

Série n°2 : Intégrale Généralisée et Équations différentielles.

Exercice 1.

1. En utilisant les primitives usuelles, déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(x) dx, \quad B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}} dx, \quad C = \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx.$$

2. Étudier la nature des intégrales suivantes :

$$A = \int_0^1 \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}(1-x)} dx, \quad B = \int_1^{+\infty} x^{2020} e^{-x} dx, \quad C = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + 2 - \cos(x)} dx,$$

$$D = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x} dx, \quad E = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x}} dx, \quad F = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \sin(x)) dx.$$

$$G = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} dx, \quad H = \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{\cos(x)}}{x} dx, \quad I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx, \quad J = \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx.$$

3. Montrer la convergence et calculer :

$$\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} \quad (a < b), \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx.$$

Exercice 2.

- Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^1 f(x) \ln x dx$ est absolument convergente.
- Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive et décroissante telle que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 0$.
- Soit $f : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que f' soit bornée. Montrer que $\lim_1 f$ existe.

Exercice 3. Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge et soient $a, b > 0$. Pour tout $x > 0$, on pose :

$$F(x) := \int_x^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt \quad \text{et} \quad G(x) := \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt.$$

- Montrer que $F = G$.
- Montrer que si une fonction $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est continue et nulle en 0, alors $\lim_{x \rightarrow 0} \int_{ax}^{bx} \frac{g(t)}{t} dt = 0$.

3. Dédurre des deux questions précédentes que

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt = f(0) \ln \frac{b}{a}.$$

4. Application : montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \ln \frac{b}{a}$.

Exercice 4. Résoudre les équations différentielles suivantes :

(E₁) : $(1+x)y' + y - 2 = 0$,

(E₂) : $y'' - 3y' + 2y = 1 + 2e^x$.

Exercice 5. Résoudre les équations différentielles suivantes :

(Sep) : $(\cos t)y' = (\sin t)y^4$,

(Ber) : $y' = y + ty^3$,

(Ric) : $y' = (t-1)y + y^2 - t$, sachant qu'elle admet une solution particulière constante.

Exercice 6 (facultatif). Étudier la nature des intégrales suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{4x^2+x+1}} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx, \quad \int_0^{+\infty} 2^{-x}x^4 dx,$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-\sqrt{x}}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{(\tan x - x)^\alpha}, \quad \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha(1-x)^\beta} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{\arctan x}} dx,$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx, \quad \int_0^1 \sin(1/x) dx, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\arccos x}, \quad \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx,$$

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^\alpha) dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx, \quad \int_1^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \sin x dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^\alpha} dx.$$

Exercice 7 (facultatif). Soient $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable, et $I_n = \int_0^n f(x) dx$.

On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = I \in \mathbb{R}$. Est-il vrai que sous cette hypothèse :

1. Si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge alors $\int_0^{+\infty} f(x) dx = I$.

2. Si f est positive alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge ?

3. Si f est positive alors $\lim_{+\infty} f = 0$?

4. f admet en $+\infty$ une limite (finie ou infinie), alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge ?

5. Si f est dérivable et de dérivée bornée, alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge ?

Exercice 8 (facultatif). Montrer la convergence et calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}, \quad \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)}, \quad \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}, \quad \int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-3x+2)^2}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos t \, dt, \quad \int_4^5 \frac{dt}{\sqrt{(t-4)(5-t)}},$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+t^\alpha)} \, dt, \quad (\alpha \in \mathbb{R}), \quad \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}} \, dt, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(a+x^2)(b+x^2)} \quad (a, b > 0).$$

Exercice 9 (facultatif). Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \, dt$.

1. Montrer que I est convergente.
2. Pour $\varepsilon > 0$, établir la relation :

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \, dt = \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t} \, dt.$$

3. En déduire le calcul de I (utiliser la première formule de la moyenne).
4. En déduire le calcul de $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)} \, dx$ (Poser $x = e^{-t}$).

Exercice 10 (facultatif). Soit $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^3+1)^n}$, où n est un entier naturel.

1. Etudier pour quelles valeurs de n l'intégrale I_n converge.
2. Calculer I_1 .
3. Montrer que si $n \geq 2$, on a : $I_{n+1} = \frac{3n-1}{3n} I_n$.
4. En déduire l'expression de I_n .

Exercice 11 (facultatif). Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(t^2+1)}$.

