Corrigé d'examen d'Analyse II

Exercice 1 (8,5 points=2+1+2+2+1,5)**.** Les questions 3, 4 et 5 sont indépendantes.

1. Montrer que $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{1-t^2}{1+t^2}\,dt = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2} - 2\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
2. En effectuant un changement de variables déduire la valeur de $A = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx$.
3. Calculer l'intégrale généralisée suivante : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+e^x)(1+e^{-x})}$
4. Résoudre l'équation différentielle suivante : $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x}$.
5. Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{e^n}{n^2+2}$; $\quad n \geq 0$ est divergente.

Solution. 1.

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{1-t^2}{1+t^2}\,dt &= -\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{1+t^2}{1+t^2}\,dt + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{2}{1+t^2}\,dt \\ &= -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2} - 2\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).\end{aligned}$$

. 2. $A = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx$.

On a $w(x) = \dfrac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx$ est invariante par $w(-x) = w(x)$, on pose donc $t = \cos x$, de sorte que $dt = -\sin x\,dx$ et $\sin^3 x\,dx = (\sin^2 x)\sin x\,dx = -(1-t^2)\,dx$.
Le calcul donne alors

$$A = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{1-t^2}{1+t^2}\,dt = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2} - 2\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

3. On a

$$\frac{1}{(1+e^x)(1+e^{-x})} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}.$$

Cette expression est de la forme $u'/(1+u)^2$ et admet comme primitive $-1/(1+u)$. Donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+e^x)(1+e^{-x})} = \left[-\frac{1}{1+e^x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2} - \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2}.$$

4. $(\star)$ L'équation homogène associée : $y'' - 4y' + 4y = 0$. L'équation caractéristique associée est : $r^2 - 4r + 4 = 0$ dont le discriminant est $\Delta = 0$ et 2 est sa solution double. Ce qui implique que la solution générale de l'équation homogène est :

$$y_h(x) = (\lambda x + \mu)e^{2x},$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
$(\star\star)$ Recherche d'une solution particulière : on cherche une solution sous la forme $y_p(x) = e^{2x} \times x^2 \times \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, car 2 est la solution double de l'équation caractéristique . En remplaçant dans l'équation (c), on trouve que $2\alpha e^{2x} = -e^{2x}$. Donc $\alpha = -\dfrac{1}{2}$.
$(\star\star\star)$ Conclusion : la solution générale est

$$y(x) = (\lambda x + \mu)e^{2x} - \frac{1}{2}x^2 e^{2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

5. On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n^2+2} = +\infty \neq 0$, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

Exercice 2 (7,5 points=3+1,5+1+2)**.** Soit $(F_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$F_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}.$$

1. Vérifier que $(F_n)_{n\geq 1}$ converge simplement et uniformément sur $[-1, 1]$ vers la fonction nulle 0.

2. Étudier la convergence simple de $(F_n')_{n\geq 1}$ sur $[-1, 1]$.

3. Prouver que $(F_n')_{n\geq 1}$ ne converge pas uniformément sur $[-1, 1]$.

4. Soit $(G_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par

$$G_n(x) = \frac{\ln(1+n^2x^2)}{2n^2}.$$

   Montrer que $(G_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers la fonction nulle 0.

Solution. 1) • F_n est définie sur $[-1, 1]$ vérifiant $F_n(0) = 0$, de plus on a F_n est impaire et pour $x \in]0, 1]$

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0,$$

ce qui implique que $F_n \xrightarrow{c.s} 0 \quad$ sur $[-1, 1]$.
• Soit $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction F_n est dérivable sur $[-1, 1]$ et

$$F_n'(x) = \frac{1 - n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}.$$

On déduit que F_n atteint son maximum sur $[0,1]$ au point $\frac{1}{n}$ et puisque F_n est impaire,

$$\sup_{x\in[-1,1]} |F_n(x)-0| = \sup_{x\in[0,1]} |F_n(x)| = F_n\Big(\frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Ainsi, F_n converge uniformément sur $[-1,1]$ vers la fonction F identiquement nulle sur $[-1,1]$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a pour tout $x \in [-1,1]$

$$F_n'(x) = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$$

Pour $x=0$, on a $F_n'(0)=1$.

Pour $x \neq 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n'(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2x^2} = 0$.

en conclusion $\quad F_n' \xrightarrow{c.s} H$ sur où H est la fonction définie sur $[-1,1]$ par

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x=0 \\ 0 & \text{si} \quad x\neq 0 \end{cases}$$

3) la convergence de F_n' vers H sur $[-1,1]$ ne peut pas être uniforme puisque toutes les fonctions F_n' sont continues sur $[-1,1]$ alors que la fonction limite H est discontinue en 0. [1]

4) On vérifie que pour tout n, $G_n' = F_n$ sur $[-1,1]$. Puisque F_n est continue sur $[-1,1]$, G_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$ et d'après le résultat de la question 1) la suite F_n converge uniformément vers 0 sur $[-1,1]$ d'ou l'en déduit que

$$G_n' \xrightarrow{c.u} 0 \quad \text{sur } [-1,1].$$

D'autre part, on a $G_n(0)=0$ pour tout n, ce qui implique que la suite $(G_n(0))_n$ est convergente.

D'après le théorème de dérivation, on déduit que la suite G_n converge uniformément sur $[-1,1]$ vers $0+\displaystyle\int_0^x F(t)\,dt$. En conlusion

$$G_n \xrightarrow{c.u} 0 \quad \text{sur } [-1,1].$$

Exercice 3 (4 points=1+1+1+1)**.** Soit (f_n) une suite de fonctions réelles définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et convergeant simplement sur I vers une fonction f. Que peut-on dire de f si chaque fonction f_n est :

a) croissante (ou décroissante) sur I?

b) paire (ou impaire) sur I?

c) dérivable sur I?

d) convexe (ou concave) sur I?

---

[1] La limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue.

Solution. a) Si chaque fonction f_n est croissante sur I, alors

$$\forall (x,y) \in I^2, x \leq y \Rightarrow f_n(x) \leq f_n(y).$$

Par passage à la limite lorsque n tend vers l'infini, on obtient

$$\forall (x,y) \in I^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y),$$

ce qui prouve que f est croissante sur I. Le cas où chaque f_n est décroissante est similaire.
b) Si chaque fonction f_n est paire sur I, alors

$$\forall x \in I, \quad f_n(-x) = f_n(x).$$

En faisant tendre n tend vers l'infini, on obtient $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in I$, donc f est paire sur I. Le cas d'imparité est similaire.
c) On ne peut rien conclure
d) Si chaque fonction f_n est convexe sur I, alors

$$\forall (x,y) \in I^2, \forall t \in [0,1], \quad f_n(tx + (1-t)y) \leq t f_n(x) + (1-t) f_n(y).$$

Par passage à la limite, on déduit que

$$\forall (x,y) \in I^2, \forall t \in [0,1], \quad f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y),$$

ce qui exprime bien que f est convexe sur I. Le cas concave est similaire.