Corrigés des Exercices du Chapitre IV

Exercice 1. **1)** Soit $z_0 \in Z(f)$. f est holomorphe en z_0, et alors, il existe $r > 0$ tel que : $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in B(z_0, r)$.

Et comme f est non constante, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \neq 0$.

Soit m le plus petit entier tel que $a_m \neq 0$. Alors on a :

$$f(z) = \sum_{n \geq m} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in B(z_0, r).$$

$$\Rightarrow f(z) = (z - z_0)^m \sum_{n \geq m} a_n (z - z_0)^{n-m} \quad \forall z \in B(z_0, r).$$

Posons alors :

$$g(z) := \begin{cases} \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^m} & \text{si } z \in U \setminus \{z_0\} \\ \sum_{n \geq 0} a_{n+m} (z - z_0)^n & \text{si } z \in B(z_0, r). \end{cases}$$

- g est bien définie sur U : les deux définitions de g coïncident sur $(U \setminus \{z_0\}) \cap B(z_0, r)$.
- g est holomorphe sur U : Il est clair que g est holomorphe sur $U \setminus \{z_0\}$; en plus g est holomorphe sur $B(z_0, r)$. Donc g est holomorphe sur U.

Et on a : $\quad f(z) = (z - z_0)^m g(z) \quad \forall z \in U$,

avec $g(z_0) = a_m \neq 0$.

2) Soit $z_0 \in Z(f)$. D'après 1), il existe $m \in \mathbb{N}$ ~~et~~ g holomorphe sur U tels que : $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ et $g(z_0) \neq 0$.

Comme g est continue en z_0 et $g(z_0) \neq 0$, il existe V un voisinage de z_0 tel que $g(z) \neq 0 \quad \forall z \in V$.

Et alors, $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in V \setminus \{z_0\}$.

Donc, z_0 ne peut pas être un point d'accumulation de $Z(f)$.

$$\left(Z(f) \cap (V \setminus \{z_0\}) = \emptyset \right).$$

Exercice 2. Considérons la fonction réelle définie par :

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Soit $x_n := \dfrac{1}{n\pi} \quad \forall n \geq 1$.

Alors, $(x_n)_n$ est une suite de zéros de f et 0 est un zéro de f, c.à.d : $\{0\} \cup \{x_n / n \geq 1\} \subset Z(f)$

Et on a : $0 = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$

Donc : 0 est un point d'accumulation de $Z(f)$.

Exercice 3. Soit $f(z) := \sin\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)$.

f est définie et holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1\} := U$.

$$Z(f) = \left\{ \frac{n\pi+1}{n\pi-1} \;/\; n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

1 est un point d'accumulation de $Z(f)$ $\left(1 = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n\pi+1}{n\pi-1}\right)$, et $1 \in \partial U$.

Exercice 4. Soit $(K_n)_n$ une suite exhaustive de compacts de U :
$K_n := \{z \in U \,/\, d(z, U^c) \geq \frac{1}{n}\} \cap \overline{B}(0,n)$.

On a : $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$ et $U = \overset{\uparrow}{\bigcup_{n\geq 1}} K_n$.

Pour tout $n \geq 1$, $Z(f) \cap K_n$ est fini, car sinon, on peut extraire par compacité une suite convergente dans $Z(f) \cap K_n$, et alors $Z(f)$ aura un point d'accumulation dans U ce qui est absurde (Exercice 1).

Donc : $Z(f)$ est au plus dénombrable.

Exercice 5. Posons : $h := \frac{f}{g}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h'(a_n) = \dfrac{f'(a_n)g(a_n) - g'(a_n)f(a_n)}{[g(a_n)]^2} = 0$.

Comme h est holomorphe sur U ; d'après le principe des zéros isolés, $h' = 0$. Et comme U est connexe, h est constante. Et alors, il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $f = c.g$.

Exercice 6. (i) $\Rightarrow$ (ii). Soit $K \subset\subset U$.

Pour tout $z \in K$, il existe V_z un ouvert voisinage de z tel que $A \cap V_z$ est fini. Comme K est compact, il existe $z_1, \dots, z_m \in K$ tels que $K \subset \bigcup_{i=1}^{m} V_{z_i}$.

Et alors, $A \cap K \subset \bigcup_{i=1}^{m} (A \cap V_{z_i})$ qui est fini.

Donc, $A \cap K$ est fini.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Soit $z \in A$. Comme U est localement compact, il existe V_z un voisinage compact de z dans U. Et alors $V_z \cap A$ est fini. Et comme $\mathbb{C}$ est séparé, il existe W_z un voisinage de z tel que $W_z \cap A = \{z\}$.

Donc, A est une partie discrète dans U.

Soit $z \in \overline{A}^{U}$ (l'adhérence de A dans U).

Supposons que $z \notin A$. Soit V un voisinage compact de z dans U. Alors, $V \cap A$ est fini, et comme $z \notin A$, il existe W un voisinage de z dans U tel que $W \cap A = \emptyset$, ce qui contredit le fait que $z \in \overline{A}^{U}$.

Donc, $z \in A$, et par suite A est fermé dans U.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). Soit $z \in U$.

- Si $z \in A$, et comme A est une partie discrète de U, il existe $V \in \mathcal{V}_U(z)$ (voisinage de z dans U) tel que $V \cap A = \{z\}$, donc fini.
- Si $z \notin A$, alors il existe V un voisinage de z tel que $V \cap A = \emptyset$ car A est fermée dans U. Et donc $V \cap A$ est fini.

Exercice 7. Puisque f est continue, $Z(f)$ est un fermé de U. Donc, d'aprés l'exercice 6, il suffit de montrer que $Z(f)$ est une partie discréte de U.

Soit $z_0 \in Z(f)$. Il existe $k \in \mathbb{N}$ et g une fonction holomorphe sur U tels que :

$$f(z) = a_k (z-z_0)^k + (z-z_0)^k g(z) \quad \forall z \in U,$$

avec $g(z) = \sum_{m \geq 1} a_{k+m} (z-z_0)^m$ sur un voisinage de z_0

et $a_k \neq 0$.

$g(z_0) = 0$ et g est continue en z_0, donc il existe V un voisinage de z_0 dans U tel que : $|g(z)| < |a_k| \; \forall z \in V$.

Pour tout $z \in V \setminus \{z_0\}$, on a :

$$|f(z)| = |z-z_0|^k \, |a_k + g(z)| \geq |z-z_0|^k \left(|a_k| - |g(z)|\right) > 0.$$

Donc : $Z(f) \cap V = \{z_0\}$.

Et par suite, $Z(f)$ est une partie discréte de U.

Donc, $Z(f)$ est une partie localement finie de U.

Exercice 8. Supposons qu'une telle fonction f existe.

Comme f est holomorphe sur U, elle est continue en 0, et alors on a $f(0) = 0$.

Posons : $g(z) := f(z) - z \quad \forall z \in U$.

g est holomorphe sur U et $g(0) = 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ assez grand, $g(\frac{1}{n}) = 0$.
Donc, pour tout N assez grand, on a :

$$\left(\{0\} \cup \{\tfrac{1}{n} / n \geq N\}\right) \cap Z(g) \text{ est infini}.$$

Et alors, d'après l'exercice 6, $Z(g)$ n'est pas localement fini dans U. Et par suite g est identiquement nulle sur U (Exercice 7). Or pour tout $n \geq 1$, on a :

$g(\frac{-1}{n}) = f(\frac{-1}{n}) + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \neq 0$ ce qui est absurde.

Donc : il n'existe aucune fonction f holomorphe sur U vérifiant cette condition.

__Exercice 9.__ Supposons qu'une telle fonction f existe.

f est non identiquement nulle.

Et comme f est holomorphe sur $B(0,1)$, elle est continue en 0, et alors $f(0) = \lim_{n\to+\infty} f(\frac{1}{n}) =$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\operatorname{Log}(n)} = 0.$$

Il existe $k \geq 1$ et g une fonction holomorphe sur $B(0,1)$ tels que : $f(z) = z^k g(z) \quad \forall z \in B(0,1)$ avec $g(0) \neq 0$. Pour tout $n \geq 2$, on a :

$$g(\tfrac{1}{n}) = \frac{f(\frac{1}{n})}{(\frac{1}{n})^k} = \frac{n^k}{\operatorname{Log}(n)}.$$ Donc $\lim_{n\to+\infty} g(\frac{1}{n}) = +\infty$

Ce qui est absurde car g est continue en 0.