1. Montrer que I est convergente.
2. Calculer $J = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$.
3. En déduire I (poser $x = \sqrt{t}$).

Exercice 12 (facultatif). En posant $u(x) = (1+x^2)y(x)$, résoudre l'équation différentielle suivantes :

$$(E) : \quad (1+x^2)y'' + 4xy' + (1-x^2)y = 0.$$

Corrigé de la Série n°2

Exercice 1.

1. * La nature de $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(x) dx$:

La fonction $t \mapsto \tan(x)$ est localement intégrable sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ car elle est continue. Il y a donc un problème en $\frac{\pi}{2}$.

$$A = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \int_0^t \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[-\ln(|\cos(x)|) \right]_0^t = -\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln(|\cos(t)|) = +\infty.$$

Donc, l'intégrale A est divergente.

* La nature de $B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}} dx$:

La fonction $t \mapsto \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}$ est localement intégrable sur $]0; \frac{\pi}{4}]$ (car continue). Pour étudier la convergence de cette intégrale, il suffit de se préoccuper du comportement au voisinage de 0. Soit $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{4}$. L'intégrand est de la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u = \sin$ donc se primitive en $2\sqrt{u}$:

$$B = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[2\sqrt{\sin(x)} \right]_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{4}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 2\sqrt{\sin(\varepsilon)} = 2^{\frac{3}{4}},$$

donc l'intégrale B est convergente et $B = 2^{\frac{3}{4}}$.

* La nature de $C = \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2} dx$:

La fonction $t \mapsto xe^{-x^2}$ est continue sur $] -\infty, +\infty[$, donc le problème se pose en $+\infty$ et en $-\infty$. Soit $c \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_c^{+\infty} xe^{-x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_c^A xe^{-x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2} \right]_c^A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{2}e^{-A^2} + \frac{1}{2}e^{-c^2} = \frac{1}{2}e^{-c^2},$$

et

$$\int_{-\infty}^c xe^{-x^2} dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^c xe^{-x^2} dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2} \right]_A^c = -\frac{1}{2}e^{-c^2} + \lim_{A \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}e^{-A^2} = -\frac{1}{2}e^{-c^2}.$$

Donc, les deux intégrales $\int_c^{+\infty} xe^{-x^2} dx$ et $\int_{-\infty}^c xe^{-x^2} dx$ sont convergentes. Par suite, l'intégrale B est convergente et on a

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^0 xe^{-x^2} dx + \int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx = 0.$$

2. * La nature de l'intégrale $A = \int_0^1 \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}(1-x)} dx$:

La fonction $x \mapsto \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}(1-x)}$ est continue sur $]0, 1[$, donc localement intégrable. Soit $0 < c < 1$.

– Au voisinage de 0 on a : $\frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}(1-x)} \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $\int_0^c \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ est une intégrale de Riemann convergente (car $\alpha = \frac{1}{2} < 1$), par le critère de comparaison, l'intégrale $\int_0^c \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}(1-x)} dx$ converge.

– Au voisinage de 1 on a : $\frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}(1-x)} \underset{1^-}{\sim} \frac{2}{1-x}$ et $\int_c^1 \frac{2}{1-x} dx$ est une intégrale de Riemann divergente (car $\alpha = 1 \geq 1$), par le critère de comparaison, l'intégrale $\int_c^1 \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}(1-x)} dx$ diverge.

Conclusion : l'intégrale $\int_0^1 \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}(1-x)} dx$ diverge (CV+DV=DV).

* La nature de l'intégrale $B = \int_1^{+\infty} x^{2020} e^{-x} dx$:

La fonction $x \mapsto x^{2020} e^{-x}$ est continue (donc localement intégrable) sur $[1, +\infty[$. D'où le problème se pose en $+\infty$. Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (x^{2020} e^{-x}) = 0$, d'après les règles de Riemann ($\alpha = 2 > 1$), l'intégrale B converge.

* La nature de l'intégrale $C = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + 2 - \cos(x)} dx$:

La fonction $x \mapsto \frac{x^2}{x^4 + 2 - \cos(x)}$ est paire et localement intégrable sur $] -\infty, +\infty[$, donc les

deux intégrales $C = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + 2 - \cos(x)} dx$ et $C' = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + 2 - \cos(x)} dx$ sont de même nature (dans le cas de convergence on a $C = 2C'$).

