UNIVERSITÉ MOULAY ISMAÏL | FACULTÉ DES SCIENCES

Série n°2 : Intégrale Généralisée et Équations différentielles.

Exercice 1.

1. En utilisant les primitives usuelles, déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(x)\, dx, \qquad B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\, dx, \qquad C = \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\, dx.$$

2. Étudier la nature des intégrales suivantes :

$$A = \int_0^1 \frac{x^2+1}{\sqrt{x}(1-x)}\, dx, \quad B = \int_1^{+\infty} x^{2020}e^{-x}\, dx, \quad C = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+2-cos(x)}\, dx,$$

$$D = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x}\, dx, \quad E = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x}}\, dx, \quad F = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\sin(x))\, dx.$$

$$G = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2}\, dx, \quad H = \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{\cos(x)}}{x}\, dx, \quad I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\, dx, \quad J = \int_0^{+\infty} \cos(x^2)\, dx.$$

3. Montrer la convergence et calculer :

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} \quad (a<b), \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\, dx.$$

Exercice 2.

1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^1 f(x)\ln x\, dx$ est absolument convergente.
2. Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction positive et décroissante telle que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ converge. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$.
3. Soit $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que f' soit bornée. Montrer que $\lim\limits_{1} f$ existe.

Exercice 3. Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, dt$ converge et soient $a, b > 0$. Pour tout $x > 0$, on pose :

$$F(x) := \int_x^{+\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t}\, dt \quad \text{et} \quad G(x) := \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\, dt.$$

1. Montrer que $F = G$.
2. Montrer que si une fonction $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est continue et nulle en 0, alors $\lim\limits_{x\to 0} \int_{ax}^{bx} \frac{g(t)}{t}\, dt = 0$.

3. Déduire des deux questions précédentes que
$$\int_0^{+\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t}\,dt = f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

4. Application : montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt = \ln\frac{b}{a}$.

Exercice 4. Résoudre les équations différentielles suivantes :
(E_1) : $(1+x)y' + y - 2 = 0$,
(E_2) : $y'' - 3y' + 2y = 1 + 2e^x$.

Exercice 5. Résoudre les équations différentielles suivantes :
(Sep) : $(\cos t)y' = (\sin t)y^4$,
(Ber) : $y' = y + ty^3$,
(Ric) : $y' = (t-1)y + y^2 - t$, sachant qu'elle admet une solution particulière constante.

Exercice 6 (facultatif). Étudier la nature des intégrales suivantes :
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{4x^2+x+1}}\,dx,\quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx,\quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx,\quad \int_0^{+\infty} 2^{-x}x^4\,dx,$$
$$\int_0^1 \frac{dx}{1-\sqrt{x}},\quad \int_0^1 \frac{dx}{(\tan x - x)^\alpha},\quad \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha(1-x)^\beta}\,dx,\quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{\arctan x}}\,dx.$$
$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx,\quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx,\quad \int_0^1 \sin(1/x)\,dx,\quad \int_0^1 \frac{dx}{\arccos x},\quad \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx,$$
$$\int_0^{+\infty} \cos(x^\alpha)\,dx,\quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx,\quad \int_1^{+\infty} \left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\sin x\,dx,\quad \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^\alpha}\,dx.$$

Exercice 7 (facultatif). Soient $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable, et $I_n = \displaystyle\int_0^n f(x)\,dx$. On suppose que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = I \in \mathbb{R}$. Est-il vrai que sous cette hypothèse :

1. Si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = I$.
2. Si f est positive alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge ?
3. Si f est positive alors $\displaystyle\lim_{+\infty} f = 0$?
4. f admet en $+\infty$ une limite (finie ou infinie), alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge ?
5. Si f est dérivable et de dérivée bornée, alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge ?

Exercice 8 (facultatif). Montrer la convergence et calculer :
$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2},\quad \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}},\quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)},\quad \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1},\quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)}, \quad \int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-3x+2)^2}, \quad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\cos t\, dt, \quad \int_4^5 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t-4)(5-t)}},$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}\, dt, \quad (\alpha \in \mathbb{R}), \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\, dt, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(a+x^2)(b+x^2)} \quad (a, b > 0).$$

Exercice 9 (facultatif). Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\, dt$.

1. Montrer que I est convergente.
2. Pour $\varepsilon > 0$, établir la relation :
$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\, dt = \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}\, dt.$$
3. En déduire le calcule de I (utiliser la première formule de la moyenne).
4. En déduire le calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}\, dx$ (Poser $x = e^{-t}$).

Exercice 10 (facultatif). Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^3+1)^n}$, où n est un entier naturel.

1. Etudier pour quelles valeurs de n l'intégrale I_n converge.
2. Calculer I_1.
3. Montrer que si $n \geq 2$, on a : $I_{n+1} = \dfrac{3n-1}{3n} I_n$.
4. En déduire l'expression de I_n.

Exercice 11 (facultatif). Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(t^2+1)}$.