Donc : il n'existe aucune fonction f holomorphe sur $B(0,1)$ vérifiant la condition.

Exercice 10. 1) On a $A \subset Z(f)$, et alors $Z(f)$ possède un point d'accumulation dans U. Et d'après l'exercice 1, f est nécessairement nulle sur U.

2) Posons $h := f-g$. h est holomorphe sur U et $Z(h)$ possède un point d'accumulation dans U.

Donc, d'après 1), $h = 0$ sur U.

Et alors, $f = g$ sur U.

Exercice 11. Si z_0 est un zéro d'ordre k de f, alors il existe $r>0$ tel que : $f(z) = (z-z_0)^k g(z)$ $\forall z \in B(z_0,r)$, où g est une fonction holomorphe sur $B(z_0,r)$, avec $g(z_0) \neq 0$. Alors on a :

$$f'(z) = (z-z_0)^{k-1}\left[k g(z) + (z-z_0) g'(z)\right] \quad \forall z \in B(z_0,r).$$

Posons : $h(z) := k g(z) + (z-z_0) g'(z)$ $\forall z \in B(z_0,r)$.

h est holomorphe sur $B(z_0,r)$. $h(z_0) = k\, g(z_0) \neq 0$.

Et on a : $f'(z) = (z-z_0)^{k-1} h(z)$

Donc : z_0 est un zéro d'ordre $(k-1)$ de f'.

Exercice 12. En utilisant les coordonnées polaires, on a :

$$\frac{1}{\pi r^2}\int_{B(a,r)} f(x+yi)\,dx\,dy = \frac{1}{\pi r^2}\int_0^r \left[f(a+\rho e^{it})\,dt \right] d\rho$$

Et alors, on a :

(i) $\Rightarrow$ (ii). immédiate.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Soit $R>0$ tel que $\overline{B}(a,R)\subset U$.

Pour tout $r\in[0,R[$, $\frac{r^2}{2}f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^r \left[\int_0^{2\pi} f(a+\rho e^{it})\,dt\right]\rho\,d\rho$.

En prenant la dérivée des deux membres par rapport, on aura le résultat.

Exercice 13. Soit $r>0$ tel que $\overline{B}(a,r)\subset U$, et soit $R>r$ tel que $B(a,R)\subset U$. Alors, on a :

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,r)} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})\,dt.$$

D'où le résultat.

Exercice 14. Soient $a\in U$ en lequel f a un maximum relatif relatif et $R>0$ vérifiant :

$B(a,R)\subset U$ et $|f(z)|\leq|f(a)|$ $\forall z\in B(a,R)$.

Le résultat étant évident si $f(a)=0$; alors nous supposons que ce cas est exclu.

Quitte à changer f par $\frac{\overline{f(a)}}{|f(a)|^2} f$, on peut supposer que $f(a) = |f(a)| > 0$.

Puisque f vérifie la propriété de la moyenne, pour tout $r \in]0,R[$, on a :

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[f(a) - f(a+re^{it})\right]dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[|f(a)| - f(a+re^{it})\right]dt$$

En particulier, $\int_0^{2\pi}\left[|f(a)| - Re\left(f(a+re^{it})\right)\right]dt = 0$.

La fonction $t \longmapsto |f(a)| - Re\left(f(a+re^{it})\right)$ est continue à valeurs réelles positives ou nulles sur $[0,2\pi]$, et d'intégrale nulle sur cet intervalle.

Ainsi, pour $r<R$ et $0 \leq t \leq 2\pi$, on obtient $|f(a)| = Re\left(f(a+re^{it})\right)$.

Comme $|f(z)| \leq |f(a)|$ si $z \in B(a,R)$, on a $Im\left(f(z)\right) = 0$ si $z \in B(a,R)$.

On a prouvé que f est constante sur $B(0,R)$.

__Exercice 15.__ D'après les hypothèses, $\overline{U}$ est compact, et il existe $z_0 \in \overline{U}$ tel que $|f(z_0)| = Sup\{|f(z)| / z \in \overline{U}\} = N$.

. S'il existe $a \in U$ tel que $|f(a)| = N$, f est constante sur U.

- Sinon, $|f(z)| < N \quad \forall z \in U$, et nécessairement $z_0 \in \partial U$. On en déduit que $M = N$ et que $|f(z)| < M \quad \forall z \in U$.

<u>Exercice 16.</u> Supposons que $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in B(0,1)$.
Et alors, d'après l'hypothèse, $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in \overline{B}(0,1)$.
Posons : $\quad g(z) := \dfrac{1}{f(z)} \quad \forall z \in \overline{B}(0,1)$.
g est continue sur $\overline{B}(0,1)$ et holomorphe sur $B(0,1)$.
Or $g(0) = 1$ et $|g(z)| < 1 \quad \forall z \in \mathcal{C}(0,1)$.
Ceci constitue une contradiction avec le principe du maximum. Par suite, f possède au moins un zéro dans $B(0,1)$.

<u>Exercice 17.</u> Posons : $h(z) := \dfrac{f(z)}{z - z_0} \quad \forall z \in B(0,1) \setminus \{z_0\}$.
h se prolonge en une fonction holomorphe sur $B(0,1)$, que nous noterons encore h.
D'après le principe du maximum, on a :
$\operatorname{Sup}\{|h(z)| \,/\, |z| \leq r\} = \operatorname{Sup}\{|h(w)| \,/\, |w| = r\}$.
Par suite, si $|z| < r$, on a : $|h(z)| \leq M \dfrac{1}{r - |z_0|}$.

On en déduit le résultat car, pour $z=0$, on obtient :

$$\frac{|a_0|}{|z_0|} \leq \frac{M}{r-|z_0|} \Rightarrow |a_0| r \leq |z_0| (M + |a_0|).$$

<u>**Exercice 18.**</u> Soit $\varepsilon > 0$. Fixons $r > 0$ tel que $\overline{B}(a,r) \subset U$.

Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|f_n(z)| \leq r\varepsilon$ $\forall z \in U$ et $\forall n \geq N$.

Pour tous $n \geq N$ et $z \in U \setminus B(a,r)$, on a :

$$|g_n(z)| = \frac{|f_n(z)|}{|z-a|} \leq \frac{r\varepsilon}{r} = \varepsilon.$$

Ceci est vrai en particulier pour $z \in \mathcal{C}(a,r)$.

D'après le principe du maximum, c'est encore vérifié pour $z \in \mathcal{C}(a,r)$.

On a aussi $|g_n(z)| \leq \varepsilon$ $\forall z \in U$ et $\forall n \geq N$.

D'où le résultat.

<u>**Exercice 19.**</u> L'application $z \longmapsto z^n P\left(\frac{1}{z}\right)$ se prolonge en une fonction entière que nous noterons g.

Posons : $N(r) := \operatorname{Sup}\left\{ |g(re^{it})| \,/\, t \in \mathbb{R} \right\}$ $\forall r \geq 0$.

D'après le principe du maximum, on a :

$N(r) = \operatorname{Sup}\left\{ |g(z)| \,/\, |z| \leq r \right\}$. Et alors pour tout $r \in]0,R]$: $N\left(\frac{1}{R}\right) \leq N\left(\frac{1}{r}\right) \Rightarrow M(R) R^{-n} \leq M(r) r^{-n}$.

Exercice 20. Supposons qu'il n'existe aucune suite dans $B(0,1)$ vérifiant ces conditions, et montrons que $|f(z)| \longrightarrow +\infty$ quand $|z| \longrightarrow 1$.

Si ce n'est pas le cas, il existe $A > 0$ tel que $\forall \varepsilon > 0, \exists z \in B(0,1)$ vérifiant $1-\varepsilon < |z|$ et $|f(z)| \leq A$.

