Correction de la série de TD n°3

Exercice 1. Soit $f_n : \mathbb{R}+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x + \dfrac{1}{n}$ et soit $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n}}$.

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}+$ mais pas $(f_n^2)_{n\geq 1}$.
2. Montrer que chaque fonction g_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et que la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction g qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

Solution. 1. On a $|f_n(x) - x| = \dfrac{1}{n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$. Donc, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x) - x| \leq \dfrac{1}{n} \to 0$ ce qui implique que $(f_n)\, n \geq 1$ converge uniformément vers la fonction identité sur $\mathbb{R}^+$. Cependant, $f_n^2(x) = x^2 + 2x\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$ et donc

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^+} \left|f_n^2(x) - x^2\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \left(\frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \infty \nrightarrow 0,$$

quand $n \to +\infty$. Cela implique que la suite $(f_n^2)_{n\geq 1}$ ne converge pas uniformément vers x^2 sur $\mathbb{R}^+$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} g_n(x) - g(x) &= \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| \\ &= \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|}. \end{aligned}$$

Donc, $|g_n(x) - g(x)| \leq \dfrac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors quand $n \to +\infty$, on a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x) - g(x)| \to 0,$$

donc $(g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers $g(x) = |x|$ sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Cependant, $g(x) = |x|$ n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ en $x = 0$, car $g'(0^-) = -1$ et $g'(0^+) = 1$.

Exercice 2. Soit $(F_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$F_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}.$$

1. Vérifier que F_n converge simplement et uniformément sur $[-1,1]$ vers 0.
2. Étudier la convergence simple de F_n' sur $[-1,1]$.
3. A-t-on la convergence uniforme de F_n' sur $[-1,1]$?
4. Soit $(G_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par

$$G_n(x) = \frac{\ln(1+n^2x^2)}{2n^2}.$$

   Montrer que $(G_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers 0 (remarquer que $G_n' = F_n$).

Solution. 1) • F_n est définie sur $[-1,1]$ vérifiant $F_n(0) = 0$, de plus on a F_n est impaire et pour $x \in]0,1]$

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0,$$

ce qui implique que $F_n \xrightarrow{c.s} 0 \quad$ sur $[-1,1]$.
• Soit $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction F_n est dérivable sur $[-1,1]$ et

$$F_n'(x) = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}.$$

On déduit que F_n atteint son maximum sur $[0,1]$ au point $\dfrac{1}{n}$. Puisque $|F_n|$ est paire sur $[-1,1]$, alors

$$\sup_{x\in[-1,1]} |F_n(x) - 0| = \sup_{x\in[0,1]} |F_n(x)| = \sup_{x\in[0,1]} F_n(x) = F_n\Big(\frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Ainsi, F_n converge uniformément sur $[-1,1]$ vers la fonction F identiquement nulle sur $[-1,1]$.
2) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a pour tout $x \in [-1,1]$

$$F_n'(x) = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$$

Pour $x = 0$, on a $F_n'(0) = 1$.
Pour $x \neq 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n'(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2x^2} = 0$.
en conclusion $\quad F_n' \xrightarrow{c.s} H$ sur où H est la fonction définie sur $[-1,1]$ par

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \neq 0 \end{cases}$$

3) la convergence de F'_n vers H sur $[-1,1]$ ne peut pas être uniforme puisque toutes les fonctions F'_n sont continues sur $[-1,1]$ alors que la fonction limite H est discontinue en 0. [1]
4) On vérifie que pour tout n, $G'_n = F_n$ sur $[-1,1]$. Puisque F_n est continue sur $[-1,1]$, G_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$ et d'après le résultat de la question 1) la suite F_n converge uniformément vers 0 sur $[-1,1]$ d'ou l'en déduit que

$$G'_n \xrightarrow{c.u} 0 \quad \text{sur } [-1,1].$$

D'autre part, on a $G_n(0) = 0$ pour tout n, ce qui implique que la suite $(G_n(0))_n$ est convergente.
D'après le théorème de dérivation, on déduit que la suite G_n converge uniformément sur $[-1,1]$ vers $0 + \displaystyle\int_0^x F(t)\,dt$. En conlusion

$$G_n \xrightarrow{c.u} 0 \quad \text{sur } [-1,1].$$

<u>Exercice</u> 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définies par

$$f_n(x) = \frac{e^{-x}}{1+n^2x^2} \text{ et on pose } u_n = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