1. Montrer que I est convergente.
2. Calculer $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$.
3. En déduire I (poser $x = \sqrt{t}$).

Exercice 12 (facultatif). En posant $u(x) = (1+x^2)y(x)$, résoudre l'équation différentielle suivantes :

$$(E) : \quad (1+x^2)y'' + 4xy' + (1-x^2)y = 0.$$

Corrigé de la Série n°2

Exercice 1.

1. $*$ La nature de $A = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(x)\, dx$:

   La fonction $t \mapsto \tan(x)$ est localement intégrable sur $[0; \frac{\pi}{2}[$ car elle est continue. Il y a donc un problème en $\frac{\pi}{2}$.

$$A = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \int_0^t \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\, dx = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \Big[-\ln(|\cos(x)|) \Big]_0^t = -\lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \ln(|\cos(t)|) = +\infty.$$

   Donc, l'intégrale A est divergente.

   $*$ La nature de $B = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\, dx$:

   La fonction $t \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}$ est localement intégrable sur $]0; \frac{\pi}{4}]$ (car continue). Pour étudier la convergence de cette intégrale, il suffit de se préoccuper du comportement au voisinage de 0. Soit $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{4}$. L'integrand est de la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u = \sin$ donc se primitive en $2\sqrt{u}$:

$$B = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \Big[2\sqrt{\sin(x)}\Big]_\varepsilon^{\frac{\pi}{4}} = \lim_{\varepsilon\to 0} 2\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 2\sqrt{\sin(\varepsilon)} = 2^{\frac{3}{4}},$$

   donc l'intégrale B est convergente et $B = 2^{\frac{3}{4}}$.

   $*$ La nature de $C = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\, dx$:

   La fonction $t \mapsto xe^{-x^2}$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$, donc le problème se pose en $+\infty$ et en $-\infty$. Soit $c \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_c^{+\infty} xe^{-x^2}\, dx = \lim_{A\to+\infty} \int_c^A xe^{-x^2}\, dx = \lim_{A\to+\infty} \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\, dx\right]_c^A = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{2}e^{-A^2} + \frac{1}{2}e^{-c^2} = \frac{1}{2}e^{-c^2},$$

   et

$$\int_{-\infty}^c xe^{-x^2}\, dx = \lim_{A\to-\infty} \int_A^c xe^{-x^2}\, dx = \lim_{A\to-\infty} \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\, dx\right]_A^c = -\frac{1}{2}e^{-c^2} + \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2}e^{-A^2} = -\frac{1}{2}e^{-c^2}.$$

   Donc, les deux intégrales $\displaystyle\int_c^{+\infty} xe^{-x^2}\, dx$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^c xe^{-x^2}\, dx$ sont convergentes. Par suite, l'intégrale B est convergente et on a

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\, dx = \int_{-\infty}^0 xe^{-x^2}\, dx + \int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\, dx = 0.$$

2. $*$ La nature de l'intégrale $A = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+1}{\sqrt{x}(1-x)}\, dx$:

La fonction $x \mapsto \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x}(1-x)}$ est continue sur $]0,1[$, donc localement intégrable. Soit $0 < c < 1$.

$-$ Au voisinage de 0 on a : $\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x}(1-x)} \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et $\displaystyle\int_0^c \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ est une intégrale de Riemann convergente (car $\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$), par le critère de comparaison, l'integrale $\displaystyle\int_0^c \frac{x^2+1}{\sqrt{x}(1-x)}\, dx$ converge.

$-$ Au voisinage de 1 on a : $\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x}(1-x)} \underset{1^-}{\sim} \dfrac{2}{1-x}$ et $\displaystyle\int_c^1 \frac{2}{1-x}\, dx$ est une intégrale de Riemann divergente (car $\alpha = 1 \geq 1$), par le critère de comparaison, l'integrale $\displaystyle\int_c^1 \frac{x^2+1}{\sqrt{x}(1-x)}\, dx$ diverge.

Conclusion : l'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+1}{\sqrt{x}(1-x)}\, dx$ diverge (CV+DV=DV).

$*$ La nature de l'intégrale $B = \displaystyle\int_1^{+\infty} x^{2020} e^{-x}\, dx$:

La fonction $x \mapsto x^{2020}e^{-x}$ est continue (donc localement intégrable) sur $[1,+\infty[$. D'où le problème se pose en $+\infty$. Puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2(x^{2020}e^{-x}) = 0$, d'après les règles de Riemann ($\alpha = 2 > 1$), l'intégrale B converge.

$*$ La nature de l'intégrale $C = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+2-cos(x)}\, dx$:

La fonction $x \mapsto \dfrac{x^2}{x^4+2-cos(x)}\, dx$ est paire et localement intégrable sur $]-\infty,+\infty[$, donc les deux intégrales $C = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+2-cos(x)}\, dx$ et $C' = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+2-cos(x)}\, dx$ sont de même nature (dans le cas de convergence on a $C = 2C'$).