On en déduit que l'on peut trouver une suite $(z_n)_n$ dans $B(0,1)$ vérifiant :

$$1 - \frac{1}{n+1} < |z_n| < 1 \quad \text{et} \quad |f(z_n)| \leq A \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ceci contredit notre hypothèse.

On a donc $|f(z)| \longrightarrow +\infty$ quand $|z| \longrightarrow 1$.

Définissons alors $F : \overline{B}(0,1) \longrightarrow \mathbb{C}$ par :

$$F(z) := \begin{cases} 0 & \text{si } |z| = 1 \\ \dfrac{1}{f(z)} & \text{si } z \in B(0,1). \end{cases}$$

D'après ce qui précède, F est continue sur $\overline{B}(0,1)$ et holomorphe sur $B(0,1)$. Le principe du maximum prouve que F est identiquement nulle, ce qui est absurde. D'où le résultat.

Exercice 21. • Supposons $|z-\alpha| \geq 1$.

D'après le principe du maximum, on a :

$|f(z)| \leq \operatorname{Sup}\{|f(u)| \,/\, |u-z|=1\} \leq 2|z-\alpha| \operatorname{Sup}\{|f(u)| \,/\, |u-z|=1\}$.

• Le résultat est vrai si $z=\alpha$.

Supposons $0<|z-\alpha|<1$. Pour tout $y \in \mathbb{C}$, posons :

$$g(y) := \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y} & \text{si } y \neq z \\ f'(z) & \text{si } y = z \end{cases}$$

Il est clair que g est une fonction entière.

Pour tout $|z-y| \leq 1$, on a donc :

$|g(y)| \leq \operatorname{Sup}\{|g(u)| \,/\, |u-z|=1\} = \operatorname{Sup}\{|f(z)-f(u)| \,/\, |z-u|=1\}$.

Et par suite, $|g(y)| \leq |f(z)| + \operatorname{Sup}\{|f(u)| \,/\, |z-u|=1\}$.

D'autre part, toujours d'après le principe du maximum, on a : $|f(z)| \leq \operatorname{Sup}\{|f(u)| \,/\, |u-z|=1\}$.

Et alors, on a : $|g(y)| \leq 2 \operatorname{Sup}\{|f(u)| \,/\, |u-z|=1\}$.

En prenant $y=\alpha$, on aura le résultat.

<u>Exercice 22.</u> 1) si $|y|<1$, on a :

$$\sum_{n\geq 0} y^n = \frac{1}{1-y} \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} n y^{n-1} = \frac{1}{(1-y)^2}.$$

Et alors, pour tout $z \in B(0,1)$, on a :

$$|f(z)| \leq \sum_{n\geq 0} |a_n||z|^n \leq M \sum_{n\geq 0} |z|^n = \frac{M}{1-|z|}$$

$$|f'(z)| \leqslant \sum_{n\geq 1} n|a_n||z|^{n-1} \leqslant M \sum_{n\geq 1} n|z|^{n-1} = \frac{M}{(1-|z|)^2}.$$

2) a) Pour $r \in]0,1[$, les formules de Cauchy fournissent :

$$2\pi|a_n| = \left|\int_0^{2\pi} f(re^{it})\, r^{-n} e^{-int}\, dt\right| \leqslant M r^{-n} \int_0^{2\pi} dt = 2\pi M r^{-n}.$$

En faisant tendre r vers 1, on obtient $|a_n| \leqslant M$.

b) Soient $z \in B(0,1)$ et $r \in]0,1-|z|[$. On a $\overline{B}(z,r) \subset B(0,1)$.

Et alors, d'après la formule de Cauchy, on a :

$$2\pi|f'(z)| = \left|\int_0^{2\pi} f(z+re^{it})\, r^{-1} e^{-it}\, dt\right|$$

$$\leqslant M r^{-1} \int_0^{2\pi} dt = 2\pi M r^{-1}.$$

En faisant tendre r vers $1-|z|$, on a le résultat.

3) a) D'après les hypothèses, $z \longmapsto z^{-k} f(z)$ se prolonge en une fonction g holomorphe sur $B(0,1)$.

Si $|z| = r < 1$, on a $|g(z)| \leqslant M r^{-k}$. Et d'après le principe du maximum, ceci est encore vrai si $|z| \leqslant 1$. En faisant tendre r vers 1, on obtient donc $|g(z)| \leqslant M$ $\forall z \in B(0,1)$.

Et par suite, $|f(z)| \leqslant M|z|^k$ $\forall z \in B(0,1)$.

b) Supposons qu'il existe $a \in B(0,1) \setminus \{0\}$ tel que $|f(a)| = M|a|^k$. Alors g atteint son maximum en a, donc g est constante sur $B(0,1)$. On en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = M$ et $f(z) = \lambda z^k$ $\forall z \in B(0,1)$.

4) D'après 3), on a $|f(z)| \leq M|z|$ $\forall z \in B(0,1)$.

Donc, $|f(z) - z| \leq M|z| + |z| = (M+1)|z|$ $\forall z \in B(0,1)$.

Posons : $g(z) := f(z) - z$ $\forall z \in B(0,1)$.

Alors, on a : $g'(0) = g(0) = 0$.

D'après ce qui précède, on a :

$$|f(z) - z| \leq (M+1)|z|^2 \quad \forall z \in B(0,1).$$

5) Posons : $h(z) := f'(z) - 1$ $\forall z \in B(0,1)$.

Alors, on a : $h(0) = 0$ et $|h(z)| \leq M+1$ $\forall z \in B(0,1)$.

Donc, d'après 3), on a : $|h(z)| \leq (M+1)|z|$ $\forall z \in B(0,1)$.

Pour tout $t \in [0,1]$, posons : $g(t) := f(tz)$.

On a $g'(t) = z f'(tz)$. Donc : $|g'(t)| \leq M|z|$.

Et alors, d'après le théorème des accroissements fini, on a :

$|f(z)| = |g(1) - g(0)| \leq M|z|$.

De même, si on pose $p(t) := f(tz) - tz$ $\forall t \in [0,1]$, on a : $|p'(t)| = |z||f'(tz) - 1| \leq (M+1)t|z|^2$.

Et d'après le théorème des accroissements finis, on a :

$$|f(z)-z| = |p(1)-p(0)| \leq (M+1)|z|^2\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{M+1}{2}|z|^2.$$

Exercice 23. Posons : $h(z) := f(z)-f(a)$ $\forall z \in U$.

h est holomorphe sur U, et on a $h(a)=0$.

Donc, il existe $m \geq 1$ et g une fonction holomorphe sur U tels que : $h(z) = (z-a)^m g(z)$ avec $g(a) \neq 0$.

$$\Rightarrow f(z) = f(a) + (z-a)^m g(z) \quad \forall z \in U.$$

Soient $r \geq 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que $f(a) = re^{i\theta}$.

Et soient $\rho > 0$ et $\alpha \in [0, 2\pi[$ tels que :

$$g(z) = \rho e^{i\alpha} + (z-a)h(z) \quad \forall z \in U,$$ avec h une fonction holomorphe sur U.

Alors, pour tout $z \in U$, on a :

$$f(z) = re^{i\theta} + (z-a)^m\left[\rho e^{i\alpha} + (z-a)h(z)\right].$$

Écrivons tout $z \in U$ sous la forme : $z = a + \varepsilon e^{i\eta}$.

Alors, on a :

$$f(z) = re^{i\theta} + \varepsilon^m e^{im\eta}\rho e^{i\alpha} + \varepsilon^{m+1} e^{i(m+1)\eta} h(z).$$

Choisissons η de sorte que : $m\eta + \alpha = \theta$.

Alors, on a : $f(z) = e^{i\theta}\left[r + \varepsilon^m\left(\rho + \varepsilon u(z)\right)\right]$,

où $u(z) := e^{i(\eta-\alpha)} h(z)$.

La fonction u étant bornée au voisinage de a, alors pour tout ε assez petit, on a $|\varepsilon u(z)| \leq \frac{\rho}{2}$.

