Corrigé d'examen d'Analyse II

Exercice 1 (6,5 points=0,75×5+2+0,75)**.** Soit $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$ et soit $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Pour chaque question de 1 à 5, indiquez si l'affirmation est Vraie (V) ou Fausse (F).

1. La suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.
2. La suite de fonctions $(f_n^2)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.
3. Chaque fonction g_n est de classe $\mathcal{C}^1$.
4. La suite $(g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction g qui est de classe $\mathcal{C}^1$.
5. Comme la suite $(f_n(0))_{n\geq 1}$ converge vers 0, alors la série $\sum_{n\geq 1} f_n(0)$ est convergente.
6. La solution de l'équation différentielle $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$ sur $\mathbb{R}$ est :
   (a) $y(x) = e^{-x} + C$,
   (b) $y(x) = \ln(1 + e^x) + C$,
   (c) $y(x) = \ln(1 + e^x)e^{-x} + Ce^{-x}$, avec C une constante réelle.

   ↑Ici, justifiez votre choix en donnant une preuve.
7. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si :
   (a) $\alpha < 1$,
   (b) $\alpha > 1$,
   (c) La convergence ne dépend pas de α,
   (d) L'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t^{\frac{1}{\alpha}}}$ est convergente.

   ↑Ici, choisissez la ou les bonnes réponses.

Solution. 1. (V). 2. (F). 3. (V). 4. (F). 5. (F).

6. La solution de l'équation différentielle $y' + y = \dfrac{1}{1+e^x}$ sur $\mathbb{R}$ est

$$y(x) = \ln(1+e^x)e^{-x} + Ce^{-x}.$$

En effet, on commence par résoudre l'équation homogène $y' + y = 0$ dont la solution générale est $y(x) = Ce^{-x}$, avec C est une constante réelle. On cherche une solution particulière sous la forme $y(x) = C(x)e^{-x}$. La méthode de variation de la constante donne :

$$C'(x)e^{-x} = \frac{1}{1+e^x} \implies C'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}.$$

Une solution particulière est donc donné par $y(x) = \ln(1+e^x)e^{-x}$. Finalement, la solution générale de l'équation avec second membre est donnée par

$$x \mapsto \ln(1+e^x)e^{-x} + Ce^{-x}.$$

7. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si :

(b) $\alpha > 1$. Ce qui équivalent aussi à

(d) L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^{\frac{1}{\alpha}}}$ est convergente.

Exercice 2 (6,5 points=1+1+1+1,5+2)**.** Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt$.

1. En effectuant un développement limité en 0 de la fonction $t \mapsto e^{-t} - e^{-2t}$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt$ converge.
2. Vérifier que si $t \geq 1$, on a

$$0 \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t} \quad \text{et} \quad 0 \leq \frac{e^{-2t}}{t} \leq e^{-2t}.$$

3. Déduire que I est convergente.
4. Pour $\varepsilon > 0$, établir, en posant $x = 2t$, la relation

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt = \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

5. En utilisant la première formule de la moyenne, trouver la valeur de I.

Solution. 1. En effectuant un développement limité en 0, on a

$$e^{-t} - e^{-2t} = 1 - t - (1 - 2t) + \circ(t) = t + \circ(t),$$

donc

$$\lim_{t \to 0} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} = 1$$

et la fonction se prolonge par continuité en 0. Il en résulte que l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt$ converge.

2. Si $t \geq 1$, alors $\frac{1}{t} \leq 1$, donc

$$0 \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t} \quad \text{et} \quad 0 \leq \frac{e^{-2t}}{t} \leq e^{-2t}$$

3. Puisque les intégrales $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$ et $\int_1^{+\infty} e^{-2t} dt$ convergent, les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t} dt$ convergent également. Donc la différence $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt$ converge. Avec le résultat de la question de 1, on déduit que I est convergente.

4. Transformons $\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t} dt$ par le changement de variable $x = 2t$. On obtient

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t} dt = \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

d'où

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt = \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

5. On cherche la limite lorsque ε tend vers 0 du membre de droite. En utilisant la première formule de la moyenne, il existe c_ε dans $[\varepsilon, 2\varepsilon]$ tel que

$$\int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t} dt = e^{-c_\varepsilon} \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{1}{t} dt = e^{-c_\varepsilon} \ln 2.$$

Comme c_ε dans $[\varepsilon, 2\varepsilon]$ et d'après le théorème d'encadrement, c_ε tend vers zéro quand ε tend vers zéro, alors, il en résulte que

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(e^{-c_\varepsilon} \ln 2\right) = \ln 2.$$

Exercice 3 (7 points = 1+0,5+1+0,5+1+1,5+1,5)**.** On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ de terme général

$$u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1 + n^2}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier la fonction u_n $\mathbb{R}$.

2. Déduire, en fonction de n, la valeur de $\sup_{x\geq 0}\{|u_n(x)|\}$.

3. Démontrer $(u_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}^+$.

4. Montrer que $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ est divergente pour $x<0$. Dans toute la suite, on suppose que $x\geq 0$.

