Université Moulay Ismaïl

Faculté des Sciences et Techniques

Département de Mathématiques

Master en Sciences et Techniques

Mathématiques Appliquées et Épidémiologie (MAE)

Module : M13

===

DEGRÉ TOPOLOGIQUE

===

S. M. DOUIRI

Année universitaire : 2022-2023

Université Moulay Ismaïl

Faculté des Sciences et Techniques

Département de Mathématiques

Master en Sciences et Techniques

Mathématiques Appliquées et Épidémiologie (MAE)

Module : M13

==

DEGRÉ TOPOLOGIQUE

==

S. M. DOUIRI

Année universitaire : 2022-2023

Table des matières

Introduction

On s'intéresse à l'équation

$$f(x) = b, \tag{0.0.1}$$

où $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ est une fonction au moins continue sur $\overline{\Omega}$, Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $b \in \mathbb{R}^N$. Comment peut-on affirmer l'existence d'une solution à cette équation ?

Dans le cas particulier de la dimension $N = 1$, le théorème des valeurs intermédiaires répond à cette question. Par exemple, si $\Omega =]r_1, r_2[$ et $f \in \mathcal{C}([r_1, r_2])$ tels qu'il existe $x_1,\ x_2 \in [r_1, r_2]$ vérifiant $(f(x_1) - b)(f(x_2) - b) < 0$, alors ce théorème assure l'existence d'un certain réel x_0 entre x_1 et x_2 tel que $f(x_0) = b$.

Pour une dimension plus élevé $N > 1$, si f est linéaire, on calcule le déterminant de f et lorsque $\det(f) \neq 0$, la solution de l'équation (0.0.1) existe et elle sera unique. Ici, on parle d'une condition suffisante mais pas nécessaire, c'est-à-dire, notre équation peut admettre des solutions même si $\det(f) = 0$. Dans ce cas, on peut constater que ces solutions ne sont pas stables. Une perturbation de la donnée b peut changer totalement les solutions ou les faire disparaitre.

Notre objectif est de développer un outil jouant, pour les applications non linéaires, ce rôle du déterminant pour les applications linéaires. cet outil est le "**degré**" qui un réel indiquant par sa non-nullité que l'équation (0.0.1) a au moins une solution et qui est, de plus, une solution stable.

Chapitre 1

Rappel et préliminaires

1.1 Outils de base

1.1.1 Certains résultats d'analyse fonctionnelle

Définition 1.1.1. *Soit f une fonction continue définie sur $\mathbb{R}^N$ $(N \in \mathbb{N}^*)$. On appelle **support de** f et on note supp(f), l'ensemble des points adhérents à $A = \{x \in \mathbb{R}^N : f(x) \neq 0\}$. Ainsi,*

$$\mathit{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^N : f(x) \neq 0\}}.$$

Autrement dit, supp(f) est le complémentaire du plus grand ouvert de $\mathbb{R}^N$ sur lequel $f = 0$.

Remarques 1.1.2.

1. Pour une fonction mesurable, on a $\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^N : f(x) \neq 0 \ \text{ p.p.}\}}$. C'est le complémentaire du plus grand ouvert de $\mathbb{R}^N$ sur lequel $f = 0$ p.p..
2. $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$, noté aussi par $\mathfrak{D}(\Omega)$, est l'espace de fonctions indéfiniment dérivables à support compact dans Ω.

Théorème 1.1.3. "***Théorème d'Ascoli-Arzela***" *Soient K un espace compact et F un espace normé. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Une partie $\mathscr{A}$ de $\mathscr{C}(K, F)$ est relativement compacte (c'est-à-dire, d'adhérence compacte) pour la topologie de la convergence uniforme ;*
2.
   - *L'ensemble $\mathscr{A}$ est équicontinu, c'est-à-dire, pour tout $x \in K$, on a*

     $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall f \in \mathscr{A},\ \forall x' \in K,\ \text{on a } \|x - x'\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(x')\| < \varepsilon.$$

   - *$\mathscr{A}(x) = \{f(x) \mid f \in \mathscr{A}\}$ est relativement compacte pour tout $x \in K$.*

Théorème 1.1.4. *"**Inégalité de Cauchy-Schwarz**" Soit H un espace préhilbertien. Alors, pour tous $x,\ y \in H$, on a*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|.\|y\|,$$

avec égalité si, et seulement si, x et y sont liés.

Théorème 1.1.5. *"**Inégalité de Hölder**"*
Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $1 \leq p \leq \infty$ et p' l'exposant conjugué de p, c'est-à-dire, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Si $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$, alors $f\,g \in L^1(\Omega)$ et on a

$$\|f\,g\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}.\|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

1.1.2 Spectre d'un opérateur compact

Soient E et F deux espaces de Banach. $\mathscr{L}(E, F)$ désigne l'espace des opérateurs linéaires continus de E dans F.

Définition 1.1.6. *On dit qu'un opérateur $T \in \mathscr{L}(E, F)$ est compact si $T(B_E)$ est relativement compact pour la topologie forte de F, où B_E est la boule unité fermée de E. Il est équivalent de dire que l'image par T de toute partie bornée B de E est relativement compact dans F, c'est-à-dire, $\overline{T(B)}$ est compact.*

Pratiquement, il suffit de montrer que pour toute suite bornée $(x_n)_{n\geq 1}$ de E, on peut extraire de $(Tx_n)_{n\geq 1}$ une sous-suite convergente dans F.

- ★ Rappelons que $E \hookrightarrow F$ signifie **l'injection continue** de E dans F, c'est-à-dire, E est un sous-espace de F et l'identité $I : E \longrightarrow F$ est continue. Autrement dit, il existe $M > 0$ tel que $\|x\|_F \leq M\,\|x\|_E,\ \forall x \in E$.
- ★ On parle aussi de **l'injection compacte**, notée $E \hookrightarrow\hookrightarrow F$ et qui signifie que l'identité $I : E \longrightarrow F$ est compacte.

Remarques 1.1.7.

1. L'espace des opérateurs compacts, noté $\mathscr{K}(E, F)$, est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathscr{L}(E, F)$.
2. Si $E = F$, on note $\mathscr{L}(E, E)$ par $\mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{K}(E, E)$ par $\mathscr{K}(E)$.
3. Si $T \in \mathscr{L}(E, F)$ et $S \in \mathscr{K}(E, F)$ (resp. $T \in \mathscr{K}(E, F)$ et $S \in \mathscr{L}(E, F)$), alors $S \circ T \in \mathscr{K}(E, F)$.

Définitions 1.1.8. *Soit $T \in \mathscr{L}(E)$. I est l'identité de E vers E.*

1. *L'ensemble résolvant $\rho(T)$ est la partie de $\mathbb{R}$ définie par*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} \ \mid \ T - \lambda I \text{ est bijectif de } E \text{ vers } E\}.$$

2. *Le spectre de T, noté $\sigma(T)$, est le complémentaire de l'ensemble résolvant, c'est-à-dire,*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} \ \mid \ T - \lambda I \ \text{n'est pas inversible}\}.$$

3. *On dit que λ est une valeur propre de T, et on note $\lambda \in \mathcal{VP}(T)$ si $Ker(T-\lambda I) \neq \{0\}$. Dans ce cas, $Ker(T-\lambda I)$ est l'espace propre associé à la valeur propre λ, et tous ses vecteurs non nuls sont dits vecteurs propres associés à λ.*

Remarque 1.1.9. $\mathcal{VP}(T) \subset \sigma(T)$. (Cette inclusion est en général stricte).

Proposition 1.1.10. Soit $T \in \mathscr{L}(E)$. Alors on a

1. Le spectre $\sigma(T)$ est un compact de $\mathbb{R}$ contenu dans $[-\|T\|, \|T\|]$.
2. Si de plus $T \in \mathscr{K}(E)$ avec $\dim(E) = \infty$, alors on a
   i) $0 \in \sigma(T)$;
   ii) $\sigma(T) \backslash \{0\} = \mathcal{VP}(T) \backslash \{0\}$;
   iii) l'une des situations suivantes :
   - ou bien $\sigma(T) = \{0\}$;
   - ou bien $\sigma(T) \backslash \{0\}$ est fini ;
   - ou bien $\sigma(T) \backslash \{0\}$ est une suite qui tend vers 0.

1.2 Espaces de Sobolev

Définition 1.2.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On définit* ***une distribution*** *T sur Ω toute forme linéaire sur $\mathfrak{D}(\Omega)$ vérifiant la propriété de continuité suivante : Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ et une constante $C_K > 0$ tels que*

$$|T(\varphi)| \leqslant C_K \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha \varphi\|_\infty \,, \ \forall \varphi \in D_K(\Omega). \tag{1.2.1}$$

On note par $\mathfrak{D}'(\Omega)$ l'ensemble de toutes les distributions sur Ω. L'image de φ par la distribution T est souvent notée $\langle T, \varphi \rangle$ au lieu de $T(\varphi)$.

Exemple 1.2.2. Toute fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ définit une distribution $T_f \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ en posant

$$\langle T_f, \varphi \rangle = T_f(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega).$$

Toute distribution de ce type, c'est-à-dire, définie à partir d'une fonction localement intégrable, est appelée distribution régulière. Elle est d'ordre 0 et notée $[f]$. On peut vérifier aisément l'injectivité de l'application

$$\begin{aligned} j : \ L^1_{loc}(\Omega) &\longrightarrow \mathfrak{D}'(\Omega) \\ f &\longmapsto j(f) = [f] = T_f, \end{aligned}$$

ce qui permet d'identifier les fonctions localement intégrables avec les distributions régulières et on peut noter $[f]$ seulement par f s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Définition 1.2.3. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $p \in [1, +\infty]$ et $m \in \mathbb{N}$. On appelle* ***espace de Sobolev sur Ω d'ordre*** *m, le sous-espace de $L^p(\Omega)$, noté $W^{m,p}(\Omega)$ et définie par*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ tel que } |\alpha| \leq m\},$$

où D^α désigne la dérivée partielle d'ordre α au sens des distributions.

L'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < +\infty; \\ \displaystyle\max_{0 \leq |\alpha| \leq m} ||D^\alpha u||_\infty & \text{si } p = +\infty. \end{cases} \tag{1.2.2}$$

Remarque 1.2.4. On vérifie aisément que la définition 1.2.3 est équivalente à

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{Pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ avec } |\alpha| \leq m, \text{ il existe } g_\alpha \in L^p(\Omega), \\ \text{tel que } \displaystyle\int_\Omega u\, D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha\, \varphi,\ \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega) \end{array} \right\}.$$

On appelle g_α la dérivée faible (ou la dérivée au sens de distributions) de u à l'ordre α et la note $D^\alpha u$.

Théorème 1.2.5. *L'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, séparable pour tout $1 \leq p < +\infty$ et réflexif pour tout $1 < p < +\infty$.*

Remarques 1.2.6. 1. On peut munir aussi l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ par la norme équivalente

$$\|u\|_{m,p,\Omega} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p & \text{si } 1 \leq p < +\infty; \\ \displaystyle\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} ||D^\alpha u||_\infty & \text{si } p = +\infty. \end{cases} \tag{1.2.3}$$

Les deux normes (1.2.2) et (1.2.3) sont notées indifféremment $\|\ \|_{W^{m,p}(\Omega)}$ ou $\|\ \|_{m,p,\Omega}$ (ou tout simplement $\|\ \|_{W^{m,p}}$ ou $\|\ \|_{m,p}$). L'intérêt principal de la norme (1.2.2) est que dans le cas où $p = 2$, elle confère à $W^{m,2}$ une structure hilbertienne, ce qui n'est pas le cas avec la norme définie par (1.2.3).

2. Pour $p = 2$, l'espace $W^{m,2}(\Omega)$, noté $H^m(\Omega)$, est un espace de Hilbert lorsqu'on le munit du produit scalaire défini, pour tous $u,\ v \in H^m(\Omega)$, par

$$\begin{aligned} (u|v)_{H^m(\Omega)} &= \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u | D^\alpha v)_{L^2(\Omega)} \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega (D^\alpha u)(x)(D^\alpha v)(x)\, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

et on a $\|u\|_{H^m(\Omega)} = (u|u)^{\frac{1}{2}}_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2} \right)^{\frac{1}{2}}$. D'après le Théorème 1.2.5, l'espace de Hilbert $H^m(\Omega)$ est séparable et réflexif.