Au voisinage de $+\infty$ on a : $\dfrac{x^2}{x^4+2-cos(x)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ est une intégrale de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$). Donc, d'après le critère de comparaison, l'intégrale C' converge, par suite l'intégrale C converge.

$*$ La nature de l'intégrale $D = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x}\, dx$:

La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin^2(x)}{x}$ est continue sur $]0,+\infty[$, il y a donc deux problèmes en 0 et en $+\infty$. Soit $c \in]0,+\infty[$.

$-$ L'intégrale $D_1 := \displaystyle\int_0^c \frac{\sin^2(x)}{x}\, dx$ est convergente car la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin^2(x)}{x}$ admet une limite finie en 0 $\left(\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{\sin^2(x)}{x} = \lim_{x\to0^+} \sin(x)\frac{\sin(x)}{x} = 0\times 1 = 0\right)$.

$-$ Pour l'intégrale $D_2 := \displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x}\, dx$ on a

$$D_2 = \int_c^{+\infty} \frac{1-\cos(2x)}{2x}\, dx = \int_c^{+\infty} \frac{1}{2x}\, dx - \int_c^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{2x}\, dx := D_2' + D_2''$$

$+$ D_2' est une intégrale de Riemann divergente ($\alpha = 1 \leq 1$).

+ Pour D_2'' on va utiliser l'intégration par parties :

$$D_2'' = \left[\frac{-\sin(2x)}{4x^2}\right]_c^{+\infty} + \int_c^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{4x^2}\,dx = \frac{\sin(2c)}{4c^2} + \frac{1}{4}\int_c^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x^2}\,dx.$$

Comme $\left|\frac{\sin(2x)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ et $\int_c^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ est une intégrale de Riemann convergente, alors D_2'' est convergente, par suite D_2 diverge.
Conclusion : l'intégrale $D = D_1 + D_2$ diverge (CV+DV=DV).

$*$ La nature de l'intégrale $E = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x}}\,dx$:

La fonction $t \mapsto \frac{e^{-\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0, +\infty[$, le problème se pose donc en 0 et en $+\infty$. Soit $c > 0$,

$-$ Au voisinage de 0 on a : $\frac{e^{-\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x}} \underset{0^+}{\sim} \frac{e^{-1}}{\sqrt{x}}$ et $\int_0^c \frac{e^{-1}}{\sqrt{x}}\,dx$ est une intégrale de Riemann convergente ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$), donc d'après le critère de comparaison $E_1 = \int_0^c \frac{e^{-\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x}}\,dx$ est convergente.

$-$ Pour $x \geq c$ on a $\frac{e^{-\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x}} \leq \frac{e^{-x}}{\sqrt{c}}$ et $\int_c^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{c}}\,dx$ converge (voir le cours), d'où d'après le critère de comparaison $E_2 = \int_c^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x}}\,dx$ est convergente.

Conclusion : l'intégrale $E = E_1 + E_2$ converge.

$*$ La nature de l'intégrale $F = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \sin(x))\,dx$:

La fonction $t \mapsto \ln(1 + \sin(x))$ est continue sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, le problème se pose donc en $-\frac{\pi}{2}$. Cherchons un équivalent de $\ln(1 + \sin(x))$ au voisinage de $-\frac{\pi}{2}$. Posons $u = x + \frac{\pi}{2}$, donc

$$\ln(1 + \sin(x)) = \ln(1 - \cos(u)) = \ln(\frac{u^2}{2} + o(u^2)) = 2\ln(u)\left(1 + \frac{\ln(\frac{1}{2} + o(1))}{2\ln(u)}\right) \underset{0^+}{\sim} 2\ln(u).$$

Comme $\int_0^1 \ln(x)\,dx$ converge (voir le cours), d'après le critère d'équivalence, l'intégrale F est convergente.

$*$ La nature de l'intégrale $G = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}\,dx$:

La fonction $x \mapsto \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$, il y a donc deux problèmes en 0 et en $+\infty$. Soit $c \in]0, +\infty[$.

$-$ L'intégrale $G_1 := \int_0^c \frac{1 - \cos(x)}{x^2}\,dx$ est convergente car la fonction $x \mapsto \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$ admet une limite finie en 0 $\left(\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}\right)$.

– Puisque $|\cos x| \leq 1$, alors

$$\left|\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right| \leq \frac{1+|\cos(x)|}{x^2} \leq \frac{2}{x^2}, \quad \forall x \in [c, +\infty[.$$

Comme $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ est une intégrale de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$), par le critère de comparaison, l'intégrale $G_2 := \displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$ est convergente.
Conclusion : l'intégrale $G = G_1 + G_2$ est convergente (CV+CV=CV).