Par conséquent, $|f(z)| = |r + \varepsilon^m(\rho + \varepsilon u(z))|$

$$\geq |r + \varepsilon^m \rho| - \varepsilon^m |\varepsilon u(z)|$$

$$\geq r + \varepsilon^m \frac{\rho}{2}$$

$$> |f(a)|$$

D'où le résultat.

<u>Exercice 24</u>. Comme $|f|$ est continue sur le compact $\overline{B}(z_0, r)$.

Alors il existe $a \in \overline{B}(z_0, r)$ tel que : $\sup\limits_{z \in \overline{B}(z_0,r)} |f(z)| = |f(a)|$

Supposons que $a \notin C(z_0, r)$.

$|z_0 - a| < r \Rightarrow \exists \rho > 0$ tel que $B(a, \rho) \subset B(z_0, r)$.

D'après l'exercice 23, il existe $b \in B(a, \rho)$ tel que

$|f(b)| > |f(a)|$, ce qui est absurde ($b \in \overline{B}(z_0, r)$ et

$|f(b)| > \sup\limits_{z \in \overline{B}(z_0,r)} |f(z)|$).

Donc, $a \in C(z_0, r)$. Et alors on a le résultat.

<u>Exercice 25.</u> Le théorème de D'Alembert-Gauss est :

"Tout polynôme complexe non constant admet une racine complexe"

Soit P un polynôme complexe non constant.

Supposons que P n'a pas de racine complexe.

Alors la fonction $f(z) := \frac{1}{P(z)}$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. Et comme P est non constant, on a :

$\lim_{|z| \to +\infty} |f(z)| = 0$. Et alors $|f|$ atteint son maximum sur le domaine $\mathbb{C}$:

$\exists R > 0$ tel que $|f(z)| \leq |f(1)|$ $\forall |z| > R$.

D'autre part, comme $|f|$ est continue sur le compact $\overline{B}(0,R)$, il existe $a \in \overline{B}(0,R)$ tel que :

$|f(a)| = \sup_{z \in \overline{B}(0,R)} |f(z)|$. Et alors, on a :

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| = \max\{|f(1)|, |f(a)|\} < +\infty.$$

Ce qui est absurde.

Exercice 26. Supposons que f ne s'annule pas sur $\overline{U}$.

La fonction $z \longmapsto |f(z)|$ est continue sur le compact $\overline{U}$, donc atteint son minimum en un point $a \in \overline{U}$.

Si $a \in U$, alors le principe du maximum appliqué

à $\frac{1}{f}$ montre que f est constante, ce qui est absurde.
Donc, $a \in \partial U$. c.à.d : $|f|$ atteint son minimum sur ∂U.

Exercice 27. Supposons que h atteint son maximum à l'intérieur de U. Donc, il existe $z_0 \in U \setminus \partial U$ tel que :

$$h(z_0) = \max_{z \in U} h(z).$$

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f(z_0) = |f(z_0)| e^{-i\alpha} \quad \text{et} \quad g(z_0) = |g(z_0)| e^{-i\beta}.$$

Posons : $\varphi(z) := f(z) e^{i\alpha} + g(z) e^{i\beta} \quad \forall z \in U$.

Alors on a : $\varphi(z_0) = f(z_0) e^{i\alpha} + g(z_0) e^{i\beta}$

$$\Rightarrow \varphi(z_0) = f(z_0) \frac{|f(z_0)|}{f(z_0)} + g(z_0) \frac{|g(z_0)|}{g(z_0)}$$

$$\Rightarrow \varphi(z_0) = |f(z_0)| + |g(z_0)|.$$

D'autre part, pour tout $z \in \partial U$, on a :

$$|\varphi(z)| = |f(z) e^{i\alpha} + g(z) e^{i\beta}|$$

$$\leq |f(z)| + |g(z)| < \varphi(z_0).$$

Ce qui contredit le principe du maximum.
Donc, la fonction h atteint son maximum sur ∂U.

Exercice 28. Supposons par l'absurde qu'on n'a pas le résultat. Alors, il existe $r>0$ assez petit tel que $\exists\, w\in\mathbb{C}$ et $\delta>0$ vérifiant : $|f(z)-w|>\delta \quad \forall z\in B^*(z_0,r)$ (1)

Posons : $g(z):=\dfrac{1}{f(z)-w} \quad \forall z\in B^*(z_0,r)$

g est holomorphe sur $B^*(z_0,r)$ et $|g|\leq \frac{1}{\delta}$.

Donc, a est une singularité éliminable de g qu'on peut alors prolonger en une fonction holomorphe qu'on notera g encore sur $B(z_0,r)$.

Si $g(z_0)\neq 0$, on a $f(z)=w+\dfrac{1}{g(z)}$. Donc f est holomorphe au voisinage de z_0, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

Si $g(z_0)=0$, alors $g(z)=(z-z_0)^m h(z)$ avec h est une fonction holomorphe sur $B(z_0,r)$ et $h(z_0)\neq 0$.

On en déduit que pour z assez proche de z_0,

$f(z)=w+\dfrac{1}{(z-z_0)^m}k(z)$, où $k(z):=\dfrac{1}{h(z)}$ est une fonction holomorphe près de z_0, ce qui contredit aussi l'hypothèse. D'où le résultat.

Exercice 29. 1) $f(z) = \dfrac{1}{z-z^3} = \dfrac{1}{z(1-z)(1+z)}$.

Donc : 0, -1 et 1 sont des pôles simples de f.

2) $f(z) = \dfrac{z^4}{1+z^4}$. $z^4+1=0 \iff z^4 = -1 = e^{i\pi}$

Les solutions de cette équation sont : $z_k = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}$ $k=0,\dots,3$.

$z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(+1+i)$

$z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$

$z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}(1+i)$

$z_3 = e^{i\frac{7\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$

Donc : z_0, z_1, z_2 et z_3 sont des pôles simples de f.

3) $f(z) = \dfrac{z^5}{(1-z)^2}$. $z_0=1$ est un pôle d'ordre 2 de f.

4) $f(z) = \dfrac{e^z}{1+z^2} = \dfrac{e^z}{(1-i)(1+i)}$.

Donc : $-i$ et i sont des pôles simples de f.

5) $f(z) = \dfrac{1}{\sin z}$. $\sin z = 0 \iff z = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Donc : $z_k = k\pi \ (k\in\mathbb{Z})$ sont des pôles simples de f.

6) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2}$. $z_0 = 0$ est un pôle double de f.

7) $f(z) = tg\, z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$. $\cos z = 0 \iff z = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$

Donc : $z_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$ sont des pôles simples de f.

8) $f(z) = \sin\left(\dfrac{1}{1-z}\right)$. $z_0 = 1$ est une singularité essentielle de f.

9) $f(z) = e^{tg\left(\frac{1}{z}\right)}$. $z_k = \dfrac{2}{(2k+1)\pi}$ $(k \in \mathbb{Z})$ sont des singularités essentielles de f.

Exercice 30. Comme z_0 est un pôle d'ordre k de f, il existe $r > 0$ tel que : $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^k}$ $\forall z \in B^*(z_0, r)$

où g est une fonction holomorphe sur $B(z_0, r)$ et $g(z_0) \neq 0$. Alors, pour tout $z \in B^*(z_0, r)$, on a :

$$f'(z) = \frac{1}{(z-z_0)^{k+1}} \Big[\underbrace{-k g(z) - g'(z)(z-z_0)}_{h(z)} \Big].$$

h est holomorphe sur $B(z_0, r)$ et $h(z_0) = -k g(z_0) \neq 0$.

Donc, z_0 est un pôle d'ordre $(k+1)$ de f'.

Exercice 31. Définissons une fonction g sur U par :

$$g(z) := \begin{cases} (z-z_0) f(z) & \text{si } z \neq z_0 \\ 0 & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

g est continue sur U et holomorphe sur U^*.
De même g est holomorphe en z_0, et alors g est holomorphe sur U.
Soit $r>0$ tel que $B(z_0,r) \subset U$ et g admet le développement de Taylor suivant :

$$g(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n \quad \forall z \in B(z_0,r).$$

On a $a_0 = 0$ puisque $g(0) = 0$.
Et alors, $\tilde{f}(z) := \sum_{n\geq 1} a_n z^{n-1}$ est un prolongement de f au voisinage de z_0.
Et par suite, z_0 est une singularité artificielle de f.