Définitions 1.2.7. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$, $p \in [1, +\infty]$ et p' le conjugué de p, c'est-à-dir,e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.*

- ⋆ *On note par $W_0^{m,p}(\Omega)$ la fermeture de $\mathfrak{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$, c'est-à-dire $W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathfrak{D}(\Omega)}^{\|\ \|_{m,p}} \subset W^{m,p}(\Omega)$ avec inclusion stricte en général.*
- ⋆ *On désigne par $W^{-m,p'}(\Omega)$ le dual topologique de $W_0^{m,p}(\Omega)$, c'est-à-dire,*
$$W^{-m,p'}(\Omega) = (W_0^{m,p}(\Omega))' \subset \mathfrak{D}'(\Omega).$$

On peut Caractériser ce dual topologique par

$$W^{-m,p'}(\Omega) = \left\{ \sum_{|\alpha|\leq m} D^\alpha g_\alpha \ \mid \ g_\alpha \in L^{p'}(\Omega) \right\}.$$

Alors, si $T = \sum_{|\alpha|\leq m} D^\alpha g_\alpha \in W^{-m,p'}(\Omega)$, on a pour tout $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$,

$$\langle T, u\rangle = \sum_{|\alpha|\leq m} \langle D^\alpha g_\alpha, u\rangle = \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|}\langle g_\alpha, D^\alpha u\rangle = \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha\, D^\alpha u \, \mathrm{d}x.$$

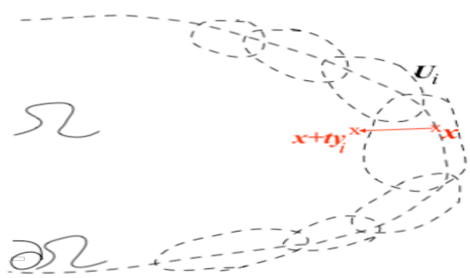
Remarque 1.2.8. On note $W_0^{1,2}(\Omega)$ par $H_0^1(\Omega)$ et son dual topologique $W^{-1,2}(\Omega)$ par $H^{-1}(\Omega)$. Plus généralement, on note $W_0^{m,2}(\Omega)$ par $H_0^m(\Omega)$ et son dual topologique $W^{-m,2}(\Omega)$ par $H^{-m}(\Omega)$.

Théorème 1.2.9. *$\mathfrak{D}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $p \in [1, +\infty[$, c'est-à-dire,*

$$W_0^{m,p}(\mathbb{R}^N) = W^{m,p}(\mathbb{R}^N), \ \forall p \in [1, +\infty[.$$

Définition 1.2.10. *Un ouvert de $\mathbb{R}^N$ est dit satisfaisant **la propriété du segment** s'il existe un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de $\partial\Omega$ (la frontière de Ω) et une famille de vecteurs $(y_i)_{i\in I} \subset \mathbb{R}^N\backslash\{0\}$ tels que,*

$$\forall i \in I, \ \forall x \in \overline{\Omega} \cap U_i, \ \text{on a } x + ty_i \in \Omega, \ \forall t \in]0, 1[.$$



Géométriquement, Ω vérifie la propriété du segment s'il est situé d'un même côté par rapport à sa frontière. Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$ l'ouvert $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < |x| < 1 \text{ et } 0 < y < 1\}$ ne vérifie pas la propriété du segment.

Remarque 1.2.11. On note par $\mathfrak{D}(\overline{\Omega})$ l'espace de restrictions à Ω des fonctions test de $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^N)$, c'est-à-dire,

$$\mathfrak{D}(\overline{\Omega}) = \{u_{|\Omega} \ \mid \ u \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^N)\} \subset W^{m,p}(\Omega).$$

On peut vérifier que si Ω satisfait la propriété du segment, alors $\mathfrak{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$, pour tout $p \in [1, +\infty[$.

1.2.1 Théorèmes d'injection : Inégalités de Sobolev

✓ **Cas où $\Omega = \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$:**

Théorème 1.2.12. ***"Théorème de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg"***
Soit $1 \leq p < N$, alors l'espace $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ s'injecte continûment dans $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$, où p^* est l'exposant (ou le conjugué) de Sobolev définie par $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$, $(p^* > p)$. On écrit

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N).$$

Plus précisément, il existe $C > 0$ $\left(C = C(p,N) = \frac{(N-1)p}{N-p}\right)$, tel que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \ \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Notons que $\|\nabla u\|_p = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$, c'est-à-dire, $\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} = \left(\|u\|_p^p + \|\nabla u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

Corollaire 1.2.13. Si $p \in [1, N[$, alors $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ s'injecte continûment dans $L^q(\mathbb{R}^N)$ pour tout $q \in [p, p^*]$. C'est-à-dire,

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \ \forall q \in [p, p^*].$$

Théorème 1.2.14. *"Cas limite où $p = N$"*
L'espace de Sobolev $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ s'injecte continûment dans tous les espaces de Lebesgue $L^q(\mathbb{R}^N)$, où $q \in [N, +\infty[$. C'est-à-dire,

$$W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \ \forall q \in [N, +\infty[.$$

Théorème 1.2.15. ***"Morrey"***
Soit $p > N$, alors l'espace $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ s'injecte continûment dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$, c'est-à-dire $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)$. De plus, il existe $C = C(N,p) > 0$ tel que pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ on a

$$|u(x) - u(y)| \leq C \|x - y\|^{1-\frac{N}{p}} \|\nabla u\|_p \text{ pour presque tout } x, y \in \mathbb{R}^N. \tag{1.2.4}$$

Remarques 1.2.16. 1. L'inégalité précédente (1.2.4) implique l'existence d'une fonction $\tilde{u} \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^N)$ telle que $u = \tilde{u}$ p.p sur $\mathbb{R}^N$. Autrement dit, toute fonction $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, pour $p > N$, admet un représentant continu, c'est-à-dire, $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow \mathscr{C}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

2. Si $N < p < +\infty$, alors pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ on a $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} u(x) = 0$.

Corollaire 1.2.17. "Cas d'espace de Sobolev d'ordre supérieur".
Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [1, +\infty[$. On les injections suivants selon les valeurs de m et p :

(i) Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} > 0$, c'est-à-dire, $m < \frac{N}{p}$, alors $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p_m}(\mathbb{R}^N)$, où $\frac{1}{p_m} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}$. Ainsi, $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$, $\forall q \in [p, p_m]$.

(ii) Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0$, c'est-à-dire, $m = \frac{N}{p}$, alors $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$, $\forall q \in [p, +\infty[$.

(iii) Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} < 0$, c'est-à-dire, $m > \frac{N}{p}$, alors $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)$.
De plus, si $m - \frac{N}{p} > 0$ n'est pas entier, en posant $k = E(m - \frac{N}{p})$ et $\theta = (m - \frac{N}{p}) - E(m - \frac{N}{p}) \in]0, 1[$, pour tout $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ on a

$$\|D^\alpha u\|_\infty \leq C\|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)}, \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ telque } |\alpha| \leq k$$

et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $|\alpha| = k$,

$$|D^\alpha u(x) - |D^\alpha u(y)| \leq C\|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)} \|x - y\|^\theta \text{ p.p. tout } x, y \in \mathbb{R}^N.$$

En particulier,

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow \mathscr{C}^k(\mathbb{R}^N).$$

Remarque 1.2.18. Le cas $p = 1$ et $m = N$ est assez particulier. En procédant par densité, on vérifie aisément que

$$W^{N,1}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N).$$

✓ **Cas où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$:**

Définitions 1.2.19.

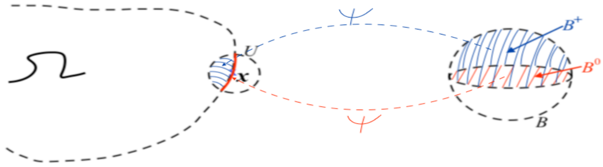
(i) *On appelle le demi-espace supérieur la partie de $\mathbb{R}^N$, notée $\mathbb{R}^N_+$, définie par*

$$\mathbb{R}^N_+ = \left\{x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N \mid x_N > 0\right\}.$$

(ii) *Si $B = B_{\mathbb{R}^N}(0, 1)$ est la boule unité ouverte, alors on note*

$$B^+ = B \cap \mathbb{R}^N_+ \text{ et } B^0 = \{x \in B \mid x_N = 0\}.$$

(iii) *Un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$ est dit de classe $\mathscr{C}^m$ $(m \in \mathbb{N})$, si pour tout $x \in \partial\Omega$, il existe un voisinage ouvert U de x et une bijection $\psi : B \longrightarrow U$ tels que $\psi \in \mathscr{C}^m(\overline{B})$ et $\psi^{-1} \in \mathscr{C}^m(\overline{U})$ avec $\psi(B^+) = U \cap \Omega$ et $\psi(B^0) = U \cap \partial\Omega$.*



Théorème 1.2.20. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ de classe $\mathscr{C}^1$ avec frontière bornée, ou bien $\Omega = \mathbb{R}^N_+$. Soient $1 \leq p < +\infty$ et $m \in \mathbb{N}^*$.*

(i) Si $m < \frac{N}{p}$, alors $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [p, p^*]$, où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}$.

(ii) Si $m = \frac{N}{p}$, alors $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [p, +\infty[$.

(iii) Si $m > \frac{N}{p}$, alors $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Remarque 1.2.21. La conclusion du Corollaire 1.2.17 reste vraie si l'on remplace $\mathbb{R}^N$ par Ω. Plus précisément, pour le cas $m > \frac{N}{p}$, si $m - \frac{N}{p}$ n'est pas entier, alors

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathscr{C}^k(\overline{\Omega}), \text{ où } k = E(m - \frac{N}{p}).$$

Théorème 1.2.22. ***"Théorème de Rellich-Kondrachov"***
Soit Ω un ouvert borné de classe $\mathscr{C}^1$.

(i) Si $p < N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, p^*[$, où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$.

(ii) Si $p = N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, +\infty[$.

(iii) Si $p > N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathscr{C}(\overline{\Omega})$.

Corollaire 1.2.23. Pour tout p on a $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega)$.

Remarque 1.2.24. Pour l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$, le Théorème de Rellich-Kondrachov 1.2.22 reste vrai mais seulement avec l'hypothèse Ω est borné.

1.2.2 Inégalité de Poincaré

Théorème 1.2.25. *Soient $p \in [1, +\infty[$ et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Alors il existe $C = C(\Omega, p) > 0$ tel que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C|\nabla u|_{L^p(\Omega)}, \ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

où $|\nabla u|_{L^p(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

Remarques 1.2.26.
1. L'inégalité de Poincaré reste valable si Ω est de mesure finie, ou bien si Ω est borné seulement dans une seule direction.
2. Si Ω est un ouvert quelconque, alors l'inégalité de Poincaré n'est pas valable en général.

3. L'inégalité de Poincaré est vérifie seulement sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ et pas sur $W^{1,p}(\Omega)$ en général. Donner un contre-exemple.

Corollaire 1.2.27. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ borné au moins dans une direction. Alors la semi-norme sur $W^{1,p}(\Omega)$ définie par

$$|u|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = |\nabla u|_{L^p(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^{N} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

est une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ équivalente à la norme usuelle induite par celle de $W^{1,p}(\Omega)$.

1.2.3 Trace et formule de Green

Lemme 1.2.28. Soit $p \in [1, +\infty[$. Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tel que supp (u) est compact dans Ω, alors $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 1.2.29. ***"Notion de trace"***
Soit Ω un ouvert de classe $\mathscr{C}^1$. Soit $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap \mathscr{C}(\overline{\Omega})$ avec $p \in [1, +\infty[$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(*i*) $u = 0$ *sur* $\partial\Omega$;

(*ii*) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Corollaire 1.2.30. "Opérateur trace"
Soit Ω un ouvert de classe C^1 à frontière bornée où $\Omega = \mathbb{R}_+^N$. Considérons l'application

$$\begin{aligned} \gamma_0 : \mathfrak{D}(\overline{\Omega}) &\longrightarrow L^p(\partial\Omega) \\ u &\longrightarrow u|_{\partial\Omega}. \end{aligned}$$

Alors γ_0 est bien définie et elle admet un prolongement $\widetilde{\gamma_0}$ linéaire, continue à $W^{1,p}(\Omega)$ tel que $\ker \widetilde{\gamma_0} = W_0^{1,p}(\Omega)$.
L'application $\widetilde{\gamma_0} : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$ est appelée **l'opérateur trace** d'ordre zéro. Ainsi, $W_0^{1,p}(\Omega)$ est l'espace des éléments de $W^{1,p}(\Omega)$ de trace nulle sur $\partial\Omega$.

Propriété 1.2.31. "Formule de Green"
Soit Ω un ouvert borné de frontière $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Alors, pour tout $u \in H^1(\Omega)$ et tout $v \in H^1(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u\, v\, \nu_i \,\mathrm{d}\sigma \ (i = 1, \dots, n),$$

où ν_i est le cosinus directeur de $\overrightarrow{\nu}$ le vecteur unitaire de la normale extérieure à $\partial\Omega$, c'est-à-dire, $\nu_i = \overrightarrow{\nu}.\overrightarrow{e_i}$ avec $\overrightarrow{\nu} = \sum_{i=1}^{N} \cos(\alpha_i).\overrightarrow{e_i}$. Notons que l'intégrale de

surface a un sens puisque $u|_{\partial\Omega},\ v|_{\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega)$, d'après le Corollaire 1.2.30.
De la même manière, on peut parler de $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ pour une fonction $u \in W^{2,p}(\Omega)$, en posant $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = (\nabla u/_{\partial\Omega})\,.\overrightarrow{\nu} \in L^p(\partial\Omega)$ et on a la formule de Green suivante :

$$-\int_\Omega \Delta u\, v\, \mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla u.\nabla v\, \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v\, \mathrm{d}\sigma,\ \forall u, v \in H^2(\Omega),$$

avec $\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ est l'opérateur Laplacien et $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$.

