Corrigé d'examen d'Analyse II

Exercice 1 (7,5 points=1,5+1+2+1,5+1,5)**.** Les questions 3, 4 et 5 sont indépendantes.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{du}{u^2+u+1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.
2. En effectuant un changement de variables déduire la valeur de $A = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\sin x}$.
3. Prouver que l'intégrale $B = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$ est convergente, puis calculer sa valeur.
4. Résoudre l'équation différentielle suivante : $y'' - 2y' + 2y = x$.
5. Montrer que la série de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}$ est divergente.

Solution. 1.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{du}{u^2+u+1} &= \int_0^1 \frac{du}{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right]_0^1\\ &= \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

2. On pose $u = \tan(x/2)$, de sorte que

$$dx = \frac{2du}{1+u^2}.$$

Comme $\sin(x) = \dfrac{2du}{1+u^2}$, alors l'intégrale devient

$$\begin{aligned}A = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\sin x} &= \int_0^1 \frac{1}{2+\frac{2u}{1+u^2}} \times \frac{2du}{1+u^2}\\ &= \int_0^1 \frac{du}{u^2+u+1} \text{ (la question 1, entaine que)}\\ A &= \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

3. Posons $B_1 = \displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$ et $B_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$.

On a $\left(\forall x \in]-\infty,0]\right)$ $\dfrac{e^x}{1+e^{2x}} \leq e^x$ et comme $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^x\,dx$ converge (utiliser la

définition). Donc B_1 est converge. • Au voisinage de $+\infty$ on a $\frac{e^x}{1+e^{2x}} \sim e^{-x}$ et puisque $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ converge (utiliser encore la définition) B_2 converge d'après le critère d'équivalence.
la convergence de B_1 et de B_2 entraîne la convergence de B.
0n remarque que

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \arctan(e^x) + c.$$

Donc

$$B = \lim_{x\to+\infty} \arctan(e^x) - \lim_{x\to-\infty} \arctan(e^x) = \frac{\pi}{2}$$

4. ($\star$) Résolution de l'équation homogène associée : $y'' - 2y' + 2y = 0$. L'équation caractéristique associée est : $r^2 - 2r + 2 = 0$ dont le discriminant est $\Delta = -4$ et les deux solutions complexes conjuguées sont $r_1 = 1+i$ et $r_2 = 1-i$. Ainsi la solution générale de l'équation homogène est :

$$y_h(x) = (A\cos(x) + B\sin(x))e^x$$

avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ constantes.
($\star\star$) Recherche d'une solution particulière : on cherche une solution sous la forme d'un polynôme de degré 1 , soit $y_p(x) = ax + b$. En remplaçant dans l'équation de la question, on trouve que $-2a + 2ax + 2b = x$. Par identification, on obtient $a = \frac{1}{2}, b = a = \frac{1}{2}$.
($\star\star\star$) Conclusion : la solution générale est

$$y(x) = (A\cos(x) + B\sin(x))e^x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2},$$

avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
5. En utilisant le fait que : si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue , alors:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{k=n} f(a + k\frac{b-a}{n})$$

Soit $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n^2+kn}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}$.

Ici $a = 0$, $b = 1$ et $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$. Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}}dx = [2\sqrt{1+x}]_0^1 = 2\sqrt{2} - 2 \neq 0$. Alors la série de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}$ est divergente.

Exercice 2 (7,5 points=2+1+0,5+1,5+1,5+1)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définies par

$$f_n(x) = \frac{e^{-x}}{1+n^2x^2} \text{ et on pose } u_n = \int_{1/2}^1 f_n(x)\mathrm{d}x.$$

1. Vérifier que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f sur $[0,1]$.
2. Montrer que f n'est pas continue sur $[0,1]$.
3. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?
4. Soit $a \in]0,1[$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a,1]$ on a
$$|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) \leqslant \frac{e^{-a}}{1+n^2a^2}.$$
5. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,1]$, pour tout $a \in]0,1[$.
6. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Solution. 1. 1. Soit $x \in [0,1]$. Si $x = 0$, $f_n(0) = 1$.
Si $x \in]0,1]$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. On en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]0,1] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 \neq 1 = f(0)$. Donc f n'est pas continue en 0 et par conséquent f n'est pas continue sur $[0,1]$.
3. Comme f n'est pas continue sur $[0,1]$, alors la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.
4. Soit $a \in]0,1[$. Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [a,1]$, ainsi $x \geqslant a$, alors $e^{-x} \leqslant e^{-a}$ et $1+n^2x \geqslant 1+n^2a$, ce qui implique que $e^{-x} \leqslant e^{-a}$ et $\dfrac{1}{1+n^2x} \leqslant \dfrac{1}{1+n^2a}$. Comme la quatre membres des inégalités est positivistes et f est nulle sur $[a,1]$, on trouve le résultat demandé.
5. D'après la question précédente on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a,1]$ on a

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{e^{-a}}{1+n^2a^2}.$$

Donc $\sup_{x\in[a,1]} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-a}}{1+n^2a^2}$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{-a}}{1+n^2a^2} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in[a,1]} |f_n(x) - f(x)| = 0$. Par conséquent la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,1]$ vers la fonction $g_a = f/[a,1] = 0$. pour tout $a \in]0,1[$.
6. Les fonctions f_n sont intégrables (continues) sur $[0,\frac{1}{2}]$ et la suite (f_n) converge uniformément sur $[\frac{1}{2},1]$ vers la fonction $g_{1/2} = 0$. Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{2}}^{1} f_n(t)dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\ dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} g_{1/2}(t)\ dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} 0\ dt = 0.$$

Exercice 3 (5 points=1+2+2)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = n^{-1} + \ln n - \ln(n+1)$ et $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$.

1. Donner la nature des séries numériques $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.

2. Montrer que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$.

3. Déduire que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite ℓ.

Solution. 1. Au voisinage de $+\infty$ on a $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$. Le critère de Riemann donne que la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, donc $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ aussi. Le critère de Riemann donne que la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

2. On remarque que

$$u_n = \frac{1}{n} + \ln n - \ln(n+1) = \frac{1}{n} - [\ln t]_n^{n+1} = \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t$$

De la décroissance de la fonction $t \mapsto t^{-1}$ (entre n et $n+1$), on déduit que

$$\frac{1}{n} \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t \geq \frac{1}{n+1}, \qquad \text{donc que} \qquad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

3. Puisque la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente (Question 1), la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente, c'est-à-dire qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que:

$$\begin{aligned}
\ell = \sum_{n=1}^{\infty} u_n &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k \\
&= \lim_{n\to\infty} \left((1 + \ln 1 - \ln 2) + \left(\frac{1}{2} + \ln 2 - \ln 3\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} + \ln n - \ln(n+1)\right) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n + \ln \frac{n}{n+1} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} a_n
\end{aligned}$$

On voit donc que la limite de la dernière expression existe et coïncide avec la somme de la série $\sum u_n$.