$*$ La nature de l'intégrale $H = \displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{\cos(x)}}{x}\, dx$:

La fonction $x \mapsto \dfrac{e^{\cos(x)}}{x}$ est continue sur $]-\infty, -1]$, il suffit donc d'étudier le comportement au voisinage de $-\infty$. Puisque $-1 \leq \cos x \leq 1$, on a $e^{-1} \leq e^{\cos x} \leq e$ et donc

$$\left|\frac{e^{\cos(x)}}{x}\right| = \frac{e^{\cos(x)}}{|x|} \geq \frac{e^{-1}}{|x|} = \frac{e^{-1}}{-x}, \quad \forall x \in]-\infty, -1].$$

Comme $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{-1}}{x}\, dx$ est une intégrale de Riemann divergente ($\alpha = 1 \leq 1$), par le critère de comparaison, l'intégrale H est divergente.

$*$ La nature de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\, dx$:

La fonction $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0, +\infty[$, il y a donc deux problèmes en 0 et en $+\infty$. Soit $c \in]0, +\infty[$.
– L'intégrale $I_1 := \displaystyle\int_0^c \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\, dx$ est convergente. En effet, puisque $|\cos x| \leq 1$, alors

$$\left|\frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\right| \leq \frac{|\cos(x)|}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \forall x \in]0, c].$$

Comme $\displaystyle\int_0^c \frac{dx}{\sqrt{x}}$ est une intégrale de Riemann convergente ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$), par le critère de comparaison, l'intégrale I_1 est convergente.
– D'après le critère d'Abel, l'intégrale $I_2 := \displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\, dx$ est convergente. En effet, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ garde un signe constant, décroissante et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$. D'autre part, pour tout $t \in [c, +\infty[$: On a $\left|\displaystyle\int_c^t \cos(x)\, dx\right| \leq 2$.
Conclusion : l'intégrale $I = I_1 + I_2$ est convergente (CV+CV=CV).

$*$ La nature de l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\, dx$:

En faisant le changement de variable $u = x^2$ on obtient $J = \frac{1}{2}I$. Comme l'intégrale I est convergente, alors J l'est aussi.

3. $*$ La convergence et le calcul de $A = \displaystyle\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}$ $\quad (a < b)$:

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}$ est localement intégrable (car continue) sur $]a, b[$. Il y a donc deux problèmes en a et en b. Or

$$\frac{1}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} \underset{a^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{(t-a)(b-a)}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} \underset{b^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{(b-a)(b-t)}},$$

et $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{t-a}}, \int_a^b \frac{dt}{\sqrt{b-t}}$ sont deux intégrales de Riemann convergentes $(\alpha = \frac{1}{2} < 1)$, alors l'intégrale A est convergente.

Pour le calcul, on remarque que A a la forme d'une intégrale abélienne de deuxième espèce. On a

$$\begin{aligned}
(t-a)(b-t) &= -t^2 + (a+b)t - ab \\
&= -\left(t - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \quad \text{(la forme canonique)} \\
&= \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{2t}{b-a} - \frac{a+b}{b-a}\right)^2\right].
\end{aligned}$$

Alors, $\dfrac{1}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} = \dfrac{2}{b-a} \dfrac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{2t}{b-a} - \dfrac{a+b}{b-a}\right)^2}}$.

Effectuons le changement de variable $u = \dfrac{2t}{b-a} - \dfrac{a+b}{b-a}$, on trouve

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \\
&= 2\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \quad \left(u \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \text{ est paire}\right) \\
&= 2 \lim_{x \to 1^-} \Big[\arcsin u\Big]_0^x \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

$*$ La convergence et le calcul de $B = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\, dx$.

La fonction $x \mapsto \ln(\sin x)$ est localement intégrable (car continue) sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. De plus, lorsque $x \to 0^+$, on a

$$\ln(\sin x) = \ln(x + o(x)) = \ln(x) + \ln(1 + o(1)) \underset{0^+}{\sim} \ln x.$$

Comme $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\, dx$ converge (voir le cours), d'après le critère d'équivalence, l'intégrale $B' := \displaystyle\int_0^1 \ln(\sin x)\, dx$ est convergente. Or $B = B' + \displaystyle\int_1^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\, dx$ et $\displaystyle\int_1^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\, dx$ converge car la fonction $x \mapsto \ln(\sin x)$ est continue sur le compacte $[1, \frac{\pi}{2}]$, donc B est convergente.

Pour le calcul, de $\sin x = 2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})$ on abtient

$$\begin{aligned}
B &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})\ dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\ dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\frac{x}{2})\ dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\frac{x}{2})\ dx \\
&= \frac{\pi \ln 2}{2} + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\ dx + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x)\ dx \quad (\text{poser} \quad u = \frac{\pi}{2} - x) \\
&= \frac{\pi \ln 2}{2} + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\ dx + 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(u)\ du \quad (\text{Relation de Chasle}) \\
&= \frac{\pi \ln 2}{2} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\ dx \\
&= \frac{\pi \ln 2}{2} + 2B.
\end{aligned}$$

D'où $B = -\dfrac{\pi \ln 2}{2}$.

Exercice 2.