Au voisinage de $+\infty$ on a : $\frac{x^2}{x^4 + 2 - \cos(x)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$ et $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ est une intégrale de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$). Donc, d'après le critère de comparaison, l'intégrale C' converge, par suite l'intégrale C converge.

* La nature de l'intégrale $D = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x} dx$:

La fonction $x \mapsto \frac{\sin^2(x)}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$, il y a donc deux problèmes en 0 et en $+\infty$. Soit $c \in]0, +\infty[$.

– L'intégrale $D_1 := \int_0^c \frac{\sin^2(x)}{x} dx$ est convergente car la fonction $x \mapsto \frac{\sin^2(x)}{x}$ admet une limite finie en 0 $\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(x) \frac{\sin(x)}{x} = 0 \times 1 = 0 \right)$.

– Pour l'intégrale $D_2 := \int_c^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x} dx$ on a

$$D_2 = \int_c^{+\infty} \frac{1 - \cos(2x)}{2x} dx = \int_c^{+\infty} \frac{1}{2x} dx - \int_c^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{2x} dx := D'_2 + D''_2$$

+ D'_2 est une intégrale de Riemann divergente ($\alpha = 1 \leq 1$).

+ Pour D_2'' on va utiliser l'intégration par parties :

$$D_2'' = \left[\frac{-\sin(2x)}{4x^2} \right]_c^{+\infty} + \int_c^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{4x^2} dx = \frac{\sin(2c)}{4c^2} + \frac{1}{4} \int_c^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x^2} dx.$$

Comme $\left| \frac{\sin(2x)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ et $\int_c^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ est une intégrale de Riemann convergente, alors D_2'' est convergente, par suite D_2 diverge.

Conclusion : l'intégrale $D = D_1 + D_2$ diverge (CV+DV=DV).

* La nature de l'intégrale $E = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x}} dx$:

La fonction $t \mapsto \frac{e^{-\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0, +\infty[$, le problème se pose donc en 0 et en $+\infty$.

Soit $c > 0$,

– Au voisinage de 0 on a : $\frac{e^{-\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x}} \underset{0^+}{\sim} \frac{e^{-1}}{\sqrt{x}}$ et $\int_0^c \frac{e^{-1}}{\sqrt{x}} dx$ est une intégrale de Riemann convergente ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$), donc d'après le critère de comparaison $E_1 = \int_0^c \frac{e^{-\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x}} dx$ est convergente.

– Pour $x \geq c$ on a $\frac{e^{-\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x}} \leq \frac{e^{-x}}{\sqrt{c}}$ et $\int_c^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{c}} dx$ converge (voir le cours), d'où d'après le critère de comparaison $E_2 = \int_c^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x}} dx$ est convergente.

Conclusion : l'intégrale $E = E_1 + E_2$ converge.

* La nature de l'intégrale $F = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \sin(x)) dx$:

La fonction $t \mapsto \ln(1 + \sin(x))$ est continue sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, le problème se pose donc en $-\frac{\pi}{2}$.

Cherchons un équivalent de $\ln(1 + \sin(x))$ au voisinage de $-\frac{\pi}{2}$. Posons $u = x + \frac{\pi}{2}$, donc

$$\ln(1 + \sin(x)) = \ln(1 - \cos(u)) = \ln\left(\frac{u^2}{2} + o(u^2)\right) = 2 \ln(u) \left(1 + \frac{\ln(\frac{1}{2} + o(1))}{2 \ln(u)}\right) \underset{0^+}{\sim} 2 \ln(u).$$

Comme $\int_0^1 \ln(x) dx$ converge (voir le cours), d'après le critère d'équivalence, l'intégrale F est convergente.

* La nature de l'intégrale $G = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} dx$:

La fonction $x \mapsto \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$, il y a donc deux problèmes en 0 et en $+\infty$. Soit $c \in]0, +\infty[$.

– L'intégrale $G_1 := \int_0^c \frac{1 - \cos(x)}{x^2} dx$ est convergente car la fonction $x \mapsto \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$ admet une limite finie en 0 $\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \right)$.

– Puisque $|\cos x| \leq 1$, alors

$$\left| \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \right| \leq \frac{1 + |\cos(x)|}{x^2} \leq \frac{2}{x^2}, \quad \forall x \in [c, +\infty[.$$

Comme $\int_c^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ est une intégrale de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$), par le critère de comparaison, l'intégrale $G_2 := \int_c^{+\infty} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$ est convergente.

Conclusion : l'intégrale $G = G_1 + G_2$ est convergente (CV+CV=CV).