1.3 Applications homotopes

Définitions 1.3.1. *Soient X, Y deux espaces topologiques et f, $g : X \longrightarrow Y$ deux applications continues.*

*i) On dit que f est **homotope** à g s'il existe une application continue $H : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ telle que $H(x,0) = f(x)$ et $H(x,1) = g(x)$, $\forall x \in X$, c'est-à-dire,*

$$H(.,0) = f \text{ et } H(.,1) = g.$$

H est appelée alors une homotopie de f à g.

ii) Si $A \subset X$, on dit que f est homotope à g relativement à A s'il existe une application continue $H : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ telle que $H(x,0) = f(x)$ et $H(x,1) = g(x)$, $\forall x \in X$, et $H(a,t) = f(a) = g(a)$, $\forall a \in A$. On dit alors que H est une homotopie relative à A de f à g.

Remarques 1.3.2.

1. La deuxième définition *ii)* entraîne que f et g coïncide sur A.
2. Si $A = \emptyset$, alors les deux définitions sont équivalentes.
3. Si $A' \subset A$ et f est homotope à g relativement à A, alors f est homotope à g relativement à A'.
4. Si $f = g$, alors f est homotope à elle-même relativement à X. Il suffit de considérer l'application $H : (x,t) \in X \times [0,1] \longrightarrow f(x) \in Y$ qui sera une homotopie relative à X de f à f.

Proposition 1.3.3. Soient X, Y deux espaces topologiques et A une partie de X. L'homotopie relative à A est une relation d'équivalence sur $\mathscr{C}(X,Y)$.

Preuve. — La réflexivité est une conséquence des remarques 4) et 3).
— Pour la symétrie, si H est l'homotopie relative à A de f à g, alors l'application $\widetilde{H} : (x,t) \in X \times [0,1] \longrightarrow H(x, 1-t) \in Y$ est l'homotopie relative à A de g à f.

— Pour la transitivité, si H et H' sont les homotopies relative à A de f à g et de g à h respectivement, alors l'application

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{H}: & X \times [0,1] & \longrightarrow & Y \\ & (x,t) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} H(x,2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ H'(x,2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{array} \right. \end{array}$$

est l'homotopie relative à A de f à h. "à vérifier"

Corollaire 1.3.4. L'homotopie est une relation d'équivalence sur $\mathscr{C}(X,Y)$.

En effet, il suffit d'appliquer la remarque 2) et la proposition 1.3.3 lorsque $A = \emptyset$.

Exemple 1.3.5. "Chemins"
Soit X un espace topologique. On dit que $c : [0,1] \longrightarrow X$ est un chemin dans X si c est une application continue. Le point $c(0)$ s'appelle l'origine du chemin c et le point $c(1)$ est l'extrémité de c.
Si c et c' sont deux chemins dans X, on dit qu'ils sont homotopes s'il existe une application continue $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$ telle que $H(t,0) = c(t)$ et $H(t,1) = c'(t)$, $\forall t \in [0,1]$, de plus, $H(0,t) = c(0) = c'(0)$ et $H(1,t) = c(1) = c'(1)$, $\forall t \in [0,1]$. C'est-à-dire, les chemins c et c' sont homotopes dans $\mathscr{C}([0,1],X)$ relativement à $\{0,1\}$. D'après la proposition 1.3.3, cette relation est d'équivalence sur $\mathscr{C}([0,1],X)$.

Chapitre 2

Degré topologique en dimension finie "Degré de Brouwer"

2.1 Introduction et motivation

Pour un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^N$, une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ dans $\mathscr{C}^1(\Omega) \cap \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$ et une donnée fixe $b \in \mathbb{R}^N$, on considère le problème

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} \text{Trouver } x \in \Omega \text{ tel que} \\ f(x) = b. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

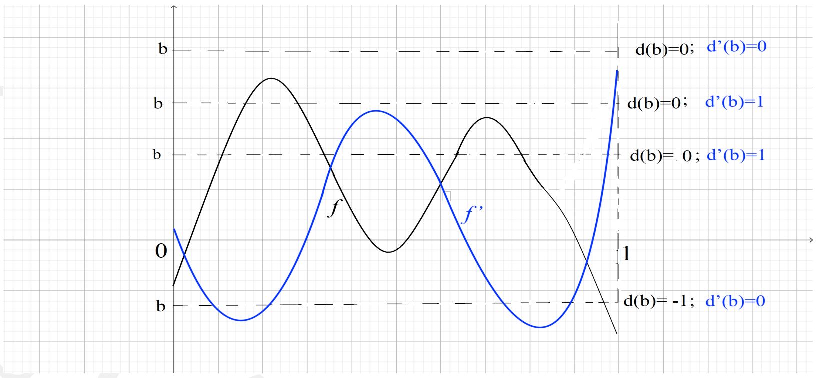
On cherche une quantité permettant de connaître le nombre de solutions de $(\mathcal{P})$. Cette quantité devrait être invariante par rapport à des petites déformations de f. Alors pour que l'on empêche les solutions de $(\mathcal{P})$ de sortir du domaine on imposera que $b \notin f(\partial\Omega)$.

Exemple 2.1.1. "en dimension 1".
Soient $\Omega =]0, 1[$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant l'hypothèse suivante

$$(\mathcal{H}) : \quad \text{Pour toute solution } x \text{ de } (\mathcal{P}), \quad f'(x) \neq 0.$$

On introduit l'entier $d(b)$ défini par

$$d(b) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in f^{-1}(\{b\})} sgn(f'(x)) & \text{si } (\mathcal{P}) \text{ a des solutions;} \\ 0 & \text{si } (\mathcal{P}) \text{ n'a pas de solution.} \end{cases}$$



Remarque 2.1.2. L'entier d dépend aussi de la fonction f et de l'ouvert Ω. On le note alors $\deg(f, \Omega, b)$. Il reste constant par rapport à b sur certains intervalles. De plus, si $\deg(f, \Omega, b) \neq 0$, le problème $(\mathcal{P})$ admet au moins une solution et si $\deg(f, \Omega, b) = 0$, le problème $(\mathcal{P})$ peut ou non admettre des solutions.

On verra par la suite que $\deg(f, \Omega, b)$ a d'excellentes propriétés. On introduit tout d'abord la formule du degré pour le cas de dimension $N \geq 1$. Pour $x \in \Omega$, on désignera par $\mathcal{D}f(x) = (\partial_j f_i(x))_{1 \leq i,j \leq N}$ la matrice jacobienne de f en x, où $\partial_j f_i(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ et $\mathcal{J}_f(x) = \det(\mathcal{D}f(x))$ le déterminant jacobien de f en x.

2.2 Construction du degré topologique de Brouwer

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ dans $\mathscr{C}^1(\Omega) \cap \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$ et $b \in \mathbb{R}^N \backslash f(\partial\Omega)$. Pour $0 < \varepsilon < \mathrm{dist}(b, f(\partial\Omega))$, il existe une fonction $\varphi \in \mathscr{C}(]0, \infty[, \mathbb{R})$ à support compact contenu dans $]0, \varepsilon[$ telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(|x|)\, dx = 1$.

Définition 2.2.1. *On appelle le **degré topologique de Brouwer** de f dans Ω par rapport au point cible b, le nombre*

$$\deg(f, \Omega, b) = \int_\Omega \varphi(|f(x) - b|)\, \mathcal{J}_f(x)\, dx.$$

A l'aide du lemme suivant, on peut prouver que $\deg(f, \Omega, b)$ est un entier indépendant du choix de ε et de φ.

Lemme 2.2.2. Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ une fonction dans $\mathscr{C}^1(\Omega) \cap \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$ telle que $0 \notin f(\partial\Omega)$. Soit $\psi : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue à support contenu dans $]0, \varepsilon[$ pour $0 < \varepsilon < \mathrm{dist}(0, f(\partial\Omega))$, telle que

$$\int_0^\infty t^{N-1} \psi(t)\, dt = 0.$$

Alors on a

$$\int_\Omega \psi(|f(x)|) \mathcal{J}_f(x)\, dx = 0.$$

Preuve. Voir TD.

Proposition 2.2.3. Le degré topologique de Brouwer $\deg(f,\Omega,b)$ est indépendant de ε et de la fonction φ, pourvu que $0<\varepsilon<\text{dist}(b,f(\partial\Omega))$.

Preuve. Soient $0<\varepsilon_1,\varepsilon_2<\text{dist}(b,f(\partial\Omega))$. Si φ_1 et φ_2 sont deux fonctions continues sur $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ à supports contenus dans $]0,\varepsilon_1[$ et $]0,\varepsilon_2[$ respectivement telles que $\int_{\mathbb{R}^N}\varphi_1(|x|)\,dx=\int_{\mathbb{R}^N}\varphi_2(|x|)\,dx=1$, alors $\int_0^\infty t^{N-1}\psi(t)\,dt=0$ pour $\psi=\varphi_1-\varphi_2$. En appliquant le lemme précédent 2.2.2 à ψ et la fonction $x\longmapsto f(x)-b$, on obtient $\int_\Omega\psi(|f(x)-b|)\mathcal{J}_f(x)\,dx=0$, c'est-à-dire,

$$\int_\Omega\varphi_1(|f(x)-b|)\mathcal{J}_f(x)\,dx=\int_\Omega\varphi_2(|f(x)-b|)\mathcal{J}_f(x)\,dx.$$

Exemples 2.2.4.
1. En particulier, si f est une fonction constante alors $\mathcal{J}_f(x)=0,\ \forall x\in\Omega$, alors $\deg(f,\Omega,b)=0$.
2. Si $b\notin f(\overline{\Omega})$, alors $|f(x)-b|\geq\varepsilon,\ \forall x\in\Omega$, c'est-à-dire, $\varphi(|f(x)-b|)=0,\ \forall x\in\Omega$. D'où $\deg(f,\Omega,b)=0$.

Proposition 2.2.5. Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N\leq 1)$, $f_1,\ f_2:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^N$ deux fonctions dans $\mathscr{C}^1(\Omega)\cap\mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$ et $b\in\mathbb{R}^N$ tel que $b\notin f_1(\partial\Omega)\cup f_2(\partial\Omega)$.
Si $0<\varepsilon<\frac{1}{4}\text{dist}(b,f_1(\partial\Omega)\cup f_2(\partial\Omega))$ et $\|f_1-f_2\|_\infty<\varepsilon$, alors on a

$$\deg(f_1,\Omega,b)=\deg(f_2,\Omega,b).$$

Preuve. Sans perte de généralité, on peut supposer que $b=0$, puisque $\deg(f,\Omega,b)=\deg(f-b,\Omega,0)$. Soient $\theta:[0,+\infty[\longrightarrow[0,1]$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que

$$\theta(t)=\begin{cases}1 & \text{si } 0\leq t\leq\varepsilon;\\ 0 & \text{si } t\geq 2\varepsilon\end{cases}$$

et f_3 la fonction définie par $f_3(x)=(1-\theta(|f_1(x)|))f_1(x)+\theta(|f_1(x)|)f_2(x)$. On peut vérifier aisément que

$$f_3(x)=\begin{cases}f_1(x) & \text{si } |f_1(x)|>2\varepsilon;\\ f_2(x) & \text{si } |f_1(x)|<\varepsilon,\end{cases}$$

et $\|f_i-f_k\|_\infty<\varepsilon$ pour tout $i,\ k\in\{1,2,3\}$. De plus, pour tout $x\in\partial\Omega$, on a $|f_i(x)|>3\varepsilon$. Considérons maintenant deux fonctions φ_1 et φ_2 dans $\mathscr{C}(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ telles que $\text{supp}(\varphi_1)\subset]2\varepsilon,3\varepsilon[$, $\text{supp}(\varphi_2)\subset]0,\frac{\varepsilon}{2}[$ et $\int_{\mathbb{R}^N}\varphi_1(|x|)\,dx=\int_{\mathbb{R}^N}\varphi_2(|x|)\,dx=1$. Comme f_3 coïncide avec f_1 ou avec f_2 partiellement (en partie), alors on a $\varphi_1(|f_3(x)|)\mathcal{J}_{f_3}(x)=\varphi_1(|f_1(x)|)\mathcal{J}_{f_1}(x)$ et $\varphi_2(|f_3(x)|)\mathcal{J}_{f_3}(x)=\varphi_2(|f_2(x)|)\mathcal{J}_{f_2}(x)$. Cela implique que $\deg(f_1,\Omega,0)=\deg(f_3,\Omega,0)=\deg(f_2,\Omega,0)$.

Remarque 2.2.6. D'après la proposition précédente 2.2.5, on peut étendre la définition du degré topologique aux fonctions qui sont seulement continues.

