Examen d'Analyse II (1h30mn)

Exercice 1 (7,5 points=1,5+1+1,5+2+1,5)**.** Les questions 3, 4 et 5 sont indépendantes.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{du}{u^2+u+1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.
2. En effectuant un changement de variables déduire la valeur de $A = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\sin x}$.
3. Prouver que l'intégrale $B = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$ est convergente, puis calculer sa valeur.
4. Résoudre l'équation différentielle suivante : $y'' - 2y' + 2y = x$.
5. Montrer que la série de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}$ est divergente.

Exercice 2 (7,5 points=2+1+0,5+1,5+1,5+1)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définies par

$$f_n(x) = \frac{e^{-x}}{1+n^2x^2} \text{ et on pose } u_n = \int_{1/2}^{1} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

1. Vérifier que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f sur $[0,1]$.
2. Montrer que f n'est pas continue sur $[0,1]$.
3. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?
4. Soit $a \in]0,1[$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a,1]$ on a
$$|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) \leqslant \frac{e^{-a}}{1+n^2a^2}.$$
5. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,1]$, pour tout $a \in]0,1[$.
6. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 3 (5 points=1+2+2)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = n^{-1} + \ln n - \ln(n+1)$ et $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln n$.

1. Donner la nature des séries numériques $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.
2. Montrer que $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n(n+1)}$.
3. Déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite ℓ.