1. Montrons que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ln x\ dx$ est absolument convergente :
   Puisque f est continue sur le compact $[0,1]$, elle y est bornée ; il existe donc $M \geq 0$ tel que $|f(t)\ln t| \leq M|\ln t|$ pour tout $t \in [0,1]$. D'où
   $$|f(t)\ln t| \leq M|\ln t|. \tag{1}$$
   Or, sur $]0,1]$ on a $|\ln t| = -\ln t$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln x\ dx$ est convergente (voir le cours), de l'inégalité (1) et le critère de comparaison, on déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ln x\ dx$ est absolument convergente.
2. Montrons que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0$:
   Soit $\varepsilon > 0$. Comme l'intégrale de f est convergente, d'après le critère de Cauchy, on a :
   $$(\exists A > 0)(\forall x > A), \quad \int_x^{2x} f(t)\ dt < \varepsilon.$$
   Comme la fonction f es décroissante sur $]1,+\infty[$, on a alors
   $$(\forall x > A), \quad xf(2x) = \int_x^{2x} f(2x)\ dt \leq \int_x^{2x} f(t)\ dt < \varepsilon.$$
   On en déduit que $0 \leq 2xf(2x) \leq 2\varepsilon$ pour tout $x > A$, ce qui entraîne :
   $$\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0.$$

3. Montrons que $\lim_{x\to 1} f(x)$ existe :

   On a $f(x)-f(0) = \int_0^x f'(t)\,dt$, d'où $\lim_{x\to 1} f(x) = f(0)+\lim_{x\to 1}\int_0^x f'(t)\,dt$. Or l'intégrale impropre $\int_0^1 f'(t)\,dt$ est convergente, alors $\lim_{x\to 1}\int_0^x f'(t)\,dt$ existe. Par conséquent, $\lim_{x\to 1} f(x)$ existe aussi.

Exercice 3.

1. Soit $x > 0$. On a :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^{+\infty} \frac{f(at)}{t}\,dt - \int_x^{+\infty} \frac{f(bt)}{t}\,dt \\ &= \int_{ax}^{+\infty} \frac{f(u)}{u}\,du - \int_{bx}^{+\infty} \frac{f(v)}{v}\,dv \quad (\text{poser} \quad u = at \quad \text{et} \quad v = bt) \\ &= \int_{ax}^{+\infty} \frac{f(u)}{u}\,du + \int_{+\infty}^{bx} \frac{f(v)}{v}\,dv \quad (\text{Ralation de Chasle}) \\ &= G(x). \end{aligned}$$

2. En supposant, sans perte de généralité, $b \geq a$. La fonction $t \mapsto g(t)$ est continue sur $[ax, bx]$ et la fonction $x \mapsto \frac{1}{t}$ est positive sur $[ax, bx]$, donc, d'après la première formule de la moyenne, il existe $c_x \in [ax, bx]$ tel que

$$\int_{ax}^{bx} \frac{g(t)}{t}\,dt = g(c_x)\int_{ax}^{bx} \frac{1}{t}\,dt = g(c_x)\ln(\frac{b}{a}).$$

   Comme $c_x \to 0$ quad $x \to 0$, alors,

$$\lim_{x\to 0}\int_{ax}^{bx} \frac{g(t)}{t}\,dt = \lim_{c_x\to 0} g(c_x)\ln(\frac{b}{a}) = g(0)\ln(\frac{b}{a}) = 0.$$

3. On considère la fonction $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) := f(x) - f(0)$. Cette fonction est continue et nulle en 0. D'où,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t}\,dt &= \lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0} G(x) \quad (\text{D'après la première question}) \\ &= \lim_{x\to 0}\int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\,dt \\ &= \lim_{x\to 0}\int_{ax}^{bx} \frac{f(0)+g(t)}{t}\,dt \\ &= \lim_{x\to 0}\int_{ax}^{bx} \frac{f(0)}{t}\,dt + \lim_{x\to 0}\int_{ax}^{bx} \frac{g(t)}{t}\,dt \\ &= f(0)\lim_{x\to 0}\int_{ax}^{bx} \frac{1}{t}\,dt + 0 \quad (\text{D'après la deuxième question}) \\ &= f(0)\ln(\frac{b}{a}). \end{aligned}$$

4. Appliquer le resultat de la question précédente à la fonction $f : x \mapsto e^{-x}$ qui vérifie les hypothèses.

Exercice 4. La semaine prochaine *inchallah.*

Exercice 5. La semaine prochaine *inchallah.*

Exercice 6 (facultatif).

$*$ La nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{4x^2+x+1}}\,dx$:

L'intégrande est positif, continu sur $[1,+\infty[$ et majoré par $\dfrac{1}{2x^2}$ donc, d'après le critère de comparaison, l'intégrale est (absolument) convergente.
Remarque : une autre façon de montrer que cette intégrale converge est de la transformer, par le changement de variable $\tan\theta = \dfrac{8x+1}{\sqrt{15}}$, en une intégrale non impropre, que l'on peut même calculer.