Proposition et définition 2.2.7. Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ et $b \in \mathbb{R}^N \backslash f(\partial\Omega)$. Soit $(f_k)_k$ une suite dans $\mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap \mathscr{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ telle que $\|f_k - f\|_\infty \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ sur $\overline{\Omega}$. Alors, pour k assez grand, le degré topologique de f_k existe et la suite $(\deg(f_k, \Omega, b))_k$ converge.
On définit alors le degré topologique de f par

$$\deg(f, \Omega, b) = \lim_{k\to\infty} \deg(f_k, \Omega, b).$$

Preuve. Comme $\|f_k - f\|_\infty \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ sur $\overline{\Omega}$, alors $b \notin f_k(\partial\Omega)$ et le degré topologique $\deg(f_k, \Omega, b)$ est bien défini pour $k \geq k_0$ (assez grand). Et d'après la proposition précédente 2.2.5, pour k et j assez grands de telle sorte que $\|f_k - f_j\|_\infty < \frac{1}{4}\text{dist}(b, f_k(\partial\Omega) \cup f_j(\partial\Omega))$, on a $\deg(f_k, \Omega, b) = \deg(f_j, \Omega, b)$, c'est-à-dire, la suite des degrés topologiques $(\deg(f_k, \Omega, b))_k$ est stationnaire, donc converge.

Remarque 2.2.8. On peut vérifier facilement que la définition du degré topologique pour une fonction continue f est indépendante au choix de la suite $(f_k)_k$.

2.3 Propriétés du degré de Brouwer

Proposition 2.3.1. "Normalisation"
Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $b \in \mathbb{R}^N$. En désignant par I l'application identité, on a

$$\deg(I, \Omega, b) = \begin{cases} 1 & \text{si } b \in \Omega; \\ 0 & \text{si } b \notin \overline{\Omega} \end{cases} \quad \text{et} \quad \deg(-I, \Omega, b) = \begin{cases} (-1)^N & \text{si } b \in \Omega; \\ 0 & \text{si } b \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Preuve. Il suffit d'utiliser la définition 2.2.1 le fait que $\mathcal{J}_I(x) = 1$ et $\mathcal{J}_{-I}(x) = (-1)^N$.

Proposition 2.3.2. "Stabilité par rapport à f"
Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f_1,\ f_2 : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ deux fonctions continues et $b \in \mathbb{R}^N$ tels que $b \notin f_1(\partial\Omega) \cup f_2(\partial\Omega)$ et $\|f_1 - f_2\|_\infty \leq \frac{1}{4}\text{dist}(b, f_1(\partial\Omega) \cup f_2(\partial\Omega))$.
Alors on a

$$\deg(f_1, \Omega, b) = \deg(f_2, \Omega, b).$$

Preuve. C'est une conséquence de deux propositions 2.2.5 et 2.2.7.

Proposition 2.3.3. "Stabilité par rapport à la cible b"
Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ et b, b' deux vecteurs cibles de $\mathbb{R}^N$. On suppose que b et b' appartiennent à la même composante connexe de $\complement_{\mathbb{R}^N}^{f(\partial\Omega)}$, alors

$$\deg(f, \Omega, b) = \deg(f, \Omega, b').$$

Preuve. Il suffit de vérifier que si b' est assez proche de b dans $\mathbb{R}^N$, alors le degré est le même. Soit $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}\text{dist}(b, f(\partial\Omega))$ et posons $f_0(x) = f(x) - b$ et $f_1(x) = f(x) - b'$. Si $\text{dist}(b, b') < \varepsilon$, alors $\|f_0 - f_1\|_\infty < \varepsilon$ et par conséquent

$$\deg(f, \Omega, b) = \deg(f_0, \Omega, 0) = \deg(f_1, \Omega, 0) = \deg(f, \Omega, b').$$

Proposition 2.3.4. "Additivité"
Soient Ω_1, Ω_2 deux ouverts bornés disjoints de $\mathbb{R}^N$, b un point cible de $\mathbb{R}^N$ et $f \in \mathscr{C}(\overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}, \mathbb{R}^N)$. Si $b \notin f(\partial\Omega_1) \cup f(\partial\Omega_2)$, alors

$$\deg(f, \Omega_1 \cup \Omega_2, b) = \deg(f, \Omega_1, b) + \deg(f, \Omega_2, b).$$

Preuve. Il suffit d'utiliser la définition 2.2.1 pour une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et passer à la limite après approximation de la fonction continue f par des fonctions régulières.

Corollaire 2.3.5. Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, $K \subset \overline{\Omega}$ un compact et b un vecteur cible de $\mathbb{R}^N$. Si $b \notin f(K) \cup f(\partial\Omega)$, alors

$$\deg(f, \Omega, b) = \deg(f, \Omega \backslash K, b).$$

Preuve. C'est une conséquence de la proposition 2.3.4.

Proposition 2.3.6. "Invariance par homotopie"
Soient $H : \overline{\Omega} \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ une fonction continue et $b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$. Alors pour tout $t \in [0, 1]$ on a

$$\deg(H(., t), \Omega, b) = \deg(H(., 0), \Omega, b).$$

Preuve. L'homotopie H est continue sur le compact $\overline{\Omega} \times [0, 1]$, alors elle est uniformément continue. Donc pour $\varepsilon = \frac{1}{4}\text{dist}(b, H(\partial\Omega \times [0, 1]))$, il existe $\eta > 0$ tel que si $|t-s| < \eta$, alors on a $\|H(., t) - H(., s)\|_\infty < \varepsilon$. En appliquant la proposition 2.3.2, on conclut que $\deg(H(., t), \Omega, b) = \deg(H(., s), \Omega, b)$ pour tout t, $s \in [0, 1]$ tels que $|t-s| < \eta$. En recouvrant le compact $[0, 1]$ par des intervalles de longueur η on déduit le résultat d'invariance de degré topologique par homotopie.

Remarque 2.3.7. L'invariance par homotopie du degré topologique est très importante, parce qu'en particulier elle permet de calculer le degré topologique de certaines fonctions en se ramenant à des cas où le calcul est facile.

Corollaire 2.3.8. "Invariance sur le bord"
Soient un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^N$ et deux fonctions $f,\ g \in \mathscr{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$. Si $f = g$ sur le bord $\partial\Omega$ et $b \notin f(\partial\Omega)$, alors on a $\deg(f, \Omega, b) = \deg(g, \Omega, b)$.
Autrement dit, tout ce passe sur le bord en ce qui concerne le degré topologique.

Preuve. Il suffit d'appliquer l'invariance par homotopie du degré topologique (Proposition 2.3.6), en utilisant l'homotopie $H(x, t) = t\, f(x) + (1 - t)\, g(x)$.

Corollaire 2.3.9. Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ et $b \notin f(\partial\Omega)$. Alors il existe $g \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap \mathscr{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ telle que $\deg(f, \Omega, b) = \deg(g, \Omega, b)$.

Preuve. "Voir TD"
Soient $r = \operatorname{dist}(b, f(\partial\Omega)) > 0$ et $g \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap \mathscr{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ une fonction telle que $\sup\limits_{x\in\partial\Omega} \|g(x) - f(x)\| < r$. Pour $t \in [0, 1]$, en posant $f_t = t\, g + (1 - t)\, f$, on peut vérifier que $b \notin f_t(\partial\Omega),\ \forall t \in [0, 1]$. En effet, pour tout $x \in \partial\Omega$, on a

$$\begin{aligned}
\|f_t(x) - b\| &= \|t\,(g(x) - f(x)) - (b - f(x))\| \\
&\geq \big|\|b - f(x)\| - \|t\,(g(x) - f(x))\|\big| \\
&= \|b - f(x)\| - \|t\,(g(x) - f(x))\| \\
&\geq \|b - f(x)\| - \|g(x) - f(x)\| \\
&> \|b - f(x)\| - r \geq 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $b \neq f_t(x),\ \forall t \in [0, 1],\ \forall x \in \partial\Omega$. Le résultat demandé se déduit alors de l'invariance du degré par homotopie.

Remarque 2.3.10. Cette propriété est très utile pour l'approximation d'une fonction continue par une autre plus régulière en conservant le degré topologique.

Nous allons prouver maintenant que le degré topologique est un entier relatif ($\in \mathbb{Z}$), en donnant d'abord certains rappels et quelques lemmes.

Rappel.
1. Un point $x \in \Omega$ est dit **régulier** si $\mathcal{J}_f(x) \neq 0$;
2. Un point $x \in \Omega$ est dit **singulier** (ou **point critique**) s'il n'est pas régulier. On note l'ensemble des points singuliers de f sur l'ouvert Ω par
$$\mathcal{S}_f(\Omega) = \{x \in \Omega : \mathcal{J}_f(x) = 0\}.$$
3. $y \in f(\overline{\Omega})$ est dite valeur régulière si $f^{-1}(y) \cap \mathcal{S}_f(\Omega) = \emptyset$. Sinon, y est dite valeur singulière ou critique.

Remarque 2.3.11. Si $b \notin f(\partial\Omega)$ est une valeur régulière, alors l'ensemble $E = f^{-1}(\{b\})$ est fini.

En effet, d'une part E est fermé d'après la continuité de f. De plus, il est borné ($\subset \Omega$), alors E est compact. D'autre part, si b est une valeur régulière alors $\mathcal{J}_f(x) \neq 0,\ \forall x \in f^{-1}(\{b\})$. Ce qui implique d'après le théorème d'inversion locale l'existence d'un voisinage U de x pour tout $x \in E$ tel que $f\backslash_U$ est un homéomorphisme. Donc l'ensemble E est discret, c'est-à-dire, ses points sont isolés. Finalement tout compact discret est fini.

Lemme 2.3.12. Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap \mathscr{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$. Si $b \notin f(\partial\Omega) \cup f(\mathcal{S})$, où $\mathcal{S}$ est l'ensemble des points singuliers de f, alors on a

$$\deg(f, \Omega, b) = \begin{cases} \sum\limits_{x \in \Omega \cap f^{-1}(\{b\})} \operatorname{sgn}(\mathcal{J}_f(x)) & \text{si } \Omega \cap f^{-1}(\{b\}) \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } \Omega \cap f^{-1}(\{b\}) = \emptyset \end{cases} \in \mathbb{Z}.$$

Preuve. D'après la remarque 2.3.11 on peut poser $f^{-1}(\{b\}) = \{x_1, \ldots, x_p\}$. Alors pour ε assez petit, le support de l'application $x \longmapsto \varphi(f(x) - b)$ admet p composantes connexes $U_1, \ldots, U_p$ contenant $x_1, \ldots, x_p$ respectivement. Ainsi on a

$$\begin{aligned} \int_\Omega \varphi(|f(x) - b|)\, \mathcal{J}_f(x)\, dx &= \sum_{i=1}^p \int_{U_i} \varphi(|f(x) - b|)\, \mathcal{J}_f(x)\, dx \\ &= \sum_{i=1}^p \operatorname{sgn}(\mathcal{J}_f(x_i)) \int_{U_i} \varphi(|f(x) - b|)\, |\mathcal{J}_f(x)|\, dx \\ &= \sum_{i=1}^p \operatorname{sgn}(\mathcal{J}_f(x_i)) \int_{B(0,\varepsilon)} \varphi(|y|)\, dy \\ &= \sum_{i=1}^p \operatorname{sgn}(\mathcal{J}_f(x_i)). \end{aligned}$$

Lemme 2.3.13. "Lemme de Sard"
Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, et $f \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Alors $|f(\mathcal{S})| = 0$, où $\mathcal{S}$ est l'ensemble des points singuliers de f.

Proposition 2.3.14. Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ et $b \notin f(\partial\Omega)$. Alors le degré de Brouwer $\deg(f, \Omega, b)$ est un entier de $\mathbb{Z}$.

Preuve. Soit g une fonction dans $\mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap \mathscr{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ telle que $\deg(f, \Omega, b) = \deg(g, \Omega, b)$. L'existence de g est assurée par la proposition 2.2.7. Comme $g(\partial\Omega)$ est compact, alors $\complement_{\mathbb{R}^N}^{g(\partial\Omega)}$ est un ouvert. D'après le lemme de Sard, $\complement_{\mathbb{R}^N}^{g(\partial\Omega) \cup g(\mathcal{S})}$ est dense dans $\complement_{\mathbb{R}^N}^{g(\partial\Omega)}$, où $\mathcal{S}$ est l'ensemble des points singuliers de g. Par conséquent, il existe $b' \notin g(\partial\Omega) \cup g(\mathcal{S})$ tel que b et b' soient dans la même composante connexe de $\complement_{\mathbb{R}^N}^{g(\partial\Omega)}$. En appliquant la proposition 2.3.3 et le lemme 2.3.12, on obtient $\deg(g, \Omega, b) = \deg(g, \Omega, b') \in \mathbb{Z}$. Par suite le degré topologique de la fonction continue f est un entier de $\mathbb{Z}$.

Remarque 2.3.15. On peut définir le degré topologique de Brouwer d'une autre manière équivalente, via le théorème suivant :

Théorème 2.3.16. *Pour $N \geq 1$, soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des triplets (f, Ω, b), où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ et $b \in \mathbb{R}^N \backslash f(\partial\Omega)$. Alors il existe une, et une seule, application $d : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{Z}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

i) ***Normalisation*** *: Si $b \in \Omega$, alors $d(I, \Omega, b) = 1$, où I est l'application identité ;*

ii) ***Additivité*** *: Si Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts disjoints inclus dans Ω, tels que $b \notin f(\overline{\Omega}\backslash(\Omega_1 \cup \Omega_2))$, alors $\deg(f, \Omega, b) = \deg(f, \Omega_1, b) + \deg(f, \Omega_2, b)$;*

iii) ***Invariance par homotopie*** *: Si $H : [0,1] \times \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ et $z : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ sont continues, alors pour tout $t \in [0,1]$, $z(t) \notin H(t, \partial\Omega)$ on a $d(H(0,.), \Omega, z(0)) = d(H(1,.), \Omega, z(1))$.*

Cette application d est appelée le degré topologique de Brouwer et noté $\deg(f, \Omega, b)$.