* La nature de l'intégrale $H = \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{\cos(x)}}{x} dx$:

La fonction $x \mapsto \frac{e^{\cos(x)}}{x}$ est continue sur $] -\infty, -1]$, il suffit donc d'étudier le comportement au voisinage de $-\infty$. Puisque $-1 \leq \cos x \leq 1$, on a $e^{-1} \leq e^{\cos x} \leq e$ et donc

$$\left| \frac{e^{\cos(x)}}{x} \right| = \frac{e^{\cos(x)}}{|x|} \geq \frac{e^{-1}}{|x|} = \frac{e^{-1}}{-x}, \quad \forall x \in] -\infty, -1].$$

Comme $\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{-1}}{x} dx$ est une intégrale de Riemann divergente ($\alpha = 1 \leq 1$), par le critère de comparaison, l'intégrale H est divergente.

* La nature de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$:

La fonction $x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0, +\infty[$, il y a donc deux problèmes en 0 et en $+\infty$. Soit $c \in]0, +\infty[$.

– L'intégrale $I_1 := \int_0^c \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$ est convergente. En effet, puisque $|\cos x| \leq 1$, alors

$$\left| \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{|\cos(x)|}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \forall x \in]0, c].$$

Comme $\int_0^c \frac{dx}{\sqrt{x}}$ est une intégrale de Riemann convergente ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$), par le critère de comparaison, l'intégrale I_1 est convergente.

– D'après le critère d'Abel, l'intégrale $I_2 := \int_c^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$ est convergente. En effet, la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ garde un signe constant, décroissante et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$. D'autre part, pour tout

$t \in [c, +\infty[$: On a $\left| \int_c^t \cos(x) dx \right| \leq 2$.

Conclusion : l'intégrale $I = I_1 + I_2$ est convergente (CV+CV=CV).

* La nature de l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$:

En faisant le changement de variable $u = x^2$ on obtient $J = \frac{1}{2}I$. Comme l'intégrale I est convergente, alors J l'est aussi.

3. * La convergence et le calcul de $A = \int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} \quad (a < b)$:

La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}$ est localement intégrable (car continue) sur $]a, b[$. Il y a donc deux problèmes en a et en b . Or

$$\frac{1}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} \underset{a^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{(t-a)(b-a)}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} \underset{b^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{(b-a)(b-t)}},$$

et $\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{t-a}}, \int_a^b \frac{dt}{\sqrt{b-t}}$ sont deux intégrales de Riemann convergentes ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$), alors l'intégrale A est convergente.

Pour le calcul, on remarque que A a la forme d'une intégrale abélienne de deuxième espèce. On a

$$\begin{aligned}
 (t-a)(b-t) &= -t^2 + (a+b)t - ab \\
 &= -\left(t - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \quad (\text{la forme canonique}) \\
 &= \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{2t}{b-a} - \frac{a+b}{b-a}\right)^2\right].
 \end{aligned}$$

Alors,
$$\frac{1}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} = \frac{2}{b-a} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2t}{b-a} - \frac{a+b}{b-a}\right)^2}}.$$

Effectuons le changement de variable $u = \frac{2t}{b-a} - \frac{a+b}{b-a}$, on trouve

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \\
 &= 2 \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \quad (u \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \text{ est paire}) \\
 &= 2 \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\arcsin u \right]_0^x \\
 &= \pi.
 \end{aligned}$$

* La convergence et le calcul de $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$.

La fonction $x \mapsto \ln(\sin x)$ est localement intégrable (car continue) sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. De plus, lorsque $x \rightarrow 0^+$, on a

$$\ln(\sin x) = \ln(x + o(x)) = \ln(x) + \ln(1 + o(1)) \underset{0^+}{\sim} \ln x.$$

Comme $\int_0^1 \ln(x) dx$ converge (voir le cours), d'après le critère d'équivalence, l'intégrale $B' := \int_0^1 \ln(\sin x) dx$ est convergente. Or $B = B' + \int_1^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$ et $\int_1^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$ converge car la fonction $x \mapsto \ln(\sin x)$ est continue sur le compact $[1, \frac{\pi}{2}]$, donc B est convergente.

