Université Moulay Ismail
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année universitaire 2022-2023
Filière : SMIA (S_2)

Exercice 1.

1. • On a

$$\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x)-\ln(2)}{x^3-x^2-x-2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x}}{3x^2-2x-1} = \frac{1}{14}$$

• On a

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{x\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{6}+\circ(x^3)}{x^2+\circ(x^3)} = 0$$

2. On pose $h=\frac{1}{x}$. On a

$$\frac{f(x)}{x} = \sqrt{\frac{\frac{1}{h}-1}{\frac{1}{h}+2}} = \sqrt{\frac{1-h}{1+2h}}$$

Or, $\frac{1-h}{1+2h} = 1-3h+6h^2+\circ(h^2)$, on obtient

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{1-h}{1+2h}} &= \sqrt{1-3h+6h^2+\circ(h^2)}\\ &= 1+\frac{1}{2}(-3h+6h^2)-\frac{1}{8}(-3h+6h^2)^2+\circ(h^2)\\ &= 1-\frac{3}{2}h+\frac{15}{8}h^2+\circ(h^2)\end{aligned}$$

Ainsi, $f(x)=x-\frac{3}{2}+\frac{15}{8x}+\circ(\frac{1}{x})$. D'où l'équation de l'asymptote est $y=x-\frac{3}{2}$, et comme $f(x)-(x-\frac{3}{2})=\frac{15}{8x}+\circ(\frac{1}{x})$, $f(x)-(x-\frac{3}{2})\geq 0$ au voisinage de $+\infty$, la courbe C_f est au-dessus de l'asymptote.

Exercice 2.

1. On a

$$\cos(2x)=1-2x^2+\frac{2}{3}x^4+\circ(x^4) \quad \text{et} \quad \ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\circ(x^2)$$

Donc

$$\ln(\cos(2x))+2x^2+x^3 = -2x^2-\frac{4}{3}x^4+2x^2+x^3+\circ(x^4) = x^3-\frac{4}{3}x^4+\circ(x^4)$$

D'où

$$\begin{aligned}\frac{\ln(\cos(2x))+2x^2+x^3}{e^{x^2}-1-x^2\sin(x)} &= \frac{x^3-\frac{4}{3}x^4+\circ(x^4)}{x^2-x^3+\frac{x^4}{2}+\circ(x^4)}\\ &= \frac{x-\frac{4}{3}x^2+\circ(x^2)}{1-x+\frac{x^2}{2}+\circ(x^2)}\\ &= x-\frac{1}{3}x^2+\circ(x^2)\end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned}
\frac{\arctan(1+x)-\frac{\pi}{4}}{\sin(x)} &= \frac{\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{12}x^3+\circ(x^3)}{x-\frac{x^3}{6}+\circ(x^3)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x+\frac{1}{12}x^2+\circ(x^2)}{1-\frac{x^2}{6}+\circ(x^2)} \\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}x+\frac{x^2}{6}+\circ(x^2)
\end{aligned}$$

D'où l'équation de la tangente en 0 est donnée par $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x$ et la courbe est au-dessus de la tangente.

Exercice 3.

1. On a, pour tout $t\in\mathbb{R}^*$

$$\begin{cases} x'(t)=2\frac{t^3-1}{t^3} \\ y'(t)=2\frac{t^4-1}{t^3} \end{cases}$$

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x'		$+$		$+$	‖	$-$		$+$	
$x(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1 ‖ -1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
y'		$-$		$+$	‖	$-$		$+$	

2. On a

$$\begin{cases} x'(t)=0 \\ y'(t)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\frac{t^3-1}{t^3}=0 \\ 2\frac{t^4-1}{t^3}=0 \end{cases} \Leftrightarrow t=1$$

D'où $M(1)$ est le seul point stationnaire.

3. On pose $h=t-1$,

$$\begin{cases} x(t)=x(h+1)=2(h+1)+\frac{1}{(1+h)^2}=3+3h^2-4h^3+\circ(h^3) \\ y(t)=y(h+1)=2+4h^2-4h^3+\circ(h^3) \end{cases}$$

D'où $p=2$, et comme les vecteurs $(6\ ,\ 8)$ et $(-24\ ,\ -24)$ sont libres, $q=3$. Ainsi $M(1)$ est un point de rebroussement de 1^{er} espèce.

4. On a

$$\lim_{t\to0^+}\frac{y(t)}{x(t)}=\lim_{t\to0^+}\frac{t^4+1}{2t^3+1}=1$$

et

$$\lim_{t\to0^+}y(t)-x(t)=\lim_{t\to0^+}t^2+\frac{1}{t^2}-2t-\frac{1}{t^2}=0$$

Comme $y(t)-x(t)=-2t+t^2=-2t+\circ(t)$, $y(t)-x(t)\leq0$ au voisinage de 0^+. Par suite l'équation de l'asymptote en 0^+ est $y=x$,et C est au-dessous de l'asymptote.