$*$ La nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx$:

Au voisinage de 0, on a $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x} \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{x} > 0$ donc, d'après le critère d'équivalence, l'intégrale diverge. (en $+\infty$, elle est absolument convergente car $0 < \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x} \leq \mathrm{e}^{-x}$ pour $x \geq 1$).

$*$ La nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$:

L'intégrande est continu sur $[0,+\infty[$ et $\dfrac{|\cos x|}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{x^2}$ donc l'intégrale est absolument convergente, d'après le critère de comparaison.

$*$ La nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2^{-x}x^4\,dx$:

Le problème se pose en $+\infty$. On a $2^{-x} = \mathrm{e}^{-x\ln 2}$ et $\ln 2 > 0$ d'où

$$\lim_{x\to+\infty} x^4.2^{-x} = \lim_{x\to+\infty} x^4\,\mathrm{e}^{-x\ln 2} = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x\ln 2} = 0.$$

Donc, d'après les règles de Riemann, l'intégrale converge (absolument).

$*$ La nature de $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{1-\sqrt{x}}$:

Par changement de variable et équivalence, l'intégrale en 1 est de même nature que celle de $\dfrac{1}{y}$ en 0 donc divergente.

$*$ La nature de $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{(\tan x - x)^\alpha}$:

En 0, par équivalence, l'intégrale est de même nature que celle de $\dfrac{1}{x^{3\alpha}}$ donc, elle converge (absolument) si et seulement si $3\alpha < 1$, c'est-à-dire $\alpha < 1/3$ (elle n'est même pas impropre si $\alpha \leq 0$).

$*$ La nature de $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha(1-x)^\beta}\,dx$:

L'intégrande est équivalent à $\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}$ en 0 et à $\dfrac{\ln 2}{(1-x)^\beta}$ en 1. D'après le critère d'équivalence, l'intégrale est donc convergente (absolument) si et seulement si $\alpha - 1$ et β sont strictement inférieurs à 1, c'est-à-dire $\alpha < 2$ et $\beta < 1$.

$*$ La nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{\arctan x}}\, dx$:

On a $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{\arctan x}} = 1$ car $\arctan x . \ln x \underset{0^+}{\sim} x \ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$. Par conséquent, l'intégrale est convergente en 0 car l'intégrande admet une limite finie en 0.
Au voisinage de $+\infty$, on a $\displaystyle\frac{1}{x^{\arctan x}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\pi/2}}$ (car quand $y := \dfrac{1}{x} \to 0^+$, $\dfrac{x^{\pi/2}}{x^{\arctan x}} = y^{-\pi/2+\arctan(1/y)} = y^{-\arctan(y)} = \dfrac{1}{y^{\arctan y}} \to 1$). Puisque $\pi/2 > 1$, l'intégrale converge donc aussi en $+\infty$.

$*$ La nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\, dx$ et de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx$:

En 0, par équivalence, on a $\dfrac{\cos x}{x^\alpha} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x^\alpha}$ et $\dfrac{\sin x}{x^\alpha} \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{x^\alpha} = \dfrac{1}{x^{\alpha-1}}$. D'où, la première intégrale converge (absolument) si et seulement si $\alpha < 1$ et la seconde si et seulement si $\alpha < 2$.
En $+\infty$, pour chacune des deux intégrales, on a :
$\star$ convergence absolue si $\alpha > 1$ (Voir le cours).
$\star$ convergence simple si et seulement si $\alpha > 0$. En effet, cette condition est non seulement nécessaire (car si $\beta := -\alpha \geq 0$ alors $\displaystyle\int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi/2} x^\beta \sin x \,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi/2} x^\beta \cos x \,\mathrm{d}x$, minorées par $(2k\pi)^\beta$, ne tendent pas vers 0) mais aussi suffisante, d'après le critère d'Abel.

En résumé :
– la première intégrale converge lorsque $0 < \alpha < 1$ et sa convergence n'est jamais absolue ;
– la seconde converge lorsque $0 < \alpha < 2$ mais sa convergence n'est absolue que si $\alpha > 1$.

$*$ La nature de $\displaystyle\int_0^1 \sin(1/x)\, dx$:

Par changement de variable $y = \dfrac{1}{x}$, cette intégrale est absolument convergente, comme celle de $\dfrac{\sin y}{y^2}$ en $+\infty$.

$*$ La nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\arccos x}$:

Par changement de variable $y = \arccos x$, cette intégrale est absolument convergente, car $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\arccos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{y}\, dy$ ($\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{y}\, dy$ est faussement impropre, car l'intégrande admet une limite finie en 0).

$*$ La nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\, dx$:

Par changement de variable $y = x^2$, cette intégrale est semi-convergente, comme celle de $\dfrac{\sin y}{y^{1/2}}$ en $+\infty$.

$*$ La nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x^\alpha)\, dx$:

Supposons $\alpha \neq 0$ (sinon, l'intégrale diverge évidemment). Par changement de variable $y = x^\alpha$, cette intégrale est de même nature que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos y}{y^\beta}\, \mathrm{d}y$ avec $\beta = 1 - \dfrac{1}{\alpha}$. Elle est donc convergente si et seulement si $0 < 1 - \dfrac{1}{\alpha} < 1$, c'est-à-dire $\alpha > 1$, et sa convergence n'est jamais absolue.