<u>Exercice 32.</u> 1) Supposons que $\overline{g(\mathbb{C})} \neq \mathbb{C}$.
Il existe donc $w \in \mathbb{C}$ et $r>0$ tels que :
$|g(z) - w| \geq r \quad \forall z \in \mathbb{C}$.
Il en résulte que la fonction entière $h(z) := \dfrac{1}{g(z)-w}$ est bornée. Donc, elle est constante.
Et alors, il en est de même de g, ce qui est absurde.

2) Soient V un voisinage de z_0 dans $\mathbb{C}$ et posons : $W := V \cap U$.
D'après les hypothèses, $f(W)$ est dense dans $\mathbb{C}$.

Comme g est continue, on a : $g(\mathbb{C}) = g\left[\overline{f(W)}\right] \subset \overline{g\circ f(W)}$. Or $\overline{g\circ f(W)}$ est un fermé de $\mathbb{C}$, donc d'après 1), $\mathbb{C} = g(\mathbb{C}) = \overline{g\circ f(W)}$.

Et par suite, z_0 est une singularité essentielle de $g\circ f$.

<u>Exercice 33.</u> 1) On a :

$$f(B^*(z_0,R)) \subset \{z\in\mathbb{C} \,/\, Re(z) \geq 0\} \neq \mathbb{C}.$$

Et par suite, z_0 n'est pas une singularité essentielle de f.

2) Quitte à changer f en $z \longmapsto f(z)+1$, on peut supposer que $Re(f(z)) > 0$ $\forall z \in B^*(z_0,R)$, et on peut donc définir g holomorphe sur $B^*(z_0,R)$ par :

$$g(z) := \frac{1}{f(z)}.$$

Supposons que z_0 est un pôle de f.

Alors $|f(z)|$ tend vers $+\infty$ quand z tend vers z_0.

Il en résulte que l'on peut prolonger g en h holomorphe sur $B(z_0,R)$, et on a $h(0)=0$ et $Re(h(z)) > 0$ $\forall z \in B^*(z_0,R)$.

Comme $|e^{-h}| = e^{-\mathrm{Re}(h)}$, il résulte du principe du maximum que : $e^{-h(z)} = 1 \quad \forall z \in B(z_0, R)$.

Il en résulte que $h' e^{-h} = 0$, donc h est constante. Comme $h(0) = 0$, on a :

$g(z) = 0 \quad \forall z \in B^*(z_0, R)$, ce qui est absurde d'après la définition de g.

Ainsi, z_0 n'est pas un pôle de f.

Compte-tenu de 1), on voit donc que f se prolonge en une fonction holomorphe sur $B(z_0, R)$.

<u>Exercice 34</u> : • D'après les hypothèses, $|f(z)|$ tend vers $+\infty$ quand z tend vers $+\infty$. On peut donc supposer que $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in B^*(z_0, R)$, et on peut définir une fonction φ holomorphe sur $B(z_0, R)$ par :

$$\varphi(z) := \begin{cases} \dfrac{1}{f(z)} & \text{si } z \in B^*(z_0, R) \\ 0 & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

La fonction φ n'est pas constante. Il existe donc un réel strictement positif r tel que $B^*(0, r) \subset \varphi(B^*(z_0, R))$.

On en déduit l'existence de $\rho > 0$ tel que :

$$\{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| \geq \rho\} \subset f(B^*(z_0, R)).$$

- Supposons que z_0 ne soit pas une singularité essentielle de $g \circ f$. Il existe alors $\delta \in]0, R[$, $B > 0$ et $q \in \mathbb{N}$ vérifiant : $z \in \bar{B}(z_0, \delta) \setminus \{z_0\} \Rightarrow |g \circ f(z)| \leq \dfrac{B}{|z - z_0|^q}$.

Notons p l'ordre du pôle z_0 de f.

Il existe $A > 0$ tel que :

$$z \in \bar{B}(z_0, \delta) \setminus \{z_0\} \Longrightarrow |f(z)| \geq \frac{A}{|z - z_0|^p}.$$

Ainsi, pour $z \in \bar{B}(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$, on obtient :

$$|g \circ f(z)| \leq C\, |f(z)|^{\frac{q}{p}}, \text{ avec } C := BA^{-\frac{q}{p}}.$$

Compte-tenu du premier point, on voit que, pour $w \in \mathbb{C}$ de module assez grand, on a : $|g(w)| \leq C|w|^{\frac{q}{p}}$.

Ceci implique que g est un polynôme

Ce qui est absurde. D'où le résultat.

Exercice 35. 1) $f(z) = \dfrac{1}{(\cos z)^2}$.

f a une singularité isolée pour $\cos z = 0$.

Donc : $z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ sont les singularités isolées de f.

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, soit $w = z - z_k$.

$$f(z) = \frac{1}{(\cos z)^2} = \frac{1}{[\cos(w + z_k)]^2} = \frac{1}{[\cos(w + \frac{\pi}{2} + k\pi)]^2}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{[\sin(w+k\pi)]^2} = \frac{1}{(\sin w)^2}.$$

Comme $\sin w$ admet un zéro simple pour $w = 0$, f admet un pôle double en z_k.

Donc : les singularités isolées de f sont $z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) qui sont des pôles d'ordre 2.

2) $f(z) = (1-z^3)e^{\frac{1}{z}}$.

f admet une singularité isolée en $z_0 = 0$.

$$f(z) = (1-z^3)e^{\frac{1}{z}} = (1-z^3)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^{n-3}}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} - \sum_{n=4}^{+\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^{n-3}} - \sum_{n=0}^{3}\frac{z^{3-n}}{n!}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+3)!}\frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{3}\frac{z^{3-n}}{n!}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+3)!}\right)\frac{1}{z^n} + 1 - \sum_{n=0}^{3}\frac{z^{3-n}}{n!}.$$

Comme l'ensemble des coefficients des puissances négatives est infini, $z_0 = 0$ est une singularité essentielle de f.

3) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^{2020}}$. f admet une singularité isolée

en $z_0 = 0$. Et on a :

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^{2020}} = \frac{1}{z^{2020}} \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-2019}$$

$$= \sum_{n=0}^{1009} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-2019} + \sum_{n=1010}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-2019}$$

Donc, $z_0 = 0$ est un pôle d'ordre 2019 de f.

4) $f(z) = \dfrac{e^z}{1-z^2}$. f a deux singularités isolées :
$z_1 = -1$ et $z_2 = 1$ qui sont des pôles simples de f.

5) $f(z) = \dfrac{1}{(\sin z)^2}$. f admet des singularités isolées pour
$\sin z = 0 \iff z = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.
Donc, les singularités isolées de f sont :

$$z_k = k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, soit $w = z - z_k$

$$f(z) = \frac{1}{(\sin z)^2} = \frac{1}{[\sin(w+k\pi)]^2} = \frac{1}{(\sin w)^2}$$

$$= \left[\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} w^{2n+1}\right]^{-2} = \left[w \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} w^{2n}\right]^{-2}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{w^2}\Big[1 + \underbrace{\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} w^{2n}}_{u}\Big]^{-2}$$

$u = \dfrac{\sin w - w}{w}$, donc quand w est au voisinage de 0, u est aussi au voisinage de 0.

or $(1+u)^{-2} = 1 - 2u + 3u^2 + \dots$ (u est au voisinage de 0)

Donc, $f(z) = \dfrac{1}{w^2}\Big(1 + \sum\limits_{n\geq 2} a_n w^n\Big)$

$$= \frac{1}{(z-z_k)^2}\Big(1 + \sum_{n\geq 2} a_n (z-z_k)^n\Big)$$

Et alors, z_k est un pôle d'ordre 2 de f.

6) $f(z) = \dfrac{e^z}{z(z-1)^2}$.

f admet des singularités isolées en : $z_0 = 0$ et $z_1 = 1$.