Théorème 2.3.17. ***"Théorème d'existence"***
Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ et b un vecteur cible dans $\mathbb{R}^N \backslash f(\partial\Omega)$. Si $\deg(f, \Omega, b) \neq 0$, alors l'équation $f(x) = b$ admet au moins une solution dans Ω.

Preuve. On suit un raisonnement par contraposition. Pour une fonction $f \in \mathscr{C}^1$, supposons que l'équation $f(x) = b$ n'admet aucune solution dans Ω, c'est-à-dire, $f^{-1}(\{b\}) = \emptyset$. Soient $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(b, f(\overline{\Omega}))$ et une fonction φ satisfaisant les conditions de la définition 2.2.1. Comme $\operatorname{supp}(\varphi) \subset]0, \varepsilon[$, alors

$$\deg(f, \Omega, b) = \int_\Omega \varphi(|f(x) - b|)\, \mathcal{J}_f(x)\, dx = 0.$$

Maintenant pour une fonction $f \in \mathscr{C}^0$, telle que $f^{-1}(\{b\}) = \emptyset$, on a $\deg(f, \Omega, b) = \lim\limits_{k\to\infty} \deg(f_k, \Omega, b)$, où $(f_k)_k$ est une suite dans $\mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap \mathscr{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ telle que $\|f_k - f\|_\infty \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ sur $\overline{\Omega}$. Puisque $f^{-1}(\{b\}) = \emptyset$, alors pour k assez grand, $f_k^{-1}(\{b\}) = \emptyset$ "à vérifier", ce qui implique que $\deg(f_k, \Omega, b) = 0$. Par conséquent $\deg(f, \Omega, b) = 0$.

Remarque 2.3.18. Le théorème 2.3.17 est souvent utilisé pour prouver l'existence de solutions pour des équations non linéaires dans $\mathbb{R}^N$.

Corollaire 2.3.19. Si $\mathcal{H}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^N$ et $f(\overline{\Omega}) \subset \mathcal{H}$, alors pour tout $b \notin f(\partial\Omega)$ on a $\deg(f, \Omega, b) = 0$.

Preuve. Rappelons que les hyperplans de $\mathbb{R}^N$ sont ses sous-espaces de dimension $N-1$. Si $b \notin \mathcal{H}$, alors d'après le théorème 2.3.17 le degré $\deg(f, \Omega, b)$ est nul. Sinon, il suffit de prendre $b' \notin \mathcal{H}$ assez voisin de b pour obtenir $\deg(f, \Omega, b) = \deg(f, \Omega, b') = 0$.

2.4 Applications

Proposition 2.4.1. "Non rétraction de la boule"
Soient $B = B(0,1)$ la boule unité ouverte et S la sphère unité de $\mathbb{R}^N$. Il n'existe pas de fonction continue $f : \overline{B} \longrightarrow S$ telle que $f\,|_S = I$, c'est-à-dire, $f(x) = x,\ \forall x \in S$.

Preuve. Supposons l'existence de telle fonction f, alors $0 \notin S = \partial B$. Ce qui entraîne que $\deg(f, B, 0)$ est bien défini. Or d'après la proposition 2.3.8 on aurait $\deg(f, B, 0) = \deg(I, B, 0) = 1$, ce qui implique l'existence de $x \in B$ tel que $f(x) = 0$. D'où la contradiction $0 \in S$.

Théorème 2.4.2. ***"Théorème de point fixe de Brouwer"***
Soit $f : \overline{B}(0,1) \longrightarrow \overline{B}(0,1)$ une application continue. Alors il existe $x \in \overline{B}(0,1)$ tel que $f(x) = x$.

Preuve. S'il existe $x \in S$ tel que $f(x) = x$, alors le théorème est prouvé. Sinon, $x - f(x) \neq 0,\ \forall x \in S$. En utilisant alors l'homotopie H définie sur $\overline{B}(0,1) \times [0,1]$ par $H(x,t) = x - t\,f(x)$, on peut vérifier que $x - t\,f(x) \neq 0,\ \forall x \in S,\ \forall t \in [0,1]$. En effet, pour $t = 1$ il est déjà vérifié. Pour tout $t \in [0,1[$ et tout $x \in S$ on a $t\,\|f(x)\| < 1$. Alors $t\,f(x) \neq x$, c'est-à-dire, $x - t\,f(x) \neq 0$. Par conséquent, pour tout $t \in [0,1]$, le degré topologique $\deg(H(.,t), B, 0)$ est bien défini et on a $\deg(H(.,1), B, 0) = \deg(H(.,0), B, 0) = \deg(I, B, 0) = 1$. Et par le théorème 2.3.17, on déduit l'existence de $x \in B$ tel que $f(x) = x$.

Corollaire 2.4.3. Si Ω est un ouvert convexe borné et non vide de $\mathbb{R}^N$ et $f \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega}, \overline{\Omega})$, alors f admet un point fixe dans $\overline{\Omega}$.

Théorème 2.4.4. ***"Théorème de Poincaré-Böhl"***
Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f,\ g : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ deux fonctions continues telles que $f(x) + \lambda\, g(x) \neq 0,\ \forall x \in \partial\Omega,\ \forall \lambda \geq 0$. Si $0 \notin g(\partial\Omega)$, alors

$$\deg(f, \Omega, 0) = \deg(g, \Omega, 0).$$

Preuve. Considérons la déformation convexe $H(x,t) = t\,f(x) + (1-t)\,g(x),\ \forall x \in \overline{\Omega},\ \forall t \in [0,1]$.

- $\star$ Si $t = 0$, alors $H(x,0) = g(x) \neq 0,\ \forall x \in \partial\Omega$;
- $\star$ Si $0 < t \leq 1$, alors $f(x) + \frac{1-t}{t}\, g(x) \neq 0,\ \forall x \in \partial\Omega$. D'où $H(x,t) = t\,f(x) + (1-t)\,g(x) \neq 0,\ \forall x \in \partial\Omega$.

Par conséquent, le degré topologique $\deg(H(.,t), \Omega, 0)$ est bien défini pour tout $t \in [0,1]$ et le résultat découle de l'invariance par homotopie (Proposition 2.3.6).

Corollaire 2.4.5. Supposons que $0 \in \Omega$ et $f(x) + \lambda\, x \neq 0,\ \forall x \in \partial\Omega,\ \forall \lambda \geq 0$ (resp. $\forall x \in \partial\Omega,\ \forall \lambda \leq 0$). Alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans Ω.

Preuve. Il suffit de remplacer g par Id (resp. $-Id$) dans le Théorème de Poincaré-Böhl 2.4.4.

Corollaire 2.4.6. "Théorème des applications surjectives"
Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ telle que

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} \frac{\langle f(x), x\rangle}{\|x\|} = +\infty. \tag{2.4.1}$$

Alors $f(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^N$.

Preuve. Pour $b \in \mathbb{R}^N$, on pose $g(x) = f(x) - b$. Alors g vérifie l'hypothèse de coercivité (2.4.1), ce qui entraine l'existence de $R > 0$ tel que $\langle g(x), x\rangle > 0$, $\forall x \in \partial B(0, R)$. On peut vérifier aisément que $g(x) + \lambda\, x \neq 0$, $\forall x \in \partial B(0, R)$, $\forall \lambda \geq 0$, sinon il existe $x \in \partial B(0, R)$, c'est-à-dire, $\|x\| = R$ tel que $\langle g(x), x\rangle + \lambda\, \|x\|^2 = 0$, ce qui est absurde. En appliquant le corollaire précédent, on déduit que l'équation $g(x) = 0$, c'est-à-dire, $f(x) = b$ admet au moins une solution $x \in \mathbb{R}^N$.

Remarque 2.4.7. Si $N = 1$, ce corollaire n'est autre que le théorème des valeurs intermédiaires.

2.5 Degré de Brouwer dans un espace vectoriel de dimension finie

Le degré topologique de Brouwer a été construit sur $\mathbb{R}^N$, c'est-à-dire, pour les applications définies sur des parties de $\mathbb{R}^N$. Considérons maintenant F un espace vectoriel normé de dimension finie N, il existe un isomorphisme $\varphi : \mathbb{R}^N \longrightarrow F$. Si Ω est un ouvert borné de F, $f : \overline{\Omega} \longrightarrow F$ est une fonction continue et $b \in F \backslash f(\partial\Omega)$, alors on peut définir le degré de Brouwer du triplet (f, Ω, b) comme étant celui du triplet $(\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi, \varphi^{-1}(\Omega), \varphi^{-1}(b))$, c'est-à-dire,

$$\deg_F(f, \Omega, b) = \deg(\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi, \varphi^{-1}(\Omega), \varphi^{-1}(b)).$$

Il est clair que $\deg_F$ satisfait les propriétés de normalisation, d'additivité et d'invariance par homotopie. Et d'après l'unicité de degré de Brouwer sur $\mathbb{R}^N$, on peut vérifier aisément que la définition de $\deg_F$ ne dépend pas de l'isomorphisme choisi φ.

Remarque 2.5.1. Soient $F \subset G$ deux espaces de dimension finie et Ω un ouvert borné de G. Si $g : \overline{\Omega} \longrightarrow F$ est continue et $b \in F \backslash g(\partial\Omega)$, alors les degrés $\deg_G(g, \Omega, b)$ et $\deg_F(g_{|\overline{\Omega \cap F}}, \Omega \cap F, b)$ sont bien définis, mais généralement ils sont différents. En particulier, si $g = Id - f$ est une perturbation de l'identité, alors les degrés précédents coïncident.

Proposition 2.5.2. Soient G un espace vectoriel normé de dimension finie et F un sous-espace de G. Si Ω est un ouvert borné de G, $f : \overline{\Omega} \longrightarrow F$ est une application continue et $b \in F$ tel que $b \notin (Id - f)(\partial\Omega)$, alors on a

$$\deg_G(Id - f, \Omega, b) = \deg_F(Id - f_{|\overline{\Omega \cap F}}, \Omega \cap F, b).$$

2.6 Exercices

Exercice 2.6.1. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $f(a).f(b) \neq 0$. Montrer que

$$\deg(f,]a, b[, 0) = \frac{1}{2}(\mathrm{sgn} f(b) - \mathrm{sgn} f(a)).$$

Exercice 2.6.2. Soient $\Omega =]-1,1[\times]-1,1[$ et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $f(x,y) = (y - x^3, y)$. Calculer le degré de Brouwer $\deg(f, \Omega, 0)$.

Exercice 2.6.3. Soient $\Omega =]-1,1[\times]-1,1[$ et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $f(x,y) = (\|(x,y)\|_\infty, 0)$. Montrer que $\deg(f,\Omega,0) = 0$.

Exercice 2.6.4. Soient $\Omega = B(0,R)$, $b = (1,0)$ et $f(x,y) = (x^3 - 3xy^2, -y^3 + 3x^2y)$. Déterminer $\deg(f,\Omega,b)$.

Exercice 2.6.5. Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ une fonction dans $\mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$ et $b_0 \notin f(\partial\Omega)$. Montrer que

$$\deg(f,\Omega,b_0) = \deg(f - b, \Omega, b_0 - b), \ \forall b \in \mathbb{R}^N.$$

Exercice 2.6.6. Soient $B = B(0,1)$ la boule unité de $\mathbb{R}^N$ et $f : \overline{B} \longrightarrow \overline{B}$ une application continue telle que $f(x) = x, \ \forall x \in \partial B$. Montrer que f est surjective.

Exercice 2.6.7. Soit $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ une application continue sur $B = \overline{B}(0,R)$ vérifiant l'hypothèse $\langle x, f(x)\rangle \geq 0, \ \forall x \in \partial B$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $\overline{B}(0,R)$.

Exercice 2.6.8. Soit N un entier impair.

1. Montrer que dans $\mathbb{R}^N$, il n'existe pas d'homotopie continue définie sur la sphère unité et joignant l'application identité I à $-I$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de fonction continue $f : \overline{B}(0,R) \longrightarrow \mathbb{R}^N\backslash\{0\}$ telle que $\langle x, f(x)\rangle = 0, \ \forall x \in S(0,R)$.

Exercice 2.6.9. "Démonstration du lemme 2.2.2"
Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ une fonction dans $\mathscr{C}^1(\Omega)\cap\mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$ telle que $0 \notin f(\partial\Omega)$. Soit $\psi : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue à support contenu dans $]0,\varepsilon[$ pour $0 < \varepsilon < \mathrm{dist}(0, f(\partial\Omega))$, telle que $\displaystyle\int_0^\infty t^{N-1}\psi(t)\,dt = 0$.

