Série de TD n°3

Exercice 1. Soit $f_n : \mathbb{R}+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x + \dfrac{1}{n}$ et soit $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n}}$.

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}+$ mais pas $(f_n^2)_{n\geq 1}$.
2. Montrer que chaque fonction g_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et que la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction g qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 2. Soit $(F_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$F_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}.$$

1. Vérifier que F_n converge simplement et uniformément sur $[-1, 1]$ vers 0.
2. Étudier la convergence simple de F_n' sur $[-1, 1]$.
3. A-t-on la convergence uniforme de F_n' sur $[-1, 1]$?
4. Soit $(G_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par

   $$G_n(x) = \frac{\ln(1+n^2x^2)}{2n^2}.$$

   Montrer que $(G_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers 0 (remarquer que $G_n' = F_n$).

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définies par

$$f_n(x) = \frac{e^{-x}}{1+n^2x^2} \text{ et on pose } u_n = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

1. Vérifier que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers une fonction f sur $[0, 1]$.
2. Montrer que f n'est pas continue sur $[0, 1]$.
3. La suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?
4. Soit $a \in]0, 1[$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a, 1]$ on a

   $$|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) \leqslant \frac{e^{-a}}{1+n^2a^2}.$$

5. Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[a, 1]$, pour tout $a \in]0, 1[$.
6. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 4. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ de terme général

$$u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2}.$$

1. Étudier la convergence simple et uniforme de cette série. Soit $S(x)$ sa somme.
2. Montrer que S est continue sur $[0, +\infty[$.
3. Montrer que S est dérivable sur tout intervalle $[a, +\infty[$, avec $a > 0$.

Exercice 5. Pour $x > 0$; on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

a) Montrer que f est bien définie $\left(\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{x+n} \text{ est convergente pour } x > 0\right)$.

b) Montrer que f est de classe C^1 (f continue, dérivable et que f' est continue) sur $]0, +\infty[$.

Exercice 6 (facultatif)**.** On considère la suite de fonction $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \geq 0.$$

1. Montrer que la série de fonction $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur $[\beta, +\infty[$ pour tout $\beta > 0$. Que se passe-t-il sur $[0, +\infty[$ ou $]0, +\infty[$?
3. Montrer que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.