* en $z_0 = 0$: Comme $\dfrac{1}{(z-1)^2} = \Big(\dfrac{1}{1-z}\Big)'$ et $\dfrac{1}{1-z} = \sum\limits_{n\geq 0} z^n$,

On a : $\dfrac{1}{(1-z)^2} = \sum\limits_{n\geq 1} n z^{n-1} = \sum\limits_{n\geq 0} (n+1) z^n$. Et alors, on a :

$$f(z) = \frac{1}{z}\Big(\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!} z^n\Big)\Big(\sum_{n\geq 0}(n+1)z^n\Big) = \frac{1}{z}\Big(1 + \sum_{n\geq 1} a_n z^n\Big)$$

Donc : $z_0 = 0$ est un pôle simple de f.

* en $z_1 = 1$: Posons $w := z-1$.

$$f(z) = \frac{e^z}{z(z-1)^2} = \frac{e^{1+w}}{(1+w)w^2} = \frac{e}{w^2}\left(\sum_{m\geq 0}\frac{w^m}{m!}\right)\left(\sum_{m\geq 0}(-1)^m w^m\right)$$

$$= \frac{e}{w^2}\left(1+w+\sum_{m\geq 2}\frac{1}{m!}w^m\right)\left(1-w+\sum_{m\geq 2}(-1)^m w^m\right)$$

$$= \frac{e}{w^2}\left(1+\sum_{m\geq 2} q_m w^m\right).$$

Donc, $z_1 = 1$ est un pôle d'ordre 2 de f.

7) $f(z) = (1-z^2)\sin\left(\frac{1}{z}\right)$.

f admet une singularité isolée en $z_0 = 0$.

$$f(z) = (1-z^2)\sin\left(\frac{1}{z}\right) = (1-z^2)\sum_{m\geq 0}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\frac{1}{z^{2m+1}}.$$

$$= \sum_{m\geq 0}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\frac{1}{z^{2m+1}} - \sum_{m\geq 0}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\frac{1}{z^{2m-1}}$$

$$= -z + \sum_{m\geq 0}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\frac{1}{z^{2m+1}} - \sum_{m\geq 1}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\frac{1}{z^{2m-1}}$$

$$= -z + \sum_{m\geq 0}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\frac{1}{z^{2m+1}} - \sum_{m\geq 0}\frac{(-1)^{m+1}}{(2m+3)!}\frac{1}{z^{2m+1}}$$

$$= -z + \sum_{m\geq 0}(-1)^m\left[\frac{1}{(2m+1)!}+\frac{1}{(2m+3)!}\right]\frac{1}{z^{2m+1}}.$$

L'ensemble des coefficients des puissances négatives est infini, et alors $z_0 = 0$ est une singularité essentielle de f.

8) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^{2020}}$.

f admet une singularité isolée en $z_0 = 0$.

$$f(z) = \frac{1}{z^{2020}} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} z^n = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} z^{n-2020}$$

$$= \sum_{n=0}^{2019} \frac{1}{n!} z^{n-2020} + \sum_{n=2020}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^{n-2020}$$

Donc : $z_0 = 0$ est un pôle d'ordre 2020 de f.

9) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2 - z^3} = \dfrac{\cos z}{z^2(1-z)}$

f admet des singularités isolées en $z_0 = 0$ et $z_1 = 1$.

$*$ en $z_0 = 0$: $z^2(1-z)$ admet $z_0 = 0$ comme zéro d'ordre 2, et alors $z_0 = 0$ est un pôle d'ordre 2.

$*$ en $z_1 = 1$: $z^2(1-z)$ admet $z_1 = 1$ comme zéro d'ordre 1, et alors $z_1 = 1$ est un pôle simple de f.

<u>Exercice 36.</u> Supposons (iii) non réalisée.

Il existe $b \in \mathbb{C}$ et $r, \varepsilon > 0$ tels que :

$B(z_0, r) \subset U$ et $f(B^*(z_0, r)) \cap B(b, \varepsilon) = \emptyset$.

<u>càd</u> : $|f(z) - b| \geq \varepsilon \quad \forall z \in B^*(z_0, r)$.

La fonction $z \longmapsto \dfrac{1}{f(z)-b}$ est holomorphe sur $B^*(z_0,b)$, et elle est majorée en module par $\dfrac{1}{\varepsilon}$.

Donc, elle se prolonge en une fonction g holomorphe sur $B(z_0,r)$.

- Si $g(z_0) \neq 0$, $f(z) = b + \dfrac{1}{g(z)}$ a une singularité éliminable (c.à.d: artificielle) en z_0, et alors (i) est vérifiée.

- Si $g(z_0) = 0$; notons m la multiplicité du zéro z_0 de g.

Il existe h holomorphe sur $B(z_0,r)$ telle que :

(1) $g(z) = (z-z_0)^m h(z)$ $\forall z \in B(z_0,r)$ et $h(z_0) \neq 0$.

D'après (1), on peut supposer r assez petit pour que $h(z) \neq 0$ si $z \in B(z_0,r)$.

Alors, $\varphi := \dfrac{1}{h}$ est holomorphe sur $B(z_0,r)$.

D'autre part, $\varphi(z_0) \neq 0$ et $f(z) - b = \dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$ $\forall z \in B^*(z_0,r)$.

En écrivant $\varphi(z) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n (z-z_0)^n$, on a :

$$f(z) = b + \frac{\alpha_0}{(z-z_0)^m} + \dots + \frac{\alpha_{m-1}}{z-z_0} + \sum_{n \geq m} \alpha_n (z-z_0)^{n-m}.$$

Et la condition (ii) est vérifiée avec :

$$(a_{-1}, \dots, a_{-m}) = (\alpha_{m-1}, \dots, \alpha_0).$$

L'unicité de la suite des a_i est immédiate en utilisant le principe du prolongement analytique.

Exercice 37. (i) $\Rightarrow$ (ii). Supposons que 0 n'est pas une singularité essentielle de g. Et soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ en 0. Pour tout $k \geq 0$ assez grand, on a : $z^k g(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^{k-n}$ se prolonge en une fonction entière.

Si l'on note γ le cercle parcouru dans le sens direct, d'après la formule de Cauchy, on a :

$$0 = \int_\gamma z^k g(z)\, dz = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_\gamma z^{k-n}\, dz = 2\pi i\, a_{k+1}$$

Ceci prouve que f est un polynôme de degré au plus k.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Il est clair que si f est un polynôme, g n'a pas de singularité essentielle en 0.

Exercice 38. Il existe $r \in]0, R[$ tel que :

$$h(z) = (z - z_0)^m g(z) \quad \forall z \in B(z_0, r),$$ où g est une fonction holomorphe et ne s'annulant pas sur $B(z_0, r)$.

Et alors, pour $z \neq z_0$, on a :

$f(z) = (z-z_0)^{m-p} g(z)$, où $m-p \geq 0$.

Comme sur $B(z_0, r)$, qui est un voisinage de z_0, $f(z)$ est égale à la fonction holomorphe $(z-z_0)^{m-p} g(z)$, z_0 est une singularité artificielle (éliminable) de f.

Exercice 39. (i) $\Rightarrow$ (ii). Découle du fait que f est analytique sur $B^*(z_0, R)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Découle du fait que les séries entières sont continues ; et on a $c = a_0$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Découle de la continuité de la fonction $z \longmapsto |z|$.

(iv) $\Rightarrow$ (v). Découle du fait que toute fonction continue en un point est bornée sur un certain voisinage de ce point.

(v) $\Rightarrow$ (vi). Evidente.

(vi) $\Rightarrow$ (i). Soit h la fonction définie par :

$$h(z) := \begin{cases} (z-z_0)^2 f(z) & \text{si } z \in B^*(z_0, R) \\ 0 & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

Pour tout $z \neq z_0$, $h'(z)$ existe et il est égale à $(z-z_0)^2 f'(z) + 2(z-z_0) f(z)$.

Et $\lim_{z\to z_0} \frac{(z-z_0)^2 f(z)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z) = 0$.

Donc, $h'(z_0)$ existe et $h'(z_0) = 0$.

Et alors, h est holomorphe sur $B(z_0,R)$ et satisfait

$h(z_0) = h'(z_0) = 0$.