1. Soit g une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^{N-1}$. On pose $B_i = \det(\partial_1 g, \ldots, \partial_{i-1}g, \partial_{i+1}g, \ldots, \partial_N g)$. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^N (-1)^i \partial_i B_i = 0$.
2. En désignant par $A_{ij}(x)$ le cofacteur de $\partial_i f_j(x)$ dans $\mathcal{J}_f(x)$, montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^N \partial_i A_{ij} = 0$, pour tout j fixé dans $\{1,\ldots,N\}$.
3. Prouver que $\displaystyle\int_\Omega \psi(|f(x)|)\mathcal{J}_f(x)\,dx = 0$.

Chapitre 3

Degré topologique en dimension infinie "Degré de Leray-Schauder"

3.1 Introduction et motivation

Dans la résolution des équations aux dérivées partielles, on est constamment amené à utiliser des théorèmes de point fixe, qui doivent être généralement appliqués dans des espaces de dimension infinie. Au deuxième chapitre, nous avons vu que la notion du degré topologique dans un espace de dimension finie permettait de prouver le théorème de point fixe de Brouwer pour des applications continues d'un convexe fermé dans lui-même. Nous souhaitons maintenant construire un degré ayant la même finalité que le degré de Brouwer, mais en dimension infinie, c'est-à-dire un outil qui permette d'assurer l'existence de solution d'une équation de la forme $f(x) = b$, où f est définie sur un Banach X.
On se rend cependant vite compte, sur un exemple, qu'il n'y a aucun espoir en dimension infinie de construire un degré topologique pour toute application continue (et même pas toute application linéaire !). Considérons $X = \ell^\infty$, l'espace des suites $x = (x_n)_{n\geq 1}$ bornées, et $T : X \longrightarrow X$ le shift à droite, c'est-à-dire, $T(x) = (0, x_1, x_2, \dots)$. Soit H l'homotopie naturelle entre Id et T définie par $H(t, x) = t\,x + (1-t)\,T(x) = (tx_1, tx_2 + (1-t)x_1, tx_3 + (1-t)x_2, \dots)$. On constate que, pour tout $t \in [0,1]$, la seule solution de $H(t,x) = 0$ est la suite nulle. Si un degré (normalisé, additif et invariant par homotopie) existait pour toutes les applications continues sur X, on aurait donc $1 = \deg(Id, B(0,1), 0) = \deg(T, B(0,1), 0)$. Toujours en utilisant l'invariance par homotopie et puisque $\mathrm{dist}(0, T(\partial B(0,1))) = 1 > 0$, on aurait encore $\deg(T, B(0,1), z) = 1$ pour tout $z \in X$ proche de 0; en particulier, tout z proche de 0 aurait un antécédent par T, ce qui est clairement faux pour tout $z = (\varepsilon, 0, 0, \dots)$ dès que $\varepsilon \neq 0$.
Le degré topologique en dimension infinie ne pourra donc pas être défini pour toutes les applications continues d'un Banach X dans lui-même. Il existe plusieurs degrés en dimension infinie, qui ont justement pour principale différence la

classe de fonctions à laquelle chacun s'applique ; le degré que nous allons étudier ici, appelé degré de Leray-Schauder, est construit sur des perturbations compactes de l'identité, c'est-à-dire, des opérateurs sous la forme $I - T$ où T est compact et I désigne l'identité de X.

3.2 Construction du degré topologique de Leray-Schauder

On commence par quelques lemmes concernant les opérateurs compacts. Dans toute la suite X est un espace de Banach muni de la norme $\| \ \|$.

Lemme 3.2.1. Soit Ω un ouvert borné de X. Si $T : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ est compact et n'a pas de point fixe sur $\partial\Omega$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in \partial\Omega$ on ait

$$\|x - T\,x\| \geq \varepsilon.$$

Preuve. Sinon, il existe une suite $(x_n)_n$ de $\partial\Omega$ telle que $\|x_n - T\,x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Or T étant compact sur un borné $\overline{\Omega}$, alors il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ telle que $(T\,x_{n_k})_k$ converge vers $y \in X$ lorsque $k \to \infty$. On en déduit que $x_{n_k} \longrightarrow y$ et $y \in \partial\Omega$. D'après la continuité de T on a $T\,y = y$, ce qui signifie que $y \in \partial\Omega$ est un point fixe de T, ce qui contredit l'hypothèse sur T.

Lemme 3.2.2. Soient Ω un ouvert borné de X, $T : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ un opérateur compact sans point fixe sur $\partial\Omega$ et $\varepsilon > 0$ tel que $\|x - T\,x\| \geq 4\,\varepsilon,\ \forall x \in \partial\Omega$. Alors il existe un sous-espace vectoriel de dimension finie $E_\varepsilon \subset X$ et un opérateur $T_\varepsilon : \overline{\Omega} \longrightarrow E_\varepsilon$ tels que

$$\begin{aligned} &\|T_\varepsilon\,x - T\,x\| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \\ &\|x - T_\varepsilon\,x\| \geq 3\,\varepsilon, \quad \forall x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Preuve. Comme $T(\overline{\Omega})$ est relativement compact dans X, alors il existe $x_1, \ldots, x_n$ dans $T(\overline{\Omega})$ tels que $T(\overline{\Omega}) \subset \bigcup_{1\leq i\leq n} B(x_i, \varepsilon)$. Posons

$$\begin{aligned} \lambda_i(x) &= (\varepsilon - \|x - x_i\|)^+, && \text{pour } x \in X, \\ j_\varepsilon(u) &= \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(u)\,x_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(u)}, && \text{pour } u \in T(\overline{\Omega}). \end{aligned}$$

Soit $T_\varepsilon : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ l'application continue définie par $T_\varepsilon(x) = j_\varepsilon(T\,x)$. On a $T_\varepsilon(\overline{\Omega}) \subset E_\varepsilon$ l'espace vectoriel engendré par $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Remarquons que pour tout $u \in T(\overline{\Omega})$, on a $\lambda_i(u)\,\|u - x_i\| \leq \lambda_i(u)\,\varepsilon,\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$, ce qui entraîne que $\|u - j_\varepsilon(u)\| \leq \varepsilon,\ \forall u \in T(\overline{\Omega})$. Par conséquent,

$$\|T_\varepsilon(x) - T(x)\| \leq \varepsilon,\ \forall x \in \overline{\Omega}.$$

D'autre part, si $x \in \partial\Omega$, on a

$$\begin{aligned} \|x - T_\varepsilon x\| = & \ \|x - T\,x + T\,x - T_\varepsilon x\| \\ \geq & \ \|x - T\,x\| - \|T\,x - T_\varepsilon x\| \\ \geq & \ 3\,\varepsilon. \end{aligned}$$

Lemme 3.2.3. Soient Ω un ouvert borné de X, $T : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ un opérateur compact sans point fixe sur $\partial\Omega$ et $\varepsilon > 0$ tel que $\|x - T\,x\| \geq 4\,\varepsilon,\ \forall x \in \partial\Omega$. On suppose que $T_{1\varepsilon}$ et $T_{2\varepsilon}$ sont deux approximations de T, vérifiant pour tout $i \in \{1, 2\}$, $T_{i\varepsilon}(\overline{\Omega}) \subset E_\varepsilon$, où E_ε est un sous-espace de dimension finie de X. De plus, on suppose que

$$\begin{aligned} &\|T_{i\varepsilon}\,x - T\,x\| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \\ &\|x - T_{i\varepsilon}\,x\| \geq 3\,\varepsilon, \quad \forall x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Alors, si F est un sous-espace de dimension finie de X contenant E_ε tel que $\Omega_F = \Omega \cap F \neq \emptyset$, on a

$$\deg(I - T_{1\varepsilon}, \Omega_F, 0) = \deg(I - T_{2\varepsilon}, \Omega_F, 0).$$

Preuve. Les opérateurs $I - T_{i\varepsilon}$ sont définis sur $\overline{\Omega_F}$ à valeurs dans F, alors on peut parler de leurs degrés topologiques au sens de Brouwer. Soit $\partial\Omega_F = \partial\Omega \cap F$ le bord de Ω_F. Comme $T_{i\varepsilon}$ n'a pas de point fixe sur $\partial\Omega$, alors le degré de Brouwer de $I - T_{i\varepsilon}$ en 0 est bien défini. Considérons la déformation convexe $H(x,t) = t\,T_{1\varepsilon}(x) + (1-t)\,T_{2\varepsilon}(x),\ \forall x \in \overline{\Omega},\ \forall t \in [0,1]$. On vérifie sans peine que $\|H(x,t) - T\,x\| \leq \varepsilon,\ \forall t \in [0,1],\ \forall x \in \overline{\Omega}$ et en particulier pour tout $x \in \Omega_F$. D'autre part, pour tout $t \in [0,1]$, pour tout $x \in \partial\Omega$, et en particulier pour tout $x \in \partial\Omega_F$, on a

$$\|x - H(x,t)\| = \|x - T\,x + T\,x - H(x,t)\| \geq 3\,\varepsilon.$$

Par conséquent, $H \in \mathscr{C}(\Omega_F \times [0,1], F)$ est une homotopie admissible pour appliquer l'invariance du degré de Brouwer, ce qui implique que

$$\deg(I - H(.,0), \Omega_F, 0) = \deg(I - H(.,1), \Omega_F, 0).$$

Lemme 3.2.4. Soient E_n, E_p deux sous-espaces de dimension finie et ω un ouvert borné de $E_n \times E_p$. On suppose que $\omega_n = \omega \cap (E_n \times \{0\}) \neq \emptyset$, et en identifiant $E_n \times \{0\}$ à E_n on peut dire que $\omega_n \subset E_n$. Soient $\varphi \in \mathscr{C}(\overline{\omega}, E_n)$ et $f : E_n \times E_p \longrightarrow E_n \times E_p$ la fonction définie par $f(x,y) = (x - \varphi(x,y), y)$. On suppose que pour tout x tel que $(x, 0) \in \partial\omega$, on a $\varphi(x, 0) \neq (x, 0)$, et on considère la fonction f_0 définie sur $\overline{\omega_n}$ par $f_0(x) = x - \varphi(x, 0)$. Alors on a

$$\deg_{n+p}(f, \omega, 0) = \deg_n(f_0, \omega_n, 0),$$

où $\deg_n$ et $\deg_{n+p}$ sont les degrés topologiques dans E_n et $E_n \times E_p$ respectivement.

Preuve. D'abord les degrés sont bien définis, en effet pour tout $x \in \partial\omega_n \subset \partial\omega \cap (E_n \times \{0\})$ on a $f_0(x) = x - \varphi(x, 0) \neq 0$ d'après l'hypothèse $\varphi(x, 0) \neq (x, 0)$. Pour f on peut remarquer que si $(x, y) \in \partial\omega$ tel que $f(x, y) = (0, 0)$, alors $(x, y) = (\varphi(x, y), 0)$, ce qui implique que $\varphi(x, 0) = (x, 0)$, avec $(x, 0) \in \partial\omega$, ce qui contredit la même hypothèse.
Supposons que $\varphi \in \mathscr{C}^1(\overline{\omega}, E_n)$, alors f et f_0 sont de classe $\mathscr{C}^1$ et $(0_n, 0_p)$ (l'origine de $E_n \times E_p$) est une valeur régulière de f, alors que 0_n est une valeur régulière de f_0, puisque

$$\mathcal{D}f(x, y) = \begin{pmatrix} I_n - \partial_x\varphi(x, y) & -\partial_y\varphi(x, y) \\ 0 & I_p \end{pmatrix}.$$

D'autre part, $f(x, y) = (0, 0)$ si, et seulement si, $y = 0$ et $f_0(x) = 0$, d'où on déduit que $\mathcal{J}_f(x, 0) = \mathcal{J}_{f_0}(x)$. Par conséquent, on a d'après le lemme 2.3.12

$$\begin{aligned} \deg_{n+p}(f, \omega, 0) &= \sum_{(x,0)\in f^{-1}\{0\}} \operatorname{sgn}(\mathcal{J}_f(x, 0)) \\ &= \sum_{x\in f_0^{-1}\{0\}} \operatorname{sgn}(\mathcal{J}_{f_0}(x)) \\ &= \deg_n(f_0, \omega_n, 0). \end{aligned}$$

Maintenant pour généraliser, si $\varphi \in \mathscr{C}(\overline{\omega}, E_n)$, alors on considère une suite $(\varphi_j)_j$ dans $\mathscr{C}^1(\overline{\omega}, E_n)$ qui converge vers φ dans $\mathscr{C}(\overline{\omega}, E_n)$. On pose

$$f_j(x, y) = (x - \varphi_j(x, y), y) \quad \text{et} \quad f_{0j}(x) = x - \varphi_j(x, 0).$$

Alors, pour j assez grand, on a

$$\deg_{n+p}(f, \omega, 0) = \deg_{n+p}(f_j, \omega, 0) \quad \text{et} \quad \deg_n(f_0, \omega_n, 0) = \deg_n(f_{0j}, \omega_n, 0).$$

Ce qui entraîne le résultat cherché.

