^i = -\frac{\vec{J}}{3} + \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$$

$$\text{il vient :} \quad \vec{J} = (\mu_r - 1) \vec{H}_{\text{tot}}^i = (\mu_r - 1) \left(-\frac{\vec{J}}{3} + \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} \right)$$

$$\text{D'où l'expression de l'aimantation } \vec{J} \text{ en fonction de } \vec{B}_0 : \quad \vec{J} = \frac{3(\mu_r - 1)}{\mu_0(\mu_r + 2)} \vec{B}_0$$

En introduisant l'expression de \vec{J} dans celles de \vec{B}_{tot}^i et \vec{H}_{tot}^i , on obtient :

$$\vec{B}_{\text{tot}}^i = \vec{B}_0 + \frac{2}{3} \mu_0 \vec{J} = \vec{B}_0 + \frac{2(\mu_r - 1)}{\mu_r + 2} \vec{B}_0 \Rightarrow \vec{B}_{\text{tot}}^i = \frac{3\mu_r}{\mu_r + 2} \vec{B}_0$$

$$\vec{H}_{\text{tot}}^i = \frac{\vec{B}_{\text{tot}}^i}{\mu_0 \mu_r} = \frac{\vec{J}}{\mu_r - 1} = \frac{3}{\mu_0(\mu_r + 2)} \vec{B}_0$$

Ces trois relations montrent que si le champ appliqué \vec{B}_0 disparaît, l'aimantation s'annule instantanément et le milieu magnétique devient inactif.

3) Expressions du champ d'induction \vec{B}_{tot}^e et de l'excitation magnétique \vec{H}_{tot}^e à l'extérieur de la sphère :

On admet que la sphère aimantée est équivalente à un dipôle magnétique, de moment magnétique $\vec{m} = \frac{4}{3} \pi R^3 \vec{J}$, situé en son centre O.

Rappel : Champ d'induction magnétique créé par un dipôle magnétique en un point M de l'espace :

$$\vec{B}_{\text{dip}}(M) = \begin{cases} B_r = \frac{2\mu_0 m \cos \theta}{4\pi r^3} \\ B_\theta = \frac{\mu_0 m \sin \theta}{4\pi r^3} \\ B_\varphi = 0 \end{cases} \quad (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$$

Dans le cas de la sphère aimantée qui devient équivalente à un dipôle magnétique de moment $\vec{m} = m \cdot \vec{e}_z$, parallèle à l'axe Z'Z :

$$\begin{cases} \vec{B}_{\text{tot}}^e(M) = B_0 \cdot \vec{e}_z + \frac{2\mu_0 m \cos \theta}{4\pi r^3} \vec{e}_r + \frac{\mu_0 m \sin \theta}{4\pi r^3} \vec{e}_\theta \\ \vec{H}_{\text{tot}}^e(M) = \frac{\vec{B}_{\text{tot}}^e(M)}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \left(B_0 \cdot \vec{e}_z + \frac{2\mu_0 m \cos \theta}{4\pi r^3} \vec{e}_r + \frac{\mu_0 m \sin \theta}{4\pi r^3} \vec{e}_\theta \right) \end{cases}$$

REMARQUE :

On peut également exprimer \vec{B}_{tot}^e et \vec{H}_{tot}^e dans la base sphérique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$. Il suffit d'exprimer \vec{B}_0 dans la cette base, soit :

$$\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z = B_0 (\cos \theta \cdot \vec{e}_r - \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta)$$

Les expressions des champs $\vec{B}_{\text{tot}}^e(M)$ et $\vec{H}_{\text{tot}}^e(M)$ s'écrivent :

$$\begin{cases} \vec{B}_{\text{tot}}^e(M) = \left(B_0 + \frac{2\mu_0 m}{4\pi r^3} \right) \cos \theta \cdot \vec{e}_r + \left(-B_0 + \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \right) \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta \\ \vec{H}_{\text{tot}}^e(M) = \frac{\vec{B}_{\text{tot}}^e(M)}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \left(B_0 + \frac{2\mu_0 m}{4\pi r^3} \right) \cos \theta \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{\mu_0} \left(-B_0 + \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \right) \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta \end{cases}$$

4) Energie magnétique W_m emmagasinée dans la sphère aimantée :

Dans le cas d'un milieu aimanté parfait, la densité volumique d'énergie magnétique est donnée par :

$$\omega_m = \frac{1}{2\mu_0\mu_r} \left(B_{\text{tot}}^i(M) \right)^2 = \frac{9}{2} \frac{\mu_r}{\mu_0(\mu_r + 2)^2} B_0^2$$

L'énergie magnétique emmagasinée dans le volume magnétique est :

$$W_m = \iiint_v \omega_m \cdot dv = \frac{1}{2\mu_0\mu_r} \left(B_{\text{tot}}^i(M) \right)^2 = \frac{9}{2} \frac{\mu_r}{\mu_0(\mu_r + 2)^2} B_0^2 \iiint_v dv = \frac{9}{2} \frac{\mu_r}{\mu_0(\mu_r + 2)^2} B_0^2 \cdot \frac{4}{3} \pi R^3$$

soit :

$$W_m = \frac{9}{2} \frac{6\pi R^3 \mu_r}{\mu_0(\mu_r + 2)^2} B_0^2$$

Exercice 4 :

Cycle d'hystérésis d'un matériau ferromagnétique possède un cycle d'hystérésis d'équation :

$$B = (a + b H_m) H + b (H_m^2 - H^2) \quad \text{pour une branche du cycle} \quad (1)$$

$$B = (a + b H_m) H - b (H_m^2 - H^2) \quad \text{pour l'autre branche} \quad (2)$$

