Série n°2 : Intégrale Généralisée et Équations différentielles.

Exercice 1.

1. En utilisant les primitives usuelles, déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(x)\, dx, \qquad B = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x}\, dx, \qquad C = \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2}\, dx.$$

2. Étudier la nature des intégrales suivantes :

$$A = \int_0^1 \frac{x^2+1}{\sqrt{x}(1-x)}\, dx, \quad B = \int_1^{+\infty} x^{2020} e^{-x}\, dx, \quad C = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + 2 - cos(x)}\, dx,$$

$$D = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x}\, dx, \quad E = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x}}\, dx, \quad F = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\sin(x))\, dx.$$

$$G = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2}\, dx, \quad H = \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{\cos(x)}}{x}\, dx, \quad I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\, dx, \quad J = \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\, dx.$$

3. Montrer la convergence et calculer :

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} \quad (a<b), \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\, dx.$$

Exercice 2.

1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 f(x) \ln x\, dx$ est absolument convergente.
2. Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction positive et décroissante telle que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ converge. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x f(x) = 0$.
3. Soit $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que f' soit bornée. Montrer que $\displaystyle\lim_1 f$ existe.

Exercice 3. Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, dt$ converge et soient $a, b > 0$. Pour tout $x > 0$, on pose :

$$F(x) := \int_x^{+\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t}\, dt \quad \text{et} \quad G(x) := \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\, dt.$$

1. Montrer que $F = G$.
2. Montrer que si une fonction $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est continue et nulle en 0, alors $\displaystyle\lim_{x\to0} \int_{ax}^{bx} \frac{g(t)}{t}\, dt = 0$.
3. Déduire des deux questions précédentes que

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t}\, dt = f(0) \ln \frac{b}{a}.$$

4. Application : montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-at)-\exp(-bt)}{t}\, dt = \ln \frac{b}{a}$.

Exercice 4. Résoudre les équations différentielles suivantes :
(E_1) : $(1+x)y'+y-2=0$,
(E_2) : $y''-3y'+2y=1+2e^x$.

Exercice 5. Résoudre les équations différentielles suivantes :
(Sep) : $(\cos t)y'=(\sin t)y^4$,
(Ber) : $y'=y+ty^3$,
(Ric) : $y'=(t-1)y+y^2-t$, sachant qu'elle admet une solution particulière constante.

Exercice 6 (facultatif). Étudier la nature des intégrales suivantes :

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{4x^2+x+1}}\,dx,\quad \int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x}\,dx,\quad \int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x^2}\,dx,\quad \int_0^{+\infty}2^{-x}x^4\,dx,$$

$$\int_0^1\frac{dx}{1-\sqrt{x}},\quad \int_0^1\frac{dx}{(\tan x-x)^\alpha},\quad \int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha(1-x)^\beta}\,dx,\quad \int_0^{+\infty}\frac{1}{x^{\arctan x}}\,dx.$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx,\quad \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx,\quad \int_0^1\sin(1/x)\,dx,\quad \int_0^1\frac{dx}{\arccos x},\quad \int_0^{+\infty}\sin(x^2)\,dx,$$

$$\int_0^{+\infty}\cos(x^\alpha)\,dx,\quad \int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\,dx,\quad \int_1^{+\infty}\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\sin x\,dx,\quad \int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^\alpha}\,dx.$$

Exercice 7 (facultatif). Soient $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ une fonction localement intégrable, et $I_n=\int_0^n f(x)\,dx$. On suppose que $I_n\to I\in\mathbb{R}$. Est-il vrai que sous cette hypothèse :

1. Si l'intégrale $\int_0^{+\infty}f(x)\,dx$ converge alors $\int_0^{+\infty}f(x)\,dx=I$.
2. Si f est positive alors l'intégrale $\int_0^{+\infty}f(x)\,dx$ converge ?
3. Si f est positive alors $\lim_{+\infty}f=0$?
4. f admet en $+\infty$ une limite (finie ou infinie), alors l'intégrale $\int_0^{+\infty}f(x)\,dx$ converge ?
5. Si f est dérivable et de dérivée bornée, alors l'intégrale $\int_0^{+\infty}f(x)\,dx$ converge ?

Exercice 8 (facultatif). Montrer la convergence et calculer :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2},\quad \int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}},\quad \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)},\quad \int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1},\quad \int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)},\quad \int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-3x+2)^2},\quad \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\cos t\,dt,\quad \int_4^5\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t-4)(5-t)}},$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}\,dt,\quad (\alpha\in\mathbb{R}),\ \int_0^1\frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,dt,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(a+x^2)(b+x^2)}\quad (a,b>0).$$

Exercice 9 (facultatif). Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\, dt$.

1. Montrer que I est convergente.
2. Pour $\varepsilon > 0$, établir la relation :
$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\, dt = \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}\, dt.$$
3. En déduire le calcule de I (utiliser la première formule de la moyenne).
4. En déduire le calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}\, dx$ (Poser $x = e^{-t}$).

Exercice 10 (facultatif). Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^3+1)^n}$, où n est un entier naturel.

1. Etudier pour quelles valeurs de n l'intégrale I_n converge.
2. Calculer I_1.
3. Montrer que si $n \geq 2$, on a : $I_{n+1} = \frac{3n-1}{3n} I_n$.
4. En déduire l'expression de I_n.

Exercice 11 (facultatif). Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(t^2+1)}$.

1. Montrer que I est convergente.
2. Calculer $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$.
3. En déduire I (poser $x = \sqrt{t}$).

Exercice 12 (facultatif). En posant $u(x) = (1+x^2)y(x)$, résoudre l'équation différentielle suivantes :

$$(E): \quad (1+x^2)y'' + 4xy' + (1-x^2)y = 0.$$