Correction de la série de TD n°2

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = \dfrac{x}{1+y}$, $y(0) = 0$. (Équations à variables séparées)
2. $y' + \dfrac{1}{x} y = -y^2 \ln x$, $y(1) = 1$. (Équations de Bernoulli)
3. Considérons l'équation de Ricatti (*): $y' + xy^2 = \dfrac{-1}{x^3}$.
   a) Vérifier que $y_0 = \dfrac{1}{x^2}$ est une solution particulière sur $I =]0, +\infty[$.
   b) Résoudre (*) sur I par le changement de fonction inconnue $y = y_0 + \dfrac{1}{Y}$.

Solution. 1. Posons $f(t) = (1+t)^2$. L'équation se réécrit en

$$y' f'(y) = 2x.$$

On intègre et on trouve qu'une solution de l'équation différentielle s'écrit

$$(1+y)^2 = x^2 + C, C \in \mathbb{R}$$

On résoud cette équation et on trouve

$$y(x) = -1 \pm \sqrt{x^2 + C}.$$

La condition $y(0) = 0$ impose que l'on prenne le signe positif, et l'on a alors $C = 1$. La solution de l'équation est la fonction

$$y(x) = -1 + \sqrt{x^2 + 1}.$$

2. On pose $z = y^{-1}$, d'où $y' = -z' y^2$. Après simplifications, l'équation différentielle devient

$$z' - \frac{1}{x} z = \ln x$$

L'équation homogène admet pour ensemble de solutions les fonctions de la forme $x \mapsto Cx, C \in \mathbb{R}$ - On recherche une solution particulière par la méthode de variation des constantes, posant $z(x) = C(x)x$. On trouve $C'(x) = \frac{\ln x}{x}$ et donc on obtient

$$z(x) = \frac{1}{2} x \ln^2 x + Cx$$

Revenant à y, et utilisant la condition initiale $y(1) = 1$, on trouve finalement que

$$y(x) = \frac{1}{x\left(\frac{1}{2}\ln^2 x + 1\right)}, x > 0$$

3.)a) on vérifie que y_0 est une solution particulière de (*) sur $]0,+\infty[$ en calculant la dérivée première de $y_0' = \dfrac{-2}{x^3}$ et en reportant dans l'équation (*).
b) Posons sur I, $y = y_0 + \dfrac{1}{Y}$ donc

$$y' = \frac{-2}{x^3} - \frac{Y'}{Y^2}$$

L'équation (*) devient linéaire: $\quad Y' - \dfrac{2}{x}Y = x.$
L'équation homogène associée à cette équation admet comme solution générale: $Y(x) = cx^2$.
La constante c rendue variable vérifie $c'(x) = \dfrac{1}{x}$ d'où

$$c(x) = \ln x.$$

par suite Y est définie sur I par

$$Y = x^2(\ln x + c)$$

donc les solutions de (*) sur I sont définies par

$$y(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2(\ln x + c)}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + y = \dfrac{1}{1+e^x}$ sur $\mathbb{R}$;
2. $(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$ sur $]-1,+\infty[$;
3. $y' - \dfrac{2}{t}y = t^2$ sur $]0,+\infty[$.

Solution. 1. On commence par résoudre l'équation homogène $y' + y = 0$ dont la solution générale est $y(x) = \lambda e^{-x}$. On cherche une solution particulière sous la forme $y(x) = \lambda(x)e^{-x}$. La méthode de variation de la constante donne :

$$\lambda'(x)e^{-x} = \frac{1}{1+e^x} \implies \lambda'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}.$$

Une solution particulière est donc donné par $y(x) = \ln(1+e^x)e^{-x}$. Finalement, la solution générale de l'équation avec second membre est donnée par

$$x \mapsto \ln(1+e^x)e^{-x} + \lambda e^{-x}.$$

2. On commence par résoudre l'équation homogène $(1+x)y' + y = 0$, dont la solution générale est donnée par $y(x) = \dfrac{\lambda}{1+x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche une solution

particulière par la méthode de variation de la constante, en posant $y(x) = \dfrac{\lambda(x)}{1+x}$. On obtient

$$\lambda'(x) = 1 + \ln(1+x).$$

Une primitive est donnée par $\lambda(x) = (1+x)\ln(1+x)$, et la solution générale de l'équation avec second membre est donc donnée par

$$x \mapsto \frac{\lambda}{1+x} + \ln(1+x).$$

3. On commence par résoudre l'équation homogène $y' - \dfrac{2}{t}y = 0$. On trouve que les solutions sont les fonctions de la forme $y(t) = \lambda t^2$. On cherche une solution particulière par la méthode de variation de la constante en posant $y(t) = \lambda(t)t^2$. L'équation devient :

$$t^2 = y'(t) - \frac{2}{t}y(t) = \lambda'(t)t^2.$$

Dès lors, $\lambda'(t) = 1$ soit $\lambda(t) = t + C$. Finalement, les solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation de départ sont les fonctions

$$t \mapsto t^3 + Ct^2.$$

Exercice 3. Résoudre les équations différentielles suivantes :