Théorème et définition 3.2.5. ***"Leray-Schauder"***
Soient X un espace de Banach, Ω un ouvert borné de X et $T : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ un opérateur compact sans point fixe sur $\partial\Omega$. $\varepsilon > 0$, $E_\varepsilon \subset X$ et $T_\varepsilon : \overline{\Omega} \longrightarrow E_\varepsilon$ étant donnés par les lemmes 3.2.1 et 3.2.2. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie tel que $E_\varepsilon \subset F$ et $\Omega_F = \Omega \cap F \neq \emptyset$. Alors le degré $\deg_F(I_F - T_\varepsilon, \Omega_F, 0_F)$ est bien défini et on le définit comme le degré topologique de Leray-Schauder de l'opérateur $I - T$, c'est-à-dire,

$$\deg(I - T, \Omega, 0) = \deg_F(I_F - T_\varepsilon, \Omega_F, 0_F).$$

Cette définition ne dépend que de T et de Ω. De plus, si $b \in X$ tel que $b \notin (I-T)(\partial\Omega)$, le degré de $I-T$ dans Ω par rapport à la cible b est défini comme étant

$$\deg(I-T,\Omega,b) = \deg(I-T-b,\Omega,0).$$

Preuve. D'après les propriétés de ε, T_ε et E_ε, on a

$$\begin{aligned} \|T_\varepsilon x - T x\| &\leq \varepsilon, \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \\ \|x - T_\varepsilon x\| &\geq 3\,\varepsilon, \quad \forall x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Par conséquent, si $\Omega_F \neq \emptyset$ alors le degré $\deg_F(I_F - T_\varepsilon, \Omega_F, 0_F)$ est bien défini d'après le lemme 3.2.3. Pour vérifier qu'il ne dépend que de T et de Ω, considérons pour $i \in \{1,2\}$, $\varepsilon_i > 0$, T_{ε_i}, E_{ε_i} et F_i comme ci-dessus et montrons que le degré est le même. Pour cela on appliquera le lemme 3.2.4 dans un espace de dimension finie contenant F_1 et F_2. Soient $F = F_1 \times F_2$, $\Omega_F = \Omega \cap F$. Alors en désignant par $\deg_F$ le degré topologique de Brouwer dans F, on sait, d'après le lemme 3.2.3, que

$$\deg_F(I_F - T_{\varepsilon_1}, \Omega_F, 0_F) = \deg_F(I_F - T_{\varepsilon_2}, \Omega_F, 0_F).$$

Par ailleurs, d'après le lemme 3.2.4, pour $i \in \{1,2\}$ on a

$$\deg_F(I_F - T_{\varepsilon_i}, \Omega_F, 0_F) = \deg_{F_i}(I_{F_i} - T_{\varepsilon_i}, \Omega_{F_i}, 0_{F_i}).$$

Finalement on en conclut que

$$\deg_{F_1}(I_{F_1} - T_{\varepsilon_1}, \Omega_{F_1}, 0_{F_1}) = \deg_{F_2}(I_{F_2} - T_{\varepsilon_2}, \Omega_{F_2}, 0_{F_2}).$$

On remarque également que si T est compact et $b \notin (I-T)(\partial\Omega)$, l'application $x \longmapsto b + T\,x$ est compacte et n'a pas de point fixe sur $\partial\Omega$. Par conséquent la définition du degré de $I-T$ dans Ω par rapport à la cible b a un sens.

3.3 Propriétés du degré de Leray-Schauder

Dans toute la suite on suppose que X est un espace de Banach, Ω est un ouvert borné de X et $T : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ est un opérateur compact. La démonstration des propriétés suivantes découle de la définition du degré de Leray-Schauder, ainsi que les propriétés analogues du degré de Brouwer.

Proposition 3.3.1. Soient Ω un ouvert borné d'un Banach X et $b \in X$. En désignant par I l'application identité, on a

$$\deg(I,\Omega,b) = \begin{cases} 1 & \text{si } b \in \Omega; \\ 0 & \text{si } b \notin \overline{\Omega} \end{cases}$$

Proposition 3.3.2. Soient Ω_1, Ω_2 deux ouverts bornés disjoints de X et $T : \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2} \longrightarrow X$ un opérateur compact sans point fixe sur $\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$, alors

$$\deg(I-T,\Omega_1 \cup \Omega_2, 0) = \deg(I-T,\Omega_1,0) + \deg(I-T,\Omega_2,0).$$

Proposition 3.3.3. Si $b \in X$ tel que pour tout $u \in \overline{\Omega}$ on a $u - Tu \neq b$, alors

$$\deg(I - T, \Omega, b) = 0.$$

Corollaire 3.3.4. Si $b \in X$ tel que pour tout $u \in \partial\Omega$ on a $u - Tu \neq b$ et $\deg(I - T, \Omega, b) \neq 0$, alors il existe $u \in \Omega$ tel que $u - T\,u = b$.

Proposition 3.3.5. Soient T_1, T_2 des applications compactes de $\overline{\Omega}$ dans X et $b \in X$ tels que $\text{dist}(b, T_1(\partial\Omega) \cup T_2(\partial\Omega)) > 4\,\varepsilon > 0$ et $\sup\limits_{u \in \overline{\Omega}} \|T_1\,u - T_2\,u\| \leq \varepsilon$. Alors on a

$$\deg(I - T_1, \Omega, b) = \deg(I - T_2, \Omega, b).$$

Corollaire 3.3.6. Soient $b \in X$ et $H : \overline{\Omega} \times [0, 1] \longrightarrow X$ une application compacte telle que $u - H(u, t) \neq b$, $\forall (u, t) \in \partial\Omega \times [0, 1]$. Alors le degré $\deg(I - H(., t), \Omega, b)$ est constant pour tout $t \in [0, 1]$. C'est-à-dire,

$$\deg(I - H(., t), \Omega, b) = \deg(I - H(., 0), \Omega, b), \quad \forall t \in [0, 1].$$

Proposition 3.3.7. Soient b, $b' \in X$ tels que b, $b' \notin (I - T)(\partial\Omega)$. Si b et b' appartiennent à la même composante connexe de $X \backslash (I - T)(\partial\Omega)$, alors on a

$$\deg(I - T, \Omega, b) = \deg(I - T, \Omega, b').$$

Exercice **3.3.1. "Devoir : Théorème de Borzuk"**

1. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, symétrique par rapport à l'origine ($\Omega = -\Omega$) et $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ une application continue, impaire telle que $0 \notin f(\partial\Omega)$.
   (a) Si $0 \notin \overline{\Omega}$, montrer que le degré de Brouwer $\deg(f, \Omega, 0)$ est pair.
   (b) Si $0 \in \Omega$, montrer que le degré de Brouwer $\deg(f, \Omega, 0)$ est impair.
2. Soient X un espace de Banach, $\Omega \subset X$ un ouvert borné contenant l'origine et symétrique par rapport à celui-ci et $K : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ une application compacte et impaire tels que $0 \notin (I - K)(\partial\Omega)$. Montrer que le degré de Schauder $\deg(I - K, \Omega, 0)$ est impair.

3.4 Applications

3.4.1 Théorème du point fixe de Schauder

Théorème 3.4.1. ***"Théorème du point fixe de Schauder"***
Soient C un ensemble non vide convexe, fermé et borné d'un espace de Banach X et $K : C \longrightarrow C$ une application compacte. Alors K admet au moins un point fixe.

Preuve. (*a*) 1ère étape : On suppose que $C = \overline{B}(0, R)$ une boule fermée. Si K admet un point fixe appartient à ∂C, il n'y a rien à démontrer. Sinon, pour tout $t \in [0, 1]$, on pose $K_t = I - t\,K$, alors le degré $\deg(K_t, B(0, R), 0)$ est bien défini. En effet, s'il existe $x \in \partial C$ tel que $t\,K(x) = x$, alors $R = \|x\| = t\,\|K(x)\| \leq t\,R$, car $K(C) \subset C$, d'où $t = 1$. Ce qui contredit le fait que $\|K(x)\| = R = \|x\|$. Le degré est donc bien défini et vaut, par homotopie, $\deg(K, B(0, R), 0) = \deg(I, B(0, R), 0) = 1$, d'où le résultat.

(*b*) 2ème étape : C est un ensemble non vide convexe, fermé et borné. En utilisant le diagramme $B \xrightarrow{R} C \xrightarrow{K} B$, où B est une boule contenant C et $R : X \longrightarrow C$ est une rétraction continue (c'est-à-dire$R|_C = Id_C$), on déduit que l'application $K \circ R$ est compacte puisque K est compacte et R est bornée. D'après la première étape, l'application $K \circ R$ admet au moins un point fixe $x_0 \in B$, c'est-à-dire, $x_0 = (K \circ R)(x_0)$. Or $R(x_0) \in C$ et $K(C) \subset C$, alors $(K \circ R)(x_0) \in C$ et donc $x_0 \in C$. D'où le résultat.

Corollaire 3.4.2. Soient C un sous-ensemble non vide, convexe et compact d'un espace de Banach X et $f : C \longrightarrow C$ une application continue. Alors f admet au moins un point fixe.

Preuve. Exercice.

Corollaire 3.4.3. Soient C un sous-ensemble non vide, convexe et fermé (non nécessairement borné) d'un espace de Banach X et $f : C \longrightarrow C$ une application continue tel que $f(C)$ est inclus dans un compact de C. Alors f admet au moins un point fixe.

Preuve. Soit A le compact de C qui contient $f(C)$, c'est-à-dire, $f(C) \subset A \subset C$. En posant $A_0 = \overline{\mathrm{Conv}(A)}$, on obtient un point fixe dans A_0, c'est-à-dire, dans C (puisque A_0 est convexe et compact et $f(A_0) \subset A \subset A_0 \subset C$).

Théorème 3.4.4. ***"Alternative non linéaire de Leray-Schauder"***
Soient Ω un ouvert borné d'un espace de Banach X et $K : \Omega \longrightarrow X$ une application compacte. Alors au moins l'une des assertions (i) ou (ii) est satisfaite :

(i) *K admet au moins un point fixe dans Ω.*

(ii) $\exists x \in \partial\Omega,\ \exists t \in [0, 1]$ *tels que* $x = t\,K(x)$.

Preuve. Si la condition (ii) n'est pas satisfaite, alors l'assertion suivante a lieu :

$$\forall x \in \partial\Omega,\ \forall t \in [0, 1] \text{ on a } (I - t\,K)(x) \neq 0.$$

Le degré $\deg(I - t\,K, \Omega, 0)$ est donc bien défini, et vaut, par homotopie, $\deg(I, \Omega, 0) = 1$. En particulier, pour $t = 1$, on déduit que K admet au moins un point fixe dans Ω.

Corollaire 3.4.5. Soient X un espace de Banach et $K : X \longrightarrow X$ une application compacte satisfaisant l'hypothèse suivante

$$(\mathcal{H}) : \quad \exists R > 0, \ \forall t \in [0,1], \ \ t\,K(x) = x \Longrightarrow x \in B(0,R).$$

Alors K admet au moins un point fixe dans $B = B(0,R)$.

Remarques 3.4.6.

1. $(\mathcal{H})$ est une hypothèse d'estimation à priori ;
2. Ce corollaire est équivalent au théorème du point fixe de Schauder ;
3. Ce corollaire possède aussi la version de Schaefer suivante :

Théorème 3.4.7. ***"Théorème de Schaefer"***
Soient X un espace de Banach et $K : X \longrightarrow X$ une application compacte. Alors on a l'alternative suivante :
Ou bien, l'équation $t\,K(x) = x$ admet une solution pour tout $t \in [0,1]$.
Ou bien, l'ensemble $S = \{x \in X \mid \exists t \in [0,1], \ t\,K(x) = x\}$ est non borné.

3.4.2 Application aux E.D.O

Soient E un espace de Banach et $f : \mathbb{R} \times E \longrightarrow E$ une application continue dans un voisinage d'un point $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times E$ (Pour simplifier, on peut supposer que $t_0 = 0$). Considérons le problème différentiel aux valeurs initiales suivant

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in I, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{3.4.1}$$

Le champ f et la condition initiale y_0 sont donnés, mais d'une part on ne suppose pas que f est lipschitzienne par rapport à y (ce qui empêche d'appliquer le théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz), et d'autre part l'espace dans lequel évolue y n'est pas forcément de dimension finie (de sorte que le théorème de Cauchy-Peano usuel ne s'applique pas non plus).

Théorème 3.4.8. ***"Théorème de Cauchy-Peano en dimension infinie"***
Soient E un espace de Banach et $f : \mathbb{R} \times E \longrightarrow E$ une application compacte. Alors pour tout $y_0 \in E$, il existe $T > 0$ tel que l'équation différentielle (3.4.1) a au moins une solution sur $I = [-T, T]$.