Pour le calcul, de $\sin x = 2 \sin(\frac{x}{2}) \cos(\frac{x}{2})$ on obtient

$$\begin{aligned}
 B &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin(\frac{x}{2}) \cos(\frac{x}{2}) dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\frac{x}{2}) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\frac{x}{2}) dx \\
 &= \frac{\pi \ln 2}{2} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x) dx + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x) dx \quad (\text{poser } u = \frac{\pi}{2} - x) \\
 &= \frac{\pi \ln 2}{2} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x) dx + 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(u) du \quad (\text{Relation de Chasle}) \\
 &= \frac{\pi \ln 2}{2} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx \\
 &= \frac{\pi \ln 2}{2} + 2B.
 \end{aligned}$$

D'où $B = -\frac{\pi \ln 2}{2}$.

Exercice 2.

1. Montrons que $\int_0^1 f(x) \ln x dx$ est absolument convergente :

Puisque f est continue sur le compact $[0, 1]$, elle y est bornée ; il existe donc $M \geq 0$ tel que $|f(t) \ln t| \leq M |\ln t|$ pour tout $t \in [0, 1]$. D'où

$$|f(t) \ln t| \leq M |\ln t|. \quad (1)$$

Or, sur $]0, 1]$ on a $|\ln t| = -\ln t$ et l'intégrale $\int_0^1 \ln x dx$ est convergente (voir le cours), de l'inégalité (1) et le critère de comparaison, on déduit que l'intégrale $\int_0^1 f(x) \ln x dx$ est absolument convergente.

2. Montrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 0$:

Soit $\varepsilon > 0$. Comme l'intégrale de f est convergente, d'après le critère de Cauchy, on a :

$$(\exists A > 0)(\forall x > A), \quad \int_x^{2x} f(t) dt < \varepsilon.$$

Comme la fonction f est décroissante sur $]1, +\infty[$, on a alors

$$(\forall x > A), \quad x f(2x) = \int_x^{2x} f(2x) dt \leq \int_x^{2x} f(t) dt < \varepsilon.$$

On en déduit que $0 \leq 2x f(2x) \leq 2\varepsilon$ pour tout $x > A$, ce qui entraîne :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 0.$$

3. Montrons que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ existe :

On a $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t) dt$, d'où $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(0) + \lim_{x \rightarrow 1} \int_0^x f'(t) dt$. Or l'intégrale impropre $\int_0^1 f'(t) dt$ est convergente, alors $\lim_{x \rightarrow 1} \int_0^x f'(t) dt$ existe. Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ existe aussi.

Exercice 3.

1. Soit $x > 0$. On a :

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_x^{+\infty} \frac{f(at)}{t} dt - \int_x^{+\infty} \frac{f(bt)}{t} dt \\
 &= \int_{ax}^{+\infty} \frac{f(u)}{u} du - \int_{bx}^{+\infty} \frac{f(v)}{v} dv \quad (\text{poser } u = at \text{ et } v = bt) \\
 &= \int_{ax}^{+\infty} \frac{f(u)}{u} du + \int_{+\infty}^{bx} \frac{f(v)}{v} dv \quad (\text{Relation de Chasle}) \\
 &= G(x).
 \end{aligned}$$

2. En supposant, sans perte de généralité, $b \geq a$. La fonction $t \mapsto g(t)$ est continue sur $[ax, bx]$ et la fonction $x \mapsto \frac{1}{t}$ est positive sur $[ax, bx]$, donc, d'après la première formule de la moyenne, il existe $c_x \in [ax, bx]$ tel que

$$\int_{ax}^{bx} \frac{g(t)}{t} dt = g(c_x) \int_{ax}^{bx} \frac{1}{t} dt = g(c_x) \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Comme $c_x \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$, alors,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_{ax}^{bx} \frac{g(t)}{t} dt = \lim_{c_x \rightarrow 0} g(c_x) \ln\left(\frac{b}{a}\right) = g(0) \ln\left(\frac{b}{a}\right) = 0.$$

3. On considère la fonction $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) := f(x) - f(0)$. Cette fonction est continue et nulle en 0. D'où,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt &= \lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0} G(x) \quad (\text{D'après la première question}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \int_{ax}^{bx} \frac{f(0) + g(t)}{t} dt \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \int_{ax}^{bx} \frac{f(0)}{t} dt + \lim_{x \rightarrow 0} \int_{ax}^{bx} \frac{g(t)}{t} dt \\
 &= f(0) \lim_{x \rightarrow 0} \int_{ax}^{bx} \frac{1}{t} dt + 0 \quad (\text{D'après la deuxième question}) \\
 &= f(0) \ln\left(\frac{b}{a}\right).
 \end{aligned}$$

4. Appliquer le resultat de la question précédente à la fonction $f : x \mapsto e^{-x}$ qui vérifie les hypothèses.

Exercice 4.