5. Prouver que cette série converge normalement vers une fonction que l'on note $S(x)$.

6. Montrer que S est continue sur $[0,+\infty[$.

7. Montrer que S est dérivable sur tout intervalle $[a,+\infty[$, avec $a>0$.

Solution. 1. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction $u_n(x)=\dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Limites aux bornes de $\mathbb{R}$:

Lorsque x tend vers $-\infty$, la fonction exponentielle e^{-nx} tend vers $+\infty$ et le dénominateur $1+n^2$ reste constant. Par conséquent,

$$\lim_{x\to-\infty} u_n(x)=\frac{+\infty}{1+n^2}=+\infty.$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, la fonction exponentielle e^{-nx} tend vers 0 et le dénominateur $1+n^2$ reste constant. Ainsi,

$$\lim_{x\to+\infty} u_n(x)=\frac{0}{1+n^2}=0.$$

Variations de $u_n(x)$:

Calculons la dérivée de $u_n(x)$:

$$u_n'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{-nx}}{1+n^2}\right)=-\frac{ne^{-nx}}{1+n^2}.$$

La dérivée $u_n'(x)$ est négative pour tout x, ce qui signifie que la fonction $u_n(x)$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

En conclusion, la fonction $u_n(x)$ est décroissante sur $\mathbb{R}$, tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$, et tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction $u_n(x)=\dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}$ est définie sur $\mathbb{R}$. Pour trouver $\sup_{x\geq 0}\{|u_n(x)|\}$, nous devons déterminer le maximum de $|u_n(x)|$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

La fonction $u_n(x)$ est toujours positive sur $x\geq 0$, donc $|u_n(x)|=u_n(x)$ pour tout $x\geq 0$. Ainsi, $\sup_{x\geq 0}\{|u_n(x)|\}=\sup_{x\geq 0}\{u_n(x)\}$.

La fonction $u_n(x)$ est décroissante sur $\mathbb{R}$, donc son maximum sur $x\geq 0$ est atteint en $x=0$. Calculons $u_n(0)$:

$$u_n(0)=\frac{e^{-n\cdot 0}}{1+n^2}=\frac{1}{1+n^2}$$

.

Ainsi, $\sup_{x\geq 0}\{|u_n(x)|\} = u_n(0) = \dfrac{1}{1+n^2}$. En conclusion, la valeur de $\sup_{x\geq 0}\{|u_n(x)|\}$ en fonction de n est $\dfrac{1}{1+n^2}$.

3. Nous voulons montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}^+$ Comme $\sup_{x\geq 0}\{|u_n(x)|\} = \dfrac{1}{1+n^2}$, alors

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\geq 0}\{|u_n(x)|\}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+n^2}\right) = 0.$$

Ainsi, la suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}^+$.

4. Posons $y = -nx$. Lorsque n tend vers l'infini, le produit nx tend vers $+\infty$ lorsque $x < 0$. Réécrivons l'expression :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{-nx}}{1+n^2} = \lim_{y\to+\infty}\frac{e^y}{1+\dfrac{y^2}{x^2}} = \lim_{y\to+\infty}\frac{e^y}{x^2+y^2}\cdot x^2 = \lim_{y\to+\infty}\frac{e^y}{y^2}\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot x^2$$

En utilisant les limites $\lim_{y\to+\infty}\dfrac{e^y}{y^2} = +\infty$ et $\lim_{y\to+\infty}\dfrac{y^2}{x^2+y^2} = 1$, nous trouvons que :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-nx}}{1+n^2} = +\infty.$$

Donc, lorsque $x < 0$, la limite de $u_n(x)$ lorsque n tend vers l'infini est égale à $+\infty$. Par conséquent, d'après le critère de divergence, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ est divergente pour $x < 0$.

5. Dans la suite, nous supposons que $x \geq 0$. Nous voulons prouver que la série $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction que nous notons $S(x)$. Pour tout $n \geq 1$ et $x \geq 0$, nous avons $0 \leq u_n(x) \leq \dfrac{1}{1+n^2}$. Ainsi, nous pouvons majorer les termes de la série par une série convergente :

$$|u_n(x)| \leq \frac{1}{1+n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

De plus, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge, car, il s'agit d'une série de Riemann convergente avec un exposant de $p = 2 > 1$.

Par conséquent, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$ et définit une fonction $S(x)$ sur cet intervalle.

6. $\forall\ n \geq 1$, u_n est continue sur $[0, +\infty[$ et $\sum_{n \geqslant 1} u_n(x)$ converge uniformément vers S Sur $[0, +\infty[$ (car elle converge normalement), donc S est continue sur $[0, +\infty[$ d'après le théorème de continuité.

7. On a u_n est dérivable sur $[a, +\infty\,[$ et $u_n'(x) = \dfrac{-ne^{-nx}}{1+n^2}$.

• Puisque La série $\sum u_n(x)$ est converge normalement sur $[0, +\infty[$, alors aussi sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$, donc la série $\sum u_n(x)$ est converge simplement sur $[a, +\infty[$ pour $a > 0$.

• On a $|u_n'(x)| \leq \dfrac{ne^{-na}}{1+n^2}\ \forall\ x \in [a, +\infty[$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 \dfrac{ne^{-na}}{1+n^2} = 0$, donc $\dfrac{ne^{-na}}{1+n^2} = o(\dfrac{1}{n^2})$ au voisinage de $+\infty$. D'après une règle de comparaison et puisque la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge, alors aussi la série $\sum_{n \geq 1} \dfrac{ne^{-na}}{1+n^2}$ converge, d'où la série $\sum_{n \geq 1} u_n'(x)$ est normalement convergente. Ceci implique que $\sum_{n \geq 1} u_n'(x)$ est uniformément convergente sur $[a, +\infty[$.

Donc d'après le théorème de dérivation de la somme d'une série, S est dérivable sur $[a, +\infty[$.