Preuve. On cherche $T > 0$ et $y \in \mathscr{C}([-T,T]\,; E)$ qui vérifie

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s))\,ds, \quad \forall t \in [-T, T]. \tag{3.4.2}$$

Soit $\Phi_T : \mathscr{C}([-T,T];E) \longrightarrow \mathscr{C}([-T,T];E)$ définie par $\Phi_T(y) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s))\,ds$. On vérifie aisément que Φ_T est bien définie, c'est-à-dire, $\Phi_T(y) \in \mathscr{C}([-T,T]\,; E)$, $\forall y \in \mathscr{C}([-T,T]\,; E)$. D'abord on a Φ_T est continue. En effet, si $y_n \longrightarrow y$

dans $\mathscr{C}([-T,T]\,;E)$, alors l'ensemble $\{y_n(t)\,;\ n \geq 1,\ t \in [-T,T]\}$ est borné par un certain réel $M > 0$. La fonction compacte f envoie alors $[-T,T] \times \overline{B}(0,M)$ sur un ensemble borné de E, ce qui implique que la quantité $\|f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))\|$ est uniformément bornée. Par ailleurs on a

$$\sup_{t\in[-T,T]} \|\Phi_T(y_n)(t) - \Phi_T(y)(t)\| \leq \int_{-T}^{T} \|f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))\|\, ds.$$

Par la continuité de f, on a $\|f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))\| \longrightarrow 0$ lorsque $n \to \infty$, alors en appliquant le théorème de la convergence dominée, on obtient $\Phi_T(y_n) \longrightarrow \Phi_T(y)$ dans $\mathscr{C}([-T,T]\,;E)$.

En suite, en appliquant le théorème d'Ascoli-Arzela, on prouve que Φ_T est compacte. Soit $(y_n)_n$ une suite bornée dans $\mathscr{C}([-T,T]\,;E)$. On a

$$\|\Phi_T(y_n)(t) - \Phi_T(y_n)(t')\| \leq \left| \int_{t'}^{t} \|f(s,y_n(s))\|\, ds \right|.$$

Or $Y = \{f(s,y_n(s))\,;\ n \geq 1,\ s \in [-T,T]\}$ est borné par un certain réel $M' > 0$, alors $\|\Phi_T(y_n)(t) - \Phi_T(y_n)(t')\| \leq M'\,|t-t'|$, ce qui entraîne l'équicontinuité de $\{\Phi_T(y_n)\ ;\ \ n \geq 1\}$. Par ailleurs, la compacité de f montre en fait que Y est relativement compact dans E. Cela permet de déduire que son enveloppe convexe $\mathrm{Conv}(Y)$ est aussi relativement compact. En effet, pour un arbitraire $\varepsilon > 0$, on recouvre Y par un nombre fini de boules $(B(y_i,\varepsilon))_{i\in\{1,\dots,k\}}$, alors on a $\mathrm{Conv}(Y) \subset \mathrm{Conv}\{y_1,\dots,y_k\} + B(0,\varepsilon)$. Or $\mathrm{Conv}\{y_1,\dots,y_k\}$ est borné et de dimension finie, alors il est compact et peut donc lui aussi se recouvrir par un nombre fini de boules de rayon ε. Ce qui recouvre $\mathrm{Conv}(Y)$ par un nombre fini de boules de rayon 2ε.

Comme $f(s,y_n(s)) \in Y$ pour tout $n \geq 1$ et tout $s \in [-T,T]$, il est assez aisé de montrer que $\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t f(s,y_n(s))\, ds \in \overline{\mathrm{Conv}(Y)}$ (on peut raisonner sur des suites de Riemann qui approchent l'intégrale, et $\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t f(s,y_n(s))\, ds$ apparaitra comme une moyenne de points de Y). Ainsi $\displaystyle\int_0^t f(s,y_n(s))\, ds \in t\,\overline{\mathrm{Conv}(Y)}$ qui est compact. Cela montre donc que $(\Phi_T(y_n)(t))_{n\geq 1}$ reste dans un compact de E, et conclut la vérification des hypothèses du théorème d'Ascoli-Arzela. Φ_T envoie donc les bornés de $\mathscr{C}([-T,T]\,;E)$ sur des ensembles relativement compacts.

Pour appliquer le théorème du point fixe de Schauder, il suffit d'exhiber un $T > 0$ et un $R > 0$ tels que Φ_T envoie $\overline{B}(0,R)$ dans elle-même. Prenons $R = \|y_0\| + 1$ et K un majorant de f sur $[-1,1] \times \overline{B}(0,R)$. Si on choisit $T \leq 1$ et $y \in \mathscr{C}([-T,T];E)$ est bornée par R, alors on a

$$\sup_{t\in[-T,T]} \|\Phi_T(y)(t)\| \leq \|y_0\| + \int_{-T}^{T} \|f(s,y(s))\|\, ds \leq \|y_0\| + 2\,T\,K,$$

et il suffit donc de choisir $T < \inf(1, \frac{1}{2\,K})$ pour que $\Phi_T(y)$ reste borné par R sur $[-T,T]$. Ce choix de T conclut donc la preuve du théorème.

Théorème 3.4.9. *Soient E un espace de Banach, $x_0 \in E$, I un intervalle compact de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $f : I \times E \longrightarrow E$ une application compacte. Supposons qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $\lambda \in [0,1]$, toute solution de*

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda f(t, x(t)) & t \in I, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{3.4.3}$$

reste bornée par M. Alors l'équation (3.4.1) admet au moins une solution sur I.

Preuve. Une solution de (3.4.1) est un point fixe de $\Phi : \mathscr{C}(I,E) \longrightarrow \mathscr{C}(I,E)$ définie par

$$\Phi(x)(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))\, ds.$$

Comme dans la preuve du théorème 3.4.8, on constate que Φ est compacte sur $\mathscr{C}(I,E)$. Soit H l'homotopie entre $Id - \Phi$ et $Id - x_0$ définie sur $\mathscr{C}(I,E) \times [0,1]$ par $H(x,\lambda)(t) = x_0 + \lambda \int_0^t f(s,x(s))\, ds$. Si $x - H(x,\lambda) = 0$, alors x est une solution de (3.4.3), d'où x est bornée par M. En prenant $R > M$, on est donc assuré que $0 \notin (Id - H(.,\lambda))(\partial B(0,R))$. Par la même justification utilisée pour Φ, on peut vérifier que H est compacte, et l'invariance par homotopie montre que $\deg(Id - \Phi, B(0,R), 0) = \deg(Id - x_0, B(0,R), 0)$. Finalement il suffit de choisir en plus $R > \|x_0\|$ et d'appliquer l'invariance par translation pour déduire que $\deg(Id - x_0, B(0,R), 0) = \deg(Id, B(0,R), x_0) = 1$. Ce qui entraîne que Φ admet un point fixe d'après le corollaire 3.3.4.

3.4.3 Application aux E.D.P : Une E.D.P semi-linéaire

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ étant un ouvert borné, de frontière $\partial\Omega$ régulière. On considère le problème aux limites suivant

$$(\mathscr{P}) \quad \begin{cases} -\Delta u + g(x,u) = f(x), & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega; \end{cases}$$

où $f \in L^2(\Omega)$ et $g : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory vérifiant les hypothèses suivantes :

- ★ $(\mathcal{H}_1)$: L'opérateur de Nemytskii G définie par $G(u)(x) = g(x, u(x))$ est continu de $L^2(\Omega)$ vers $L^2(\Omega)$ (et donc bornée de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$).
- ★ $(\mathcal{H}_2)$: L'hypothèse de signe :

$$g(x,s).s \geq 0, \ \forall s \in \mathbb{R} \text{ et p.p. dans } \Omega.$$

Théorème 3.4.10. *Sous les hypothèses précédentes, le problème $(\mathscr{P})$ admet au moins une solution $u \in H_0^1(\Omega)$.*

Remarque 3.4.11. L'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$ est réalisée si g vérifie, par exemple, la condition de croissance suivante

$$|g(x,s)| \leq a(x) + \lambda\, |s|, \ \forall s \in \mathbb{R} \text{ et p.p. dans } \Omega,$$

où $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et $a \in L^2(\Omega)$. En particulier, lorsque $g(x,s) = g(s)$, cette condition de croissance sous-linéaire équivaut à

$$\overline{\lim_{|s|\to+\infty}} \frac{g(s)}{s} \text{ est finie.}$$

En effet, si (u_n) est une suite convergente vers u dans $L^2(\Omega)$, alors elle admet une sous-suite (u_{n_k}) qui converge presque partout dans Ω vers u et il existe $\overline{u} \in L^2(\Omega)$ tel que $|u_{n_k}(x)| \leq |\overline{u}(x)|$ p.p. dans Ω. La fonction g étant continue par rapport à la seconde variable, alors la suite $g(x, u_{n_k}(x))$ converge p.p. vers $g(x,u(x))$ et on a l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
\|G\,u_{n_k}\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |g(x,u_{n_k}(x))|^2\,dx \leq & \; 2\int_\Omega |a(x)|^2 + \lambda^2 |u_{n_k}(x)|^2\,dx \\
\leq & \; 2\int_\Omega |a(x)|^2\,dx + 2\lambda^2 \int_\Omega |\overline{u}(x)|^2\,dx \\
\leq & \; C^{\text{te}}.
\end{aligned}$$

D'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on déduit que $G\,u_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} G\,u$ dans $L^2(\Omega)$.

Preuve. On considère l'espace de Hilbert $X = L^2(\Omega)$ muni de la norme $\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$, puis on définit, pour tout $t \in [0,1]$, l'application $K_t : X \longrightarrow X$ définie par $K_t(u) = U_t \in X$ où U_t est la solution du problème linéaire

$$(\mathscr{P}_t) \quad \begin{cases} -\Delta\,U_t + t\,g(x,u) = t\,f(x), & \text{dans } \ \Omega, \\ U_t = 0, & \text{sur } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

D'après l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$, on a $g(x,u) \in X$ pour tout $u \in X$. De plus $f \in X$, alors le problème $(\mathscr{P}_t)$ admet, en vertu du théorème de Lax-Milgram, une unique solution $U_t \in H^1_0(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. L'application K_t est donc bien définie. Par conséquent, u est une solution de $(\mathcal{P})$ si, et seulement si, u est un point fixe de K_1. l'idée de la preuve s'articule autour de la non nullité du degré de l'application $I - K_t$ relativement à un ouvert Ω et par rapport à la cible 0. Ω sera une boule contenant toutes les solutions éventuelles : ce sont les estimations à priori.

$i)$ **Estimation à priori** : Soit u un point fixe de K_t. Dans $(\mathcal{P}_t)$ en effectuant le produit scalaire par u et en intégrant par la formule de Green, on obtient

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx = t\int_\Omega (f - g(x,u))\,u\,dx.$$

En utilisant l'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$, les inégalités de Cauchy-Schwarz 1.1.4 et de Poincaré 1.2.25, on déduit que $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_0\,\|f\|_{L^2(\Omega)}$ et par suite $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1\,\|f\|_{L^2(\Omega)}$. En choisissant $R > C_1\,\|f\|_{L^2(\Omega)}$, on en déduit qu'aucune solution U_t ne se trouve sur la frontière de la boule $B(0,R)$ et ce pour tout $t \in [0,1]$. Par conséquent, le degré $\deg(I - K_t, B(0,R), 0)$ sera bien définie si K_t est un opérateur continu compact.

ii) **K_t est continu** : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers u dans X. Soient (U_{t_n}) et U leurs images respectives par l'application K_t. Alors $-\Delta(U_{t_n} - U) + t\,(g(x,u_n) - g(x,u)) = 0$. La même justification utilisée dans la 1$^{\text{ère}}$ étape *i)* (L'estimation à priori) montre que $\|U_{t_n} - U\|_{L^2(\Omega)} \leq C\,\|g(.,u_n) - g(.,u)\|_{L^2(\Omega)}$. Et l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$ implique la convergence de (U_{t_n}) vers U dans X.

iii) **K_t est compact** : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bernée dans X et (U_{t_n}) son image par l'application K_t. La suite $(g(.,u_n))_n$ est alors bornée dans X. Comme dans l'estimation à priori *i)*, en multipliant (par produit scalaire) l'équation $(\mathcal{P}_t)$ par U_{t_n} et en intégrant sur Ω, on obtient que $(U_{t_n})_n$ est borné dans $H^1(\Omega)$ qui s'injecte de manière compacte dans $L^2(\Omega) = X$ d'après le théorème de Rellich-Kondrachov 1.2.23. Ce qui implique l'existence d'une sous-suite $(U_{t_{n_k}})_k$ qui converge fortement vers une fonction u dans X. D'où la compacité de l'opérateur K_t.

iv) **Conclusion** : Le degré de Schauder $\deg(I - K_t, B(0,R), 0)$ est bien défini et vaut, d'après l'invariance par homotopie, $\deg(I - K_1, B(0,R), 0) = \deg(I, B(0,R), 0) = 1 \neq 0$. Alors le problème $(\mathscr{P}) = (\mathscr{P}_1)$ admet au moins une solution dans l'espace X.

FIN.

Bibliographie

- H. Brézis ; Analyse fonctionnelle : Théorie et applications, Dunod,1999.
- J. Droniou ; Degrés topologiques et applications, Département de Mathématiques, Université Montpellier II, 2006.
- D. George et M. Jean, Brouwer Degree and Applications, 2009.
- O. Kavian ; Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques, Springer-Verlag, 1993.