Série de TD n°2

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = \dfrac{x}{1+y}$, $y(0) = 0$. (Équations à variables séparées)
2. $y' + \dfrac{1}{x}y = -y^2 \ln x$, $y(1) = 1$. (Équations de Bernoulli)
3. Considérons l'équation de Ricatti (*): $\quad y' + xy^2 = \dfrac{-1}{x^3}$.
   a) Vérifier que $y_0 = \dfrac{1}{x^2}$ est une solution particulière sur $I =]0, +\infty[$.
   b) Résoudre (*) sur I par le changement de fonction inconnue $y = y_0 + \dfrac{1}{Y}$.

Exercice 2. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + y = \dfrac{1}{1+e^x}$ sur $\mathbb{R}$;
2. $(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$ sur $]-1, +\infty[$;
3. $y' - \dfrac{2}{t}y = t^2$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 3. Résoudre les équations différentielles suivantes :

(a) $y'' + y' - 2y = 1 + e^{2x} + 2e^x$;

(b) $y'' - 2y' + 2y = x^2 + x$;

(c) $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x}$;

(d) $y'' - 4y' + 4y = \cos(2x)$;

(e) $y'' + 4y = -e^{2x}$;

(f) $y'' + 4y = \cos(2x)$;

(g) $y'' + y' + y = e^x + \sin(x)$;

(h) $y'' + y = \cos(x) + \sin(x)$;

(i) $y'' - 2y' + y = e^x \sin(x)$.

Exercice 4.

1. Montrer que la série de terme général
$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$
est convergente (pour $n \geq 2$), et calculer sa somme.
2. Étudier la convergence de la série de terme général

a) $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}; n > 0,$

b) $u_n = \dfrac{e^n}{n^2+2}; \quad n \geq 0,$

c) $u_n = \dfrac{\sqrt{n}+\cos(n)}{3+n^2}; n \geq 0,$

d) $u_n = \left(\dfrac{n-1}{2n+1}\right)^n; n \geq 0,$

e) $u_n = \dfrac{3^n}{n!}; \quad n \geq 0,$

f) $u_n = -\dfrac{1}{n} + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}; \quad n \geq 0.$

<u>Exercice</u> 5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence des séries de Bertrand

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}.$$

En utilisant le critère de comparaison avec une intégrale.

<u>Exercice</u> 6 (facultatif)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = n^{-1} + \ln n - \ln(n+1)$ et $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln n$.

1. Donner la nature des séries numériques $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.

2. Montrer que $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

3. Déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite ℓ.