1. * On commence par résoudre l'équation homogène $(1+x)y' + y = 0$. On a

$$\begin{aligned}
 (1+x)y' + y = 0 &\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{-dx}{1+x}, \\
 &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{-dx}{1+x}, \\
 &\Rightarrow \ln|y| = -\ln(|x+1|) + \text{cte}, \quad x \in]-\infty, -1[\quad \text{ou bien} \quad x \in]-1, +\infty[, \\
 &\Rightarrow y = \frac{C}{|x+1|}, \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}, \quad x \in]-\infty, -1[\quad \text{ou bien} \quad x \in]-1, +\infty[, \\
 &\Rightarrow y = \begin{cases} \frac{C}{x+1} & \text{pour } x \in]-1, +\infty[, \\ \frac{C_1}{x+1} & \text{pour } x \in]-\infty, -1[. \end{cases} \quad \text{avec } C, C_1 \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

* On cherche maintenant une solution particulière de (E_1) ; sur $] - 1, +\infty[$ sous la forme $y_p = \frac{C(x)}{x+1}$; par la méthode de variation de la constante :

$$\begin{aligned}
 y_p \text{ est solution de } (E_1) &\Rightarrow (1+x)y'_p + y_p + 2 = 0 \\
 &\Rightarrow (1+x) \cdot \frac{C'(x)(1+x) - C(x)}{(1+x)^2} + \frac{C(x)}{1+x} = -2, \\
 &\Rightarrow C'(x) = -2 \\
 &\Rightarrow C(x) = \int -2 \, dx \\
 &\Rightarrow C(x) = -2x \\
 &\Rightarrow y_p = \frac{C(x)}{x+1} = \frac{-2x}{x+1}.
 \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation (E_1) sur $] - 1, +\infty[$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \frac{C}{x+1} + \frac{-2x}{x+1} = \frac{C-2x}{x+1}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Et sur $] - \infty, -1[$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \frac{C_1}{x+1} + \frac{-2x}{x+1} = \frac{C_1-2x}{x+1}, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

2. On commence par résoudre l'équation homogène associée $y'' - 3y' + 2y = 0$. l'équation caractéristique est : $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont le $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1$, alors elle admet deux racines réelles $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$. Donc, la solution générale de l'équation homogène est

$$y_h = Ae^x + Be^{2x}; \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Pour trouver une solution particulière, on peut utiliser :

1- Principe de Superposition : le second membre de l'équation (E_2) est de la forme $f(x) =$

$f_1(x) + f_2(x)$, avec $f_1(x) = 1$ et $f_2(x) = 2e^x$. On cherche une solution particulière y_{p_i} ($i = 1, 2$) des équations

$$(E'_2) : y'' - 3y' + 2y = 1, \quad \text{et} \quad (E''_2) : y'' - 3y' + 2y = 2e^x.$$

On remarque que $y_{p_1}(x) = \frac{1}{2}$ est solution particulière de l'équation $(E'_2) : y'' - 3y' + 2y = 1$.

Le second membre de l'équation (E''_2) est de la forme $e^{mx} \left(P_0(x) \cos(\omega x) + Q_{-\infty}(x) \sin(\omega x) \right)$ avec $m = 1$, $\omega = 0$, $P_0(x) = 2$ et $Q_{-\infty}(x) = 0$. Or $m + i\omega = 1$ est racine de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme :

$$y_{p_2} = xe^{mx} \left(R_0(x) \cos(\omega x) + T_0(x) \sin(\omega x) \right) = axe^x.$$

Puisque

$$y''_{p_2} - 3y'_{p_2} + 2y_{p_2} = -ae^x = 2e^x.$$

Par identification, on obtient $a = -2$, par conséquent,

$$y_{p_2}(x) = -2xe^x.$$

Donc, Une solution particulière y_p de (E_2) est donnée par

$$y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) = \frac{1}{2} - 2xe^x.$$

Et la solution générale de (E_2) est

$$y = y_h + y_p = Ae^x + Be^{2x} - 2xe^x + \frac{1}{2}; \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

2- Méthode de Variation de la Constante : la solution générale de l'équation homogène associée à (E_2) est donnée par :

$$y_h(x) = Ae^x + Be^{2x}; \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Cherchons une solution particulière de (E) sous la forme

$$y_p(x) = A(x)e^x + B(x)e^{2x}, \quad \text{avec} \quad A, B \quad \text{sont deux fonctions dérivables.}$$