Donc, z_0 est un zéro de h d'ordre au moins 2 car : les deux premiers termes de la série de Taylor de h sont nuls. Et alors, $f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^2}$ a une singularité artificielle (éliminable) en z_0.

Finalement, si on a ces conditions, par continuité du prolongement holomorphe $\tilde{f}$ on doit avoir, d'après (ii), $\lim_{z\to z_0} f(z) = c = \lim_{z\to z_0} \tilde{f}(z) = \tilde{f}(z_0)$.

Donc, $\tilde{f}(z_0) = c$.

__Exercice 40.__ Si on a (i), alors f n'est pas bornée au voisinage de z_0, et par suite z_0 n'est pas une singularité artificielle (éliminable) de f.

Et si on a (ii), alors on n'a pas $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$, et par suite z_0 n'est pas un pôle de f.

Donc, (i) et (ii) impliquent que z_0 est une singularité essentielle de f.

Réciproquement, supposons que z_0 est une singularité essentielle de f. Comme f est non bornée au voisinage de z_0 (car sinon, z_0 sera une singularité artificielle de f), alors on a (i).

Montrons alors (ii). Précisément, on va montrer :

$\forall n \geq 1$, $\exists z_n \in B(z_0, \frac{1}{n}) \cap B^*(z_0, R)$ tel que :

$$|f(z_n) - \alpha| < \frac{1}{n} \quad (*) .$$

Supposons par l'absurde qu'on n'a pas $(*)$.

Alors, il existe $n \geq 1$ tel que :

$|f(z) - \alpha| \geq \frac{1}{n} \quad \forall z \in B(z_0, \frac{1}{n}) \cap B^*(z_0, R)$.

Considérons la fonction $g(z) := \dfrac{1}{f(z) - \alpha}$ définie sur

$B(z_0, \frac{1}{n}) \cap B^*(z_0, R)$.

Comme $|g| \leq n$, z_0 est une singularité artificielle de g.

Et comme $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| \neq \infty$, on a $g(z_0) \neq 0$.

$f(z) = \dfrac{1}{g(z)} + \alpha$ est holomorphe au voisinage de z_0 puisque $g(z_0) \neq 0$. Cela constitue une contradiction.

Et alors on a $(*)$. Et par conséquent, $\exists (z_n)_n \subset B^*(z_0, R)$

telle que : $0 < |z_n - z_0| < \frac{1}{n}$ et $|f(z_n) - \alpha| < \frac{1}{n}$.

Et alors (ii) est vérifiée.

Remarques : • La condition (i) ne signifie pas que $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$. Elle signifie qu'on peut trouver une façon de s'approcher de z_0 et $|f(z)|$ tend vers l'infini.

• De même, (ii) signifie qu'on peut trouver une façon de s'approcher de z_0 de telle façon que $f(z)$ s'approche d'un nombre complexe arbitrairement fixé.

Exercice 41. Soit f une fonction entière ayant ∞ comme pôle d'ordre m. f s'écrit sous la forme suivante :

$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \quad \forall z \in \mathbb{C}$. Alors pour $z \neq 0$, on a :

$f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{1}{z^n}$. Et comme $f(z)$ admet un pôle d'ordre m en ∞ ssi $f\left(\frac{1}{z}\right)$ admet un pôle d'ordre m en 0, alors on a $a_m \neq 0$ et $a_n = 0 \quad \forall n > m$.

Donc, $f(z) = \sum_{n=0}^{m} a_n z^n$. Et alors, on a :

f admet un pôle d'ordre $m \geq 1$ en ∞ ssi f est un polynôme de degré m.

Exercice 42. 1) Si z_0 est un pôle d'ordre m de f, alors
$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}\,g(z)\,,$$ où g est une fonction holomorphe en z_0 et $g(z_0)\neq 0$.

(a) Si $n>0$, $$f^n(z)=\frac{1}{(z-z_0)^{mn}}\,g^n(z).$$

Et comme g^n est holomorphe en z_0 et $g^n(z_0)\neq 0$, alors f^n admet z_0 comme pôle d'ordre mn.

(b) Si $n<0$, $$f^n(z)=(z-z_0)^{-mn}\,\frac{1}{g^{-n}(z)}.$$

Et comme $\frac{1}{g^{-n}}$ est holomorphe en z_0 et $\frac{1}{g^{-n}(z_0)}\neq 0$, alors f^n admet z_0 comme zéro d'ordre $-mn$.

2) Si f admet une singularité essentielle en z_0, alors $|f(z)|$ n'est ni bornée ni tend vers l'infini quand z tend vers z_0.

Clairement, la même chose est vérifiée pour
$$|f^n(z)|=|f(z)|^n.$$
Donc, z_0 est une singularité essentielle de f^n.

Exercice 43. 1) Comme $f(0)=0$, il existe g une fonction holomorphe sur $B(0,1)$ telle que :
$$f(z)=z\,g(z)\quad\forall z\in B(0,1).$$

Donc, $|z||g(z)| \leq 1 \quad \forall z \in B(0,1)$.

Et alors, $|g(z)| \leq \frac{1}{r} \quad \forall z \in \mathcal{C}(0,r)$.

Donc, par le principe du maximum, on a :

$|g(z)| \leq \frac{1}{r} \quad \forall z \in B(0,r)$.

En faisant tendre r vers 1, on obtient :

$|g(z)| \leq 1 \quad \forall z \in B(0,1)$.

Et alors, $|f(z)| \leq |z| \quad \forall z \in B(0,1)$.

En particulier, $\lim\limits_{z \to 0} \frac{f(z)}{z} \leq 1 \Rightarrow |f'(0)| \leq 1$.

2) Si $|f'(0)| = 1$, et comme $f(z) = z\,g(z)$, on a $f'(0) = g(0)$.

Et alors $|g(0)| = 1$.

Comme $|g(z)| \leq |z| \quad \forall z \in B(0,1)$, d'après le principe du maximum, g est constante. Donc, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = 1$ et $g(z) = \lambda \quad \forall z \in B(0,1)$.

3) S'il existe $z_0 \in B(0,1) \setminus \{0\}$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$, on a nécessairement $|g(z_0)| = 1$, et donc par le principe du maximum, $g(z) = \lambda \quad \forall z \in B(0,1)$, avec $|\lambda| = 1$.

Exercice 44. 1) Soit $R := e^{-f}$. Et alors, on a :

$$|R(z)| = e^{-Re(f(z))} \leqslant 1 \quad \forall z \in B(0,1).$$

S'il existe $a \in B(0,1)$ tel que $Re(f(a)) = 0$, alors $|R(a)| = 1$. D'après le principe du maximum, R est constante sur $B(0,1)$. Ce qui est absurde, car $R(0) = e^{-1}$ et $|R(a)| = 1$.

2) Soient $z \in B(0,1)$ et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(z) = a + bi$.

Alors on a : $|g(z)|^2 = \dfrac{a^2+b^2+1-2a}{a^2+b^2+1+2a}$.

Comme $a > 0$, d'après 1), on a $|g(z)| < 1$.

Donc, $g(B(0,1)) \subset B(0,1)$.

Comme $g(0) = 0$, d'après le lemme de Schwarz, on a : $|g(z)| \leqslant |z| \quad \forall z \in B(0,1)$.

3) Soit $z \in B(0,1)$. D'après 2), on a :

$$\frac{\big|\,|f(z)| - 1\,\big|}{|f(z)| + 1} \leqslant \frac{|f(z) - 1|}{|f(z) + 1|} \leqslant |z|.$$

Et alors, on a le résultat.

4) S'il existe $a \in B(0,1) \setminus \{0\}$ tel que :

$$(1) \quad |f(a)| = \frac{1 - |a|}{1 + |a|}.$$

Et alors, on a :

$$|g(a)| \geq \frac{1-|f(a)|}{1+|f(a)|} = |a| .$$

D'après 2), on a : $|g(a)| = |a|$.
Compte-tenu du lemme de Schwarz, on en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$, avec $|\lambda| = 1$, tel que : $g(z) = \lambda z \quad \forall z \in B(0,1)$. Par conséquent, on a :

$$f(z) = \frac{1+\lambda z}{1-\lambda z} \quad \forall z \in B(0,1) .$$

Inversement, si f est de cette forme, on trouve que $f(0) = 1$ et $Re[f(z)] > 0 \quad \forall z \in B(0,1)$.
En outre, (1) est vérifiée pour $a = \frac{-\bar{\lambda}}{2}$.
On parvient aux mêmes résultats si l'autre inégalité de 3) est une égalité.