1. Vérifier que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f sur $[0,1]$.
2. Montrer que f n'est pas continue sur $[0,1]$.
3. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?
4. Soit $a \in]0,1[$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a,1]$ on a
$$|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) \leqslant \frac{e^{-a}}{1+n^2a^2}.$$
5. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,1]$, pour tout $a \in]0,1[$.
6. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Solution. 1. 1. Soit $x \in [0,1]$. Si $x = 0, f_n(0) = 1$.
Si $x \in]0,1]$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. On en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]0,1] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 \neq 1 = f(0)$. Donc f n'est pas continue en 0 et par conséquent f n'est pas continue sur $[0,1]$.
3. Comme f n'est pas continue sur $[0,1]$, alors la suite de fonctions (f_n) ne converge

[1] La limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue.

pas uniformément sur $[0,1]$.
4. Soit $a \in]0,1[$. Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [a,1]$, ainsi $x \geqslant a$, alors $e^{-x} \leqslant e^{-a}$ et $1+n^2x \geqslant 1+n^2a$, ce qui implique que $e^{-x} \leqslant e^{-a}$ et $\dfrac{1}{1+n^2x} \leqslant \dfrac{1}{1+n^2a}$. Comme la quatre membres des inégalités est positivistes et f est nulle sur $[a,1]$, on trouve le résultat demandé.
5. D'après la question précédente on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a,1]$ on a

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{e^{-a}}{1+n^2a^2}.$$

Donc $\sup_{x\in[a,1]} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-a}}{1+n^2a^2}$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{-a}}{1+n^2a^2} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in[a,1]} |f_n(x) - f(x)| = 0$. Par conséquent la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,1]$ vers la fonction $g_a = f/[a,1] = 0$. pour tout $a \in]0,1[$.
6. Les fonctions f_n sont intégrables (continues) sur $[0, \frac{1}{2}]$ et la suite (f_n) converge uniformément sur $[\frac{1}{2}, 1]$ vers la fonction $g_{1/2} = 0$. Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{2}}^{1} f_n(t)dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\ dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} g_{1/2}(t)\ dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} 0\ dt = 0.$$

Exercice 4. On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} u_n(x)$ de terme général

$$u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2}.$$

1. Étudier la convergence simple et uniforme de cette série. Soit $S(x)$ sa somme.
2. Montrer que S est continue sur $[0,+\infty[$.
3. Montrer que S est dérivable sur tout intervalle $[a,+\infty[$, avec $a > 0$.

Solution. 1. • Pour $x < 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = +\infty$, donc $\sum u_n(x)$ diverge.
• Pour $x \geqslant 0, -nx \leqslant 0 \Rightarrow e^{-nx} \leqslant 1 \Rightarrow \dfrac{e^{-nx}}{1+n^2} \leq \dfrac{1}{1+n^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$, donc

$$0 \leq u_n(x) \leq \frac{1}{n^2}, \forall x \geqslant 0$$

et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ CV (série de Riemann), alors $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(x)$ st normalement convergente sur $[0,+\infty[$, ce qui implique que la série est simplement, absolument et uniformément CV sur $[0,+\infty[$.
2. $\forall\ n \geq 1$, u_n est continue sur $[0,+\infty]$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(x)$ converge uniformément vers S Sur $[0,+\infty[$, donc S est continue sur $[0,+\infty[$ d'après le théorème de continuité.

3) • On a u_n est dérivable sur $[a, +\infty[$ et $u_n'(x) = \dfrac{ne^{-nx}}{1+n^2}$.

• La série $\sum u_n(x)$ est converge simplement sur $[a, +\infty[$ pur $a > 0$ d'après 1.