On a

$$y'_p(x) = A'(x)e^x + B'(x)e^{2x} + A(x)e^x + 2B(x)e^{2x}.$$

On impose la condition

$$A'(x)e^x + B'(x)e^{2x} = 0,$$

Ce qui donne

$$y'_p(x) = A(x)e^x + 2B(x)e^{2x}.$$

On calcule ensuite y'' (utiliser le fait que $y_1 = e^x$ et $y_2 = e^{2x}$ sont deux solutions de l'équation homogène, c-à-d $e^x - 3e^x + 2e^x = 0$ et $4e^{2x} - 6e^{2x} + 2e^{2x} = 0$), on remplace dans l'équation (E_2) on trouve que

$$A'(x)e^x + 2B'(x)e^{2x} = 1 + 2e^x.$$

Résolvons donc le système

$$\begin{cases} A'(x)e^x + B'(x)e^x = 0, \\ A'(x)e^x + 2B'(x)e^{2x} = 1 + 2e^x. \end{cases}$$

On obtient

$$\begin{cases} A'(x) = -2 - e^{-x}, \\ B'(x) = e^{-2x} + 2e^{-x}. \end{cases}$$

C'est à dire $A(x) = -2x + e^{-x}$ et $B(x) = -\frac{e^{-2x}}{2} - 2e^{-x}$.

Donc, une solution particulière de l'équation (E_2) est donnée par

$$y_p(x) = (-2x + e^{-x})e^x + \left(-\frac{e^{-2x}}{2} - 2e^{-x}\right)e^{2x} = \frac{1}{2} - 2xe^x - 2e^x.$$

Par conséquent, la solution générale de (E_2) est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^x + Be^{2x} + \frac{1}{2} - 2xe^x - 2e^x = Ce^x + Be^{2x} - 2xe^x + \frac{1}{2}; \quad A, B, C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5.

1. *(Sep)* : $(\cos t)y' = (\sin t)y^4$ est une équation à variables séparées. On a

$$\begin{aligned} (\cos t)y' = (\sin t)y^4 &\Rightarrow (\cos t)\frac{dy}{dt} = (\sin t)y^4 \\ &\Rightarrow \frac{dy}{y^4} = -\frac{\sin t}{\cos t} dt, \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y^4} = -\int \frac{\sin t}{\cos t} dt, \quad \text{sur } I =]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[\quad (k \in \mathbb{Z}), \\ &\Rightarrow \frac{y^{-3}}{-3} = -\ln(|\cos t|) + \text{cte}, \quad \text{sur } I =]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[\quad (k \in \mathbb{Z}), \\ &\Rightarrow y = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{1}{3 \ln(|\cos t|) + c_1}}, & \text{sur un intervalle } J \subset I \\ -\sqrt[3]{\frac{-1}{3 \ln(|\cos t|) + c_2}}, & \text{sur un intervalle } J' \subset I, \end{cases} \end{aligned}$$

avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2. *(Ber)* : $y' = y + ty^3$ est une équation de Bernoulli avec $n = 3$, divisons tous les termes par y^3 , on obtient l'équation suivante

$$(Ber') : y'y^{-3} - y^{-2} = t.$$

Introduisant la nouvelle fonction $u = y^{-2}$, d'où $u' = -2y'y^{-3}$, portons ces expressions dans l'équation (Ber') , nous obtenons l'équation différentielle linéaire

$$(E) : u' + 2u = -2t,$$

qu'on peut résoudre facilement. En effet, la solution de l'équation homogène $u' + 2u = 0$ est $u_h(t) = Ce^{-2t}$ et par la méthode de variation de la constante on trouve que $u_p(t) = -t + \frac{1}{2}$ est une solution particulière de (E), d'où la solution générale de (E) est

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) = Ce^{-2t} - t + \frac{1}{2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Comme $y^{-2} = u$, donc $y = \frac{\pm 1}{\sqrt{u}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{Ce^{-2t} - t + \frac{1}{2}}}$ sur un intervalle I .