$*$ La nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx$:

En 0, l'intégrale est faussement impropre (l'intégrande tend vers 0). En $+\infty$, elle diverge, puisque $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$ et que l'intégrale en $+\infty$ de $\dfrac{\cos(2x)}{x}$ est semi-convergente (par changement de variable $y = 2x$) tandis que celle de $\dfrac{1}{x}$ est divergente.

$*$ La nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \sin x\, dx$:

L'intégrande est continu sur $[1, +\infty[$. Vérifions les hypothèses de la règle d'Abel. $x \mapsto 1 - \cos\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$ et nulle à l'infini, et $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \sin t\, \mathrm{d}t = \cos 1 - \cos x$ est bornée. Par conséquent, l'intégrale converge. Mais elle est seulement semi-convergente car $\left|\left(1 - \cos\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\sin x\right| \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{|\sin x|}{2x}$, non intégrable en $+\infty$.

Autre Solution : $\left(1 - \cos\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\sin x = \left(\dfrac{1}{2x} + O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right)\sin x = \dfrac{\sin x}{2x} + O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ donc l'intégrale est semi-convergente, comme somme d'une intégrale semi-convergente et d'une intégrale absolument convergente.

$*$ La nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^\alpha}\, dx$:

En 0, la fonction (positive) $\dfrac{1-\cos x}{x^\alpha} \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{2x^{\alpha-2}}$ est intégrable si et seulement si $\alpha - 2 < 1$, c'est-à-dire $\alpha < 3$. En $+\infty$, l'intégrale converge si $\alpha > 1$ (car $0 \le \dfrac{1-\cos x}{x^\alpha} \le \dfrac{1}{x^\alpha}$) et diverge si $\alpha \le 1$ (car $\displaystyle\int_{2k\pi+\pi/2}^{2k\pi+3\pi/2} \frac{1-\cos x}{x^\alpha}\, \mathrm{d}x \ge \int_{2k\pi+\pi/2}^{2k\pi+3\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln\frac{2k\pi+3\pi/2}{2k\pi+\pi/2} \sim \frac{1}{2k}$). Finalement, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^\alpha}\, \mathrm{d}x$ converge si et seulement si $1 < \alpha < 3$.

Exercice 7 (facultatif).

1. Vrai car si $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_0^A f(x)\, dx = J$ alors $\lim I_n = J$.
2. Vrai car $\forall A \in \mathbb{R}^+ \quad I_{[A]} \le \displaystyle\int_0^A f(x)\, dx \le I_{[A]+1}$ (où $[A]$ désigne la partie entière de A) donc $\left|\displaystyle\int_0^A f(x)\, dx - I\right| \le \max\left(\left|I_{[A]} - I\right|, \left|I_{[A]+1} - I\right|\right) \to 0$ quand $A \to +\infty$.
3. Faux, bien que l'intégrale converge d'après le point précédent, car $\displaystyle\lim_{+\infty} f$ peut ne pas exister. On peut construire un contre-exemple où, de plus, la fonction positive f n'est pas bornée :

$$f(x) = \begin{cases} ng(n^3(x-n)) & \text{si} \quad n \le x \le n + \frac{1}{n^3} \text{ pour un } n \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour n'importe quelle fonction non nulle intégrable $g : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ (par construction, $I_{n+1} = G\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, avec $G = \int_0^1 g(t)\ dt$).

4. Vrai : $\star$ Montrons d'abord que cette limite ℓ est forcément 0. Pour tout entier naturel n, puisque $I_{n+1} - I_n = \int_n^{n+1} f(x)\ dx$, on a : $\inf_{x\geq n} f(x) \leq I_{n+1} - I_n \leq \sup_{x\geq n} f(x)$. Par passage à la limite, on en déduit : $\ell \leq 0 \leq \ell$.
   $\star$ Sachant maintenant que $\lim_{+\infty} f = 0$, montrons que l'intégrale converge. Pour tout $A \in \mathbb{R}^+$, on a
   $$\begin{aligned}\left|\int_0^A f(x)\ dx - I_{[A]}\right| = \left|\int_{[A]}^A f(x)\ dx\right| &\leq \int_{[A]}^A |f(x)|\ dx \\ &\leq (A-[A]) \sup_{[A]\leq x\leq A} |f(x)| \\ &\leq \sup_{x\geq [A]} |f(x)|\end{aligned}$$
   donc
   $$\left|\int_0^A f(x)\ dx - I\right| \leq \sup_{x\geq [A]} |f(x)| + \left|I_{[A]} - I\right| \to 0 \quad \text{quand} \quad A \to +\infty.$$
5. Faux. Exemple : $f(x) = \sin(2\pi x)$.

Exercice 8 (facultatif). La convergence et le calcul de :

$*$ $A = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$: On a $A = [\arctan t]_0^{+\infty} = \pi/2$.