(a) $y'' + y' - 2y = 1 + e^{2x} + 2e^x$;

(b) $y'' - 2y' + 2y = x^2 + x$;

(c) $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x}$;

(d) $y'' - 4y' + 4y = \cos(2x)$;

(e) $y'' + 4y = -e^{2x}$;

(f) $y'' + 4y = \cos(2x)$;

(g) $y'' + y' + y = e^x + \sin(x)$;

(h) $y'' + y = \cos(x) + \sin(x)$;

(i) $y'' - 2y' + y = e^x \sin(x)$.

Solution. (a) ($\star$) Résolution de l'équation homogène associée : $y'' + y' - 2y = 0$. L'équation caractéristique associée est : $r^2 + r - 2 = 0$ dont le discriminant est $\Delta = 3^2$ et les deux solutions réels sont $r_1 = -2$ et $r_2 = 1$. Alors toute solution de l'équation homogène est de la forme : $y_h(x) = \lambda e^x + \mu e^{-2x}$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$.

($\star\star$ 1) Recherche d'une solution particulière de l'équation : (a1) $y'' + y' - 2y = 1 = e^0 \times x^0$. Comme 0, n'est pas une solution de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution sous la forme $y_p(x) = e^0 \times x^0 \times a$ avec $a \in \mathbb{R}$. En remplaçant dans l'équation (a1), on trouve que $a = -\dfrac{1}{2}$.
($\star\star$ 2) De la même façons, cherchons une solution particulière de l'équation :
(a2) $y'' + y' - 2y = e^{2x} = e^{2x} \times x^0$. Puisque 2, n'est pas une solution de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution sous la forme $y_p(x) = e^{2x} \times x^0 \times b$ avec $b \in \mathbb{R}$. En remplaçant dans l'équation (a2), on obtient que $b = \dfrac{1}{4}$

($\star\star$3) Cette fois, on considère l'équation :
(a3) $y'' + y' - 2y = 2e^x = e^x \times 2x^0$. Puisque 1 est une solution de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution sous la forme $y_p(x) = e^{2x} \times x^1 \times c$ avec $c \in \mathbb{R}$. Comme $y_p(x)$ est solution de $(a3)$, alors $3ce^x = 2e^x$. D'où $c = \dfrac{2}{3}$.
($\star\star\star$) Finalement et d'après le principe de superposition, la solution générale est

$$y(x) = \lambda e^x + \mu e^{-2x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{2}{3}xe^x, (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$$

(b) ($\star$) Résolution de l'équation homogène associée : $y'' - 2y' + 2y = 0$. L'équation caractéristique associée est : $r^2 - 2r + 2 = 0$ dont le discriminant est $\Delta = -4$ et les deux solutions complexes conjuguées sont $r_1 = 1 + i$ et $r_2 = 1 - i$. Ainsi la solution générale de l'équation homogène est :

$$y_h(x) = (A\cos(x) + B\sin(x))e^x$$

avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ constantes.
($\star\star$) Recherche d'une solution particulière : on cherche une solution sous la forme d'un polynôme de degré 2 , soit $y_p(x) = ax^2 + bx + c$. En remplaçant dans l'équation (b), on trouve que $2ax^2 + (2b - 4a)x + 2a - 2b + 2c = x^2 + x$. Par identification, on obtient $a = \dfrac{1}{2}, b = \dfrac{3}{2}$ et $c = 1$.
($\star\star\star$) Conclusion : la solution générale est

$$y(x) = (A\cos(x) + B\sin(x))e^x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 1,$$

avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
(c) ($\star$) L'équation homogène associée : $y'' - 4y' + 4y = 0$. L'équation caractéristique associée est : $r^2 - 4r + 4 = 0$ dont le discriminant est $\Delta = 0$ et 2 est sa solution double. Ce qui implique que la solution générale de l'équation homogène est :

$$y_h(x) = (\lambda x + \mu)e^{2x},$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
($\star\star$) Recherche d'une solution particulière : on cherche une solution sous la forme $y_p(x) = e^{2x} \times x^2 \times \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, car 2 est la solution double de l'équation caractéristique . En remplaçant dans l'équation (c), on trouve que $2\alpha e^{2x} = -e^{2x}$. Donc $\alpha = -\dfrac{1}{2}$.
($\star\star\star$) Conclusion : la solution générale est

$$y(x) = (\lambda x + \mu)e^{2x} - \frac{1}{2}x^2e^{2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

(d) $S = \left\{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{2x} - \frac{1}{8}\sin(2x), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$,
(e) $S = \left\{x \mapsto \lambda\cos(2x) + \mu + \sin(2x) - \frac{e^{2x}}{8}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$,
(f) $S = \left\{x \mapsto \lambda\cos(2x) + \mu + \sin(2x) + \frac{1}{4}x\sin(2x), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$,
(g) $S = \left\{x \mapsto \left(\lambda\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \mu\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)e^{-x/2} + \frac{e^x}{3} - \cos(x),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$,
(h) $S = \left\{x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) - \frac{x}{2}\cos(x) + \frac{x}{2}\sin(x), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$,
(i) $S = \{x \mapsto (\lambda + \mu x)e^x - e^x\sin(x), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$

Exercice 4. 1. Montrer que la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

est convergente (pour $n \geq 2$), et calculer sa somme.