<u>Exercice 45.</u> Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in Z(f) \cap B(0,1)$.

Posons : $$g(z) := \frac{f(z)}{\prod_{j=1}^{m} \left(\frac{z-\alpha_j}{1-\bar{\alpha}_j z} \right)} \quad \forall z \in B(0,1)$$

g est holomorphe sur $B(0,1)$ (Car les α_j $(1 \leq j \leq m)$ sont des singularités éliminables de g). De plus, on a : $|g(z)| = 1 \quad \forall z \in C(0,1)$ et $g(z) \neq 0 \quad \forall z \in B(0,1)$.

Ainsi, par le principe du maximum et de minimum, on a : $|g(z)| = 1 \quad \forall z \in \overline{B}(0,1)$. Et par suite g est constante et égale à $\alpha \in \mathbb{C}$ où $|\alpha| = 1$, c.à.d :

$$f(z) = \alpha \prod_{j=1}^{m} \frac{z - \alpha_j}{1 - \overline{\alpha}_j z}.$$

Puisque f est holomorphe sur $\mathbb{C}$, $\alpha_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m$.

D'où, $f(z) = \alpha z^m \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

Exercice 46 : 1) Pour tout $r \in]0, R[$, la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est normalement convergente dans la boule fermée $\overline{B}(0,r)$, donc elle y est uniformément convergente, et on a la continuité de la somme de cette série $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ en tout point de $B(0,R)$.

2) Par hypothèse, il existe un plus petit entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $a_k \neq 0$, on peut alors écrire :

$$f(z) = z^k g(z), \text{ avec } g(z) = \sum_{n > 0} a_{k+n} z^n$$

Pour tout $z \in B(0,R) \setminus \{0\}$, la série $\sum_{n \geq 0} a_{k+n} z^n$ converge, donc R est aussi le rayon de convergence de la série $g(z)$, et par suite g est continue sur $B(0,R)$.

Mais on a $g(0) = a_k \neq 0$, donc il existe $r_0 > 0$ tel que :

$$|g(z) - g(0)| \leq \frac{|a_k|}{2} \quad \forall |z| < r_0 .$$

On conclut que pour tout $z \in B(0, r_0)$, on a :

$$|g(z)| \geq |g(0)| - \frac{|a_k|}{2} = \frac{|a_k|}{2} > 0 .$$

Et à fortiori, $g(z) \neq 0 \quad \forall z \in B(0, r_0)$.

3) s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a_k \neq 0$; en utilisant 2), il existe $r_0 > 0$ tel que $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in B(0, r_0) \setminus \{0\}$. Cela est absurde, avec le fait que $z_p \xrightarrow[p \to \infty]{} 0$ et $f(z_p) = 0$, donc f est identiquement nulle dès qu'elle est analytique et nulle sur une suite d'éléments distincts de la boule tendant vers 0.

4) En considérant la fonction $h(z) := f(z) - g(z) = \sum_{n \geq 0} (a_n - b_n) z^n$, h est analytique sur la boule ouverte $B(0, r)$. Et en appliquant 3), on a $a_n = b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, et h est identiquement nulle sur $B(0, r)$.

Exercice 47. Posons : $\psi := \varphi_a \circ f \circ \varphi_{-a}$,

où $\varphi_\alpha(z) := \dfrac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha} z}$. ψ est holomorphe sur $B(0,1)$

à valeurs dans $B(0,1)$.

Et on a, $\Psi(0) = \varphi_a(f(a)) = \varphi_a(a) = 0$.

D'après le lemme de Schwarz, on a :

$|\Psi(z)| \leq |z| \quad \forall z \in B(0,1)$ et $|\Psi'(0)| \leq 1$.

Mais pour $c := \varphi_a(b) \in B(0,1) \setminus \{0\}$, on a :

$\Psi(c) = \varphi_a(f(b)) = \varphi_a(b) = c$.

Donc, $|\Psi(c)| = |c|$. Et encore par le lemme de Schwarz, il existe au moins $\lambda \in S^1$ tel que :

$\Psi(z) = \lambda z \quad \forall z \in B(0,1)$.

Donc, $f(z) = \varphi_{-a} \circ \Psi \circ \varphi_a(z) = \lambda z \quad \forall z \in B(0,1)$.

Mais $f(c) = c = \lambda c$, donc $\lambda = 1$; et par suite

$f(z) = z \quad \forall z \in B(0,1)$. Donc : $f = id_{B(0,1)}$.

<u>Exercice 48</u>: 1) a) $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, $|i| = 1$ et

$\arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Donc, $\log(i) = \operatorname{Log}(1) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow \log(i) = i\frac{\pi}{2} + 2ik\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\log(i)$ prend une infinité de valeurs, toutes sont purement imaginaires. Et deux valeurs de $\log(i)$ diffèrent par un facteur $2k\pi i$ ($k \in \mathbb{Z}$).

b) $z = 1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$.

$|z| = \sqrt{2}$ et $\arg(z) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Donc, $\log(1+i) = \mathrm{Log}(\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$

$= \frac{1}{2}\mathrm{Log}(2) + i\frac{\pi}{4} + 2k\pi i$ ($k \in \mathbb{Z}$).

c) $\log(7e^{i\frac{\pi}{4}}) = \mathrm{Log}|7e^{i\frac{\pi}{4}}| + i\arg(7e^{i\frac{\pi}{4}})$

$= \mathrm{Log}(7) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$ ($k \in \mathbb{Z}$)

2) a) $\mathrm{Log}(i) = \mathrm{Log}(e^{i\frac{\pi}{2}}) = \mathrm{Log}(1) + \frac{\pi}{2}i = \frac{\pi}{2}i$

b) $\mathrm{Log}(1+i) = \mathrm{Log}|1+i| + \frac{\pi}{4}i = \frac{1}{2}\mathrm{Log}(2) + \frac{\pi}{4}i$.

c) $\mathrm{Log}(-i) = \mathrm{Log}(e^{-i\frac{\pi}{2}}) = \mathrm{Log}(1) + \frac{3\pi}{2}i = -i\frac{\pi}{2}$

d) $\mathrm{Log}(5) = \mathrm{Log}(5e^{i0}) = \mathrm{Log}(5) + 0i = \mathrm{Log}(5)$.

e) $\mathrm{Log}(e^{i6\pi}) = \mathrm{Log}(e^{i0}) = \mathrm{Log}(1) + 0i = 0$.

3) a) $e^z = 3 \iff e^z = e^{\mathrm{Log}(3)} \iff e^{z-\mathrm{Log}(3)} = 1$

$\iff z - \mathrm{Log}(3) = i\,2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

$\iff z = \mathrm{Log}(3) + i\,2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Donc, l'ensemble des solutions de l'équation $e^{z}=3$ est :

$$S=\left\{ Log(3)+i\,2k\pi \;/\; k\in\mathbb{Z} \right\}.$$

b) $Log_p(z)+Log_p(2z)=\frac{3\pi}{2}$ (E).

$$(E)\iff \log|z|+i\,Arg(z)+Log|2z|+i\,Arg(2z)=\frac{3\pi}{2}$$

$$\iff Log|2z^2|+i\,2Arg(z)=\frac{3\pi}{2} \quad \left(Arg(2z)=Arg(z)\right)$$

$$\iff \begin{cases} Log|2z^2|=\frac{3\pi}{2} & (1) \\ 2\,Arg(z)=0 & (2) \end{cases}$$

$$(1)\Rightarrow 2|z|^2=e^{\frac{3\pi}{2}} \Rightarrow |z|=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$(2)\Rightarrow Arg(z)=0 \Rightarrow z=|z|e^{i0}=|z|$$

Donc, l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$S=\left\{ \frac{e^{\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \right\}.$$