$*$ $B = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$: On a $B = \left[2\sqrt{t}\right]_0^1 = 2$.

$*$ $C = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)}$: La Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$ de l'intégrande est

$$\frac{1}{(X+1)(X+2)} = \frac{1}{X+1} - \frac{1}{X+2}.$$

Une primitive sur $]-1,+\infty[$ est donc : $F(t) = \ln\frac{t+1}{t+2}$. Puisque $\lim_{+\infty} F = 0 \in \mathbb{R}$, l'intégrale converge et $C = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)} = 0 - F(0) = \ln 2$.

$*$ $D = \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}$: Par un raisonnement analogue, avec

$$\frac{1}{X^2-1} = \frac{1/2}{X-1} - \frac{1/2}{X+1},$$

$F(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}$ (sur $]1,+\infty[$) et $D = \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} = 0 - F(2) = \frac{\ln 3}{2}$.

$*\ E = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$: Par un raisonnement analogue, avec

$$\frac{1}{(X+1)(X+2)(X+3)} = \frac{1/2}{X+1} - \frac{1}{X+2} + \frac{1/2}{X+3},$$

$F(x) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$ (sur $]-1,+\infty[$) et $E = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = 0 - F(0) = \frac{\ln(4/3)}{2}$.

$*\ F = \displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-3x+2)^2}$: Par un raisonnement analogue, avec

$$\frac{1}{(X^2-3X+2)^2} = \frac{2}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} - \frac{2}{X-2} + \frac{1}{(X-2)^2},$$

$F(x) = 2\ln\left|\dfrac{x-1}{x-2}\right| - \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x-2}$ (sur $]-\infty,1[$, $]1,2[$ et $]2,+\infty[$) et

$$F = \int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-3x+2)^2} = 0 - F(3) = \frac{3}{2} - 2\ln 2.$$

$*\ G = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt$: Par équivalence, l'intégrale converge en 0 car $\gamma > -1$. Par changement de variable $s = 1/t$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\ln t\ dt$ est l'opposée de $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ln t\ dt$ (donc, comme elle, convergente), si bien que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ln t\,\mathrm{d}t$ est convergente et nulle.

$*\ H = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\cos t\ dt$: Par une double intégration par parties,

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\cos t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{-t}(\sin t - \cos t)}{2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

$*\ I = \displaystyle\int_4^5 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t-4)(5-t)}}$: Par le changement de variable $s = 2t-9$,

$$\int_4^5 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t-4)(5-t)}} = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1-s^2}} = [\arcsin s]_{-1}^1 = \pi.$$

$*\ J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\, dt$: Par le changement de variable $s = \sqrt{1-t}$,

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \ln(1-s^2)\,\mathrm{d}s = 2\,[G(1+s) - G(1-s)]_0^1,$$

avec $G(x) = x\ln x - x$, continue sur $]0,+\infty[$. Puisque $\lim\limits_0 G = 0 \in \mathbb{R}$, l'intégrale est donc convergente et vaut $2\,(G(2) - 0) = 4\,(\ln 2 - 1)$.

$*$ $K_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}\, dt$, $\quad (\alpha \in \mathbb{R})$: L'intégrande (positif et continu sur $]0,+\infty[$) est majoré par $\dfrac{1}{1+t^2}$, donc l'intégrale converge. Par changement de variable $s = 1/t$,

$$K_\alpha := \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}\,\mathrm{d}t = \int_{+\infty}^0 \frac{1}{(1+s^{-2})(1+s^{-\alpha})}\frac{-\mathrm{d}s}{s^2} = \int_0^{+\infty} \frac{s^\alpha}{(1+s^2)(1+s^\alpha)}\,\mathrm{d}s =: K'_\alpha$$

donc $K_\alpha = \dfrac{K_\alpha + K'_\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{4} = K_0$.

$*$ $L = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(a+x^2)(b+x^2)} \quad (a,b>0)$:

L'intégrale converge en $\pm\infty$ comme celle de $\dfrac{1}{x^4}$.

$-$ Cas général : $b \neq a$. L'intégrande s'écrit alors $\dfrac{1}{b-a}\left(\dfrac{1}{x^2+a} - \dfrac{1}{x^2+b}\right)$ donc admet pour primitive

$$F(x) := \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\frac{x}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}}\arctan\frac{x}{\sqrt{b}}\right).$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(a+x^2)(b+x^2)} = \lim_{+\infty} F - \lim_{-\infty} F = 2\lim_{+\infty} F = \frac{\pi}{b-a}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}}\right) = \frac{\pi}{b\sqrt{a} + a\sqrt{b}}.$$

$-$ Cas particulier : $b = a$. Par changement de variable $x = y\sqrt{a}$ puis $y = \tan t$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(a+x^2)^2} = \frac{1}{a\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{(1+y^2)^2} = \frac{1}{a\sqrt{a}}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = \frac{\pi}{2a\sqrt{a}}.$$