Université Moulay Ismaïl — Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Filière: SMPC2
Session de Rattrapage : 16-07-2022

Examen d'Analyse II (1h30mn)

Exercice 1 (8,5 points=2+1+2+2+1,5)**.** Les questions 3, 4 et 5 sont indépendantes.

1. Montrer que $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{1-t^2}{1+t^2}\, dt = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2} - 2\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2. En effectuant un changement de variables déduire la valeur de $A = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\, dx$.

3. Calculer l'intégrale généralisée suivante : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+e^x)(1+e^{-x})}$

4. Résoudre l'équation différentielle suivante : $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x}$.

5. Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{e^n}{n^2+2}$; $\quad n \geq 0$ est divergente.

Exercice 2 (7,5 points=3+1,5+1+2)**.** Soit $(F_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$F_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}.$$

1. Vérifier que $(F_n)_{n\geq 1}$ converge simplement et uniformément sur $[-1, 1]$ vers la fonction nulle 0.

2. Étudier la convergence simple de $(F'_n)_{n\geq 1}$ sur $[-1, 1]$.

3. Prouver que $(F'_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas uniformément sur $[-1, 1]$.

4. Soit $(G_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par

$$G_n(x) = \frac{\ln(1+n^2x^2)}{2n^2}.$$

   Montrer que $(G_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers la fonction nulle 0.

Exercice 3 (4 points=1+1+1+1)**.** Soit (f_n) une suite de fonctions réelles définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et convergeant simplement sur I vers une fonction f. Que peut-on dire de f si chaque fonction f_n est :

a) croissante (ou décroissante) sur I?

b) paire (ou impaire) sur I?

c) dérivable sur I?

d) convexe (ou concave) sur I?