2. Étudier la convergence de la série de terme général

a) $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}; n > 0,$

b) $u_n = \dfrac{e^n}{n^2+2}; \quad n \geq 0,$

c) $u_n = \dfrac{\sqrt{n}+\cos(n)}{3+n^2}; n \geq 0,$

d) $u_n = \left(\dfrac{n-1}{2n+1}\right)^n; n \geq 0,$

e) $u_n = \dfrac{3^n}{n!}; \quad n \geq 0,$

f) $u_n = -\dfrac{1}{n} + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}; \quad n \geq 0.$

Solution. 1.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{2}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} + \sum_{k=3}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}} \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}. \end{aligned}$$

On prouve donc que la série converge, et que sa somme est $1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

2. a) On utilise le critère de comparaison des séries à termes positifs:

$$0 \leq u_n = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{n+1-n}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \leq \frac{1}{n^{3/2}}.$$

La série de Riemann $\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge, car $3/2 > 1$. On en déduit que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

b) On a $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\dfrac{e^n}{n^2+2} = +\infty \neq 0$, donc la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

c) On a $u_n \geq 0$ et $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{3/2}}$. Par le critère d'équivalence et puisque la série de Riemann $\sum_{n\geq 0}\dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge, car $3/2 > 1$, on trouve que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

d) Pour $n \geq 1$, $u_n \geq 0$ et $\sqrt[n]{u_n} = \dfrac{n-1}{2n+1} \longrightarrow \dfrac{1}{2} < 1$ quand $n \longrightarrow +\infty$. Alors la règle de Cauchy implique que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

e) On a $u_n \geq 0$ et $\dfrac{u_n}{u_{n+1}} = \dfrac{3}{n}$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = 0$, d'après la règle d'Alembert, la série est convergente.

f) $u_n = -\dfrac{1}{n} + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. La série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge (série harmonique) et la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ vérifie le critère sur les séries alternées, donc converge et par conséquent la série $\sum u_n$ diverge.

<u>Exercice</u> 5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence de la série numérique de Bertrand

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}.$$

En utilisant le critère de comparaison avec une intégrale.

Solution. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Nous cherchons une fonction continue, positive et décroissante $f(x)$ telle que $f(n) = \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$ pour tout $n \geq 2$. Nous pouvons prendre $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}$ pour $x \geq 2$. Cette fonction vérifie les conditions nécessaires pour le critère de comparaison par une intégrale.

Nous avons alors $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)dx$ et $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}dx$ sont de même nature. En posant $u = \ln x$, on obtient :

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}dx = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{u^{\alpha}}du.$$

C'est un intégrale de Riemann, qui converge si et seulement si $\alpha > 1$. En conclusion, la série numérique de Bertrand converge également si et seulement si $\alpha > 1$.

<u>Exercice</u> 6 (facultatif)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = n^{-1} + \ln n - \ln(n+1)$ et $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln n$.

1. Donner la nature des séries numériques $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.

2. Montrer que $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

3. Déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite ℓ.

Solution. 1. Au voisinage de $+\infty$ on a $\dfrac{1}{n(n+1)} \sim \dfrac{1}{n^2}$. Le critère de Riemann donne que la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ aussi. Le critère de Riemann donne que la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

2. On remarque que

$$u_n = \frac{1}{n} + \ln n - \ln(n+1) = \frac{1}{n} - [\ln t]_n^{n+1} = \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t$$

De la décroissance de la fonction $t \mapsto t^{-1}$ (entre n et $n+1$), on déduit que

$$\frac{1}{n} \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t \geq \frac{1}{n+1}, \qquad \text{donc que} \qquad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

3. Puisque la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente (Question 1), la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente, c'est-à-dire qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que:

$$\begin{aligned}
\ell = \sum_{n=1}^{\infty} u_n &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k \\
&= \lim_{n\to\infty} \left((1 + \ln 1 - \ln 2) + \left(\frac{1}{2} + \ln 2 - \ln 3\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} + \ln n - \ln(n+1)\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n + \ln \frac{n}{n+1}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} a_n
\end{aligned}$$

On voit donc que la limite de la dernière expression existe et coïncide avec la somme de la série $\sum u_n$.