• $|u_n'(x)| \leq \dfrac{ne^{-na}}{1+n^2}$ $\forall\ x \in [a, +\infty[$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 \dfrac{ne^{-na}}{1+n^2} = 0$, donc $\dfrac{ne^{-na}}{1+n^2} = o(\dfrac{1}{n^2})$ au voisinage de $+\infty$. D'après une règle de comparaison et puisque la série de Riemann $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge, alors aussi la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{ne^{-na}}{1+n^2}$ converge, d'où la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n'(x)$ est normalement convergente. Ceci implique que $\sum\limits_{n\geq 1} u_n'(x)$ est uniformément convergente sur $[a, +\infty[$.

Donc d'après le théorème de dérivation de la somme d'une série, S est dérivable sur $[a, +\infty[$.

<u>**Exercice**</u> **5.** Pour $x > 0$; on pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{x+n}$.

a) Montrer que f est bien définie $\Big(\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^n}{x+n}$ est convergente pour $x > 0\Big)$.

b) Montrer que f est de classe C^1 (f continue, dérivable et que f' est continue) sur $]0, +\infty[$.

Solution. a) Pour $x > 0$ fixé $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^n}{x+n}$ est alternée et la suite $\left(\dfrac{1}{x+n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante vers 0, alors $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^n}{x+n}$ converge, c'est-à-dire que f est bien définie sur $]0, +\infty[]$.

b) Pour $n \geq 1$ et $x > 0$, on pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+n}$. La série $\sum f_n$ converge simplement vers la fonction $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{x+n}$.

Chaque fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et on a $f_n'(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}$.

La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n'$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$ car elle converge normalement $(|f_n'(x)| \leq \dfrac{1}{n^2})$.

Donc, d'après le théorème de dérivation terme à terme, la série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^n}{x+n}$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$, sa somme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et on a

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}.$$

<u>Exercice</u> 6 (facultatif)**.** On considère la suite de fonction $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \geq 0.$$

1. Montrer que la série de fonction $\displaystyle\sum_n f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_n f_n$ converge normalement sur $[\beta, +\infty[$ pour tout $\beta > 0$. Que se passe-t-il sur $[0, +\infty[$ ou $]0, +\infty[$?
3. Montrer que $\displaystyle\sum_n f_n$ converge uniformement sur $\mathbb{R}^+$.

Solution. 1- D'une part, $f_n(0) = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ est le terme général d'une série numérique alternée, donc converge. D'autre part, pour $x > 0$, (fixer) on a $n^2 |f_n(x)| \to 0$ quand $n \to +\infty$. Donc par comparaison avec la série de Riemann ($\alpha = 2$), la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge. Ce qui implique que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.
2- Soit $\beta > 0$. Pour tout $x \in [\beta, +\infty\,[$, on a $|f_n(x)| \leq \left(e^{-\beta}\right)^n$, pour tout n. Comme $e^{-\beta} \in]\,0, 1\,[$, alors la série numérique $\sum_n \left(e^{-\beta}\right)^n$ converge. par suite la serie de fonctions $\sum_n f_n$ converge normalement sur $[\beta, +\infty[$ Comme la le maximum de la fonction $x \mapsto e^{-nx}$ sur $[0, +\infty$ [est égale a 1 , alors $\sup_{x\geq 0} |f_n(x)| = \frac{1}{n+1}$. Comme la serie Harmonique de terme général $\frac{1}{n+1}$ est divergente (il faut remarquer que $\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$ quand $n \to \infty$), alors la convergence de la série de fonctions $\sum_n f_n$ n'est $'$ uniforme sur $\mathbb{R}^+$. La même chose sur $]0, +\infty[$.
3- La majoration du reste d'une série satisfaisant aux hypothèses du théorème des séries alternées, nous donne

$$|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{e^{-(n+1)x}}{n+2} \leq \frac{1}{n+2}, \quad x \geq 0.$$

Donc

$$\begin{aligned}\sup_{x\geq 0} \left| \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=0}^{N} f_n(x) \right| &= \sup_{x\geq 0} |R_N(x)| \\ &\leq \frac{1}{N+2} \to 0 \quad (N \to \infty).\end{aligned}$$

Ainsi la serie de fonctions $\sum_n f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.