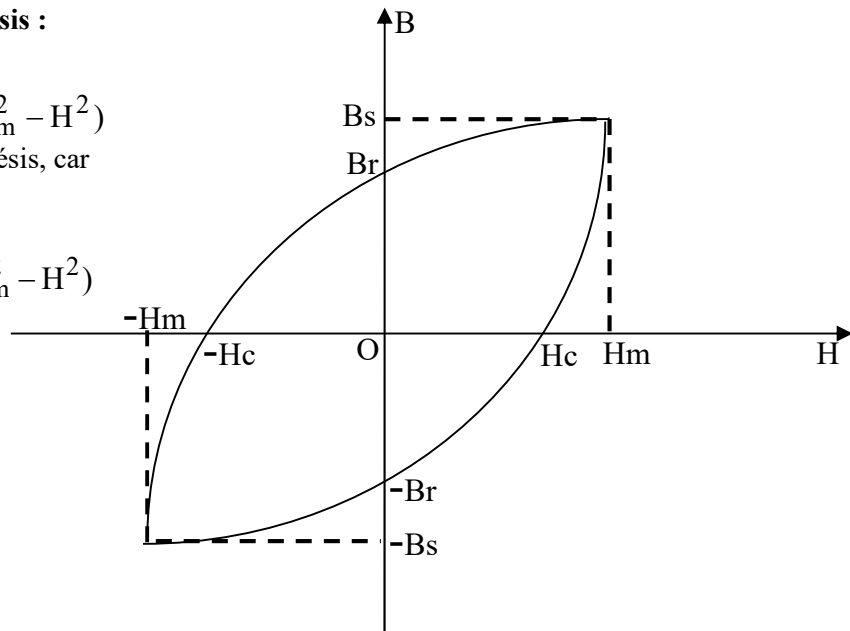
où a et b sont des constantes.

1) Représentation du cycle d'hystérésis :

On peut remarquer que :

♦ l'équation $B = (a + b H_m) H + b (H_m^2 - H^2)$ décrit l'arc supérieur du cycle d'hystérésis, car pour $H = 0$; $B = b H_m^2 > 0$,

♦ l'équation $B = (a + b H_m) H - b (H_m^2 - H^2)$ décrit l'arc inférieur du cycle d'hystérésis, car pour $H = 0$; $B = -b H_m^2 < 0$.



2) **Expression du champ rémanent B_r :**

$$B_r \text{ correspond à } H = 0, \text{ soit : } B_r = b H_m^2$$

3) **Expression de l'excitation magnétique coercitive H_c :**

$$H_c \text{ correspond à } B = 0.$$

Pour déterminer H_c on peut considérer l'une ou l'autre branche du cycle. En considérant, par exemple la branche supérieure, on doit résoudre l'équation de second degré ci-dessous, dont l'inconnu est H_c :

$$(a + b H_m) H_c + b (H_m^2 - H_c^2) = 0$$

Cette équation peut se mettre sous la forme traditionnelle des équations de second degré comme suit :

$$-b H_c^2 + (a + b H_m) H_c + b H_m^2 = 0$$

Le discriminant Δ de l'équation s'écrit :

$$\Delta = (a + b H_m)^2 + 4b^2 H_m^2 = 0$$

L'équation admet donc deux solutions $H_{c(1)}$ et $H_{c(2)}$ telles que :

$$\begin{cases} H_{c(1)} = \frac{-(a + b H_m) - \sqrt{(a + b H_m)^2 + 4b^2 H_m^2}}{-2b} > 0 \\ \text{et} \\ H_{c(2)} = \frac{-(a + b H_m) + \sqrt{(a + b H_m)^2 + 4b^2 H_m^2}}{-2b} < 0 \end{cases}$$

Puisqu'on a utilisé l'équation de la branche supérieure, la solution à retenir est celle qui correspond à $H_c < 0$; soit :

$$H_c = H_{c(2)} = \frac{-(a + b H_m) + \sqrt{(a + b H_m)^2 + 4b^2 H_m^2}}{-2b}$$

4) **Expression de la perméabilité magnétique instantanée $\mu = \frac{dB}{dH}$:**

♦ Pour la branche supérieure : $\mu = \frac{dB}{dH} = a + b H_m - 2bH$

♦ Pour la branche inférieure : $\mu = \frac{dB}{dH} = a + b H_m + 2bH$

On peut bien noter que pour les milieux magnétiques qui ne sont pas parfaits la perméabilité magnétique dépend de H.

5) **Energie magnétique perdue au cours d'un cycle d'hystérésis :**

L'énergie magnétique perdue au cours d'un cycle est donnée par :

$$W_m = a.V$$

Où $a = \int H.dB$ est l'aire du cycle d'hystérésis en coordonnées (B,H), V est le volume du matériau magnétique.

Etant donné qu'on ne connaît pas le volume du matériau ferromagnétique, on ne peut exprimer que l'énergie magnétique perdue par unité de volume dite aussi énergie volumique, soit :

$$\omega_m = \frac{W_m}{V} = a = \int H \cdot dB$$

$$\begin{aligned} \omega_m &= \int_{H_m}^{-H_m} [(a + b H_m) H - 2b H^2] dH + \int_{-H_m}^{H_m} [(a + b H_m) H - 2b H^2] dH \\ &= \left[(a + b H_m) \frac{H^2}{2} - \frac{2bH^3}{3} \right]_{H_m}^{-H_m} + \left[(a + b H_m) \frac{H^2}{2} + \frac{2bH^3}{3} \right]_{-H_m}^{H_m} \\ &= \frac{8bH_m^3}{3} \end{aligned}$$