3. (Ric) : $y' = (t-1)y + y^2 - t$ est une équation de Riccati qui admet une solution particulière constante $y_p = c$. En remplaçant dans l'équation (Ric) y par c , on obtient

$$(\forall t \in \mathbb{R}) : 0 = (t-1)c + c^2 - t, \quad \text{c-à-d} \quad (\forall t \in \mathbb{R}) : t(c-1) + (c^2 - c) = 0,$$

d'où $c-1 = 0$ et $c^2 - c = 0$, donc $c = 1$, par conséquent, $y_p = 1$.

Soit le changement de variables :

$$y = y_p + \frac{1}{z} = 1 + \frac{1}{z}.$$

D'où $y' = -\frac{z'}{z^2}$. Substituons cette expression dans l'équation (Ric), afin d'obtenir une équation linéaire non homogène de la forme

$$(E) : z' + (t+1)z = -1,$$

la solution de l'équation homogène $z' + (t+1)z = 0$ est $z_h(t) = Ce^{-\left(\frac{t^2}{2}+t\right)}$ et par la méthode de variation de la constante on trouve que $C'(x) = -e^{\left(\frac{t^2}{2}+t\right)}$ c-à-d $C(x) = -\int e^{\left(\frac{t^2}{2}+t\right)} dt$. Donc $z_p(t) = -e^{-\left(\frac{t^2}{2}+t\right)} \cdot \int e^{\left(\frac{t^2}{2}+t\right)} dt$ est une solution particulière de (E), d'où la solution générale de (E) est

$$z(x) = z_h(x) + z_p(x) = e^{-\left(\frac{t^2}{2}+t\right)} \left(C - \int e^{\left(\frac{t^2}{2}+t\right)} dt \right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Comme $y = 1 + \frac{1}{z}$, donc

$$y = 1 + \frac{1}{e^{-\left(\frac{t^2}{2}+t\right)} \left(C - \int e^{\left(\frac{t^2}{2}+t\right)} dt \right)} \quad \text{sur un intervalle } I.$$

Remarque : On ne peut pas exprimer la primitive $\int e^{\left(\frac{t^2}{2}+t\right)} dt$ en termes de fonctions usuelles !!!.

Exercice 6 (facultatif).

* La nature de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{4x^2+x+1}} dx$: L'intégrande est positif, continu sur $[1, +\infty[$ et majoré par $\frac{1}{2x^2}$ donc, d'après le critère de comparaison, l'intégrale est (absolument) convergente.

Remarque : une autre façon de montrer que cette intégrale converge est de la transformer, par le changement de variable $\tan \theta = \frac{8x+1}{\sqrt{15}}$, en une intégrale non impropre, que l'on peut même calculer.

* La nature de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$: Au voisinage de 0, on a $\frac{e^{-x}}{x} \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x} > 0$ donc, d'après le critère d'équivalence, l'intégrale diverge. (en $+\infty$, elle est absolument convergente car $0 < \frac{e^{-x}}{x} \leq e^{-x}$ pour $x \geq 1$).

* La nature de $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$: L'intégrande est continu sur $[0, +\infty[$ et $\frac{|\cos x|}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ donc l'intégrale est absolument convergente, d'après le critère de comparaison.

* La nature de $\int_0^{+\infty} 2^{-x} x^4 dx$: Le problème se pose en $+\infty$. On a $2^{-x} = e^{-x \ln 2}$ et $\ln 2 > 0$ d'où

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \cdot 2^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 e^{-x \ln 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x \ln 2} = 0.$$

Donc, d'après les règles de Riemann, l'intégrale converge (absolument).

* La nature de $\int_0^1 \frac{dx}{1-\sqrt{x}}$: Par changement de variable et équivalence, l'intégrale en 1 est de même nature que celle de $\frac{1}{y}$ en 0 donc divergente.

* La nature de $\int_0^1 \frac{dx}{(\tan x - x)^\alpha}$: En 0, par équivalence, l'intégrale est de même nature que celle de $\frac{1}{x^{3\alpha}}$ donc, elle converge (absolument) si et seulement si $3\alpha < 1$, c'est-à-dire $\alpha < 1/3$ (elle n'est même pas impropre si $\alpha \leq 0$).

* La nature de $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha(1-x)^\beta} dx$: L'intégrande est équivalent à $\frac{1}{x^{\alpha-1}}$ en 0 et à $\frac{\ln 2}{(1-x)^\beta}$ en 1. D'après le critère d'équivalence, l'intégrale est donc convergente (absolument) si et seulement si $\alpha - 1$ et β sont strictement inférieurs à 1, c'est-à-dire $\alpha < 2$ et $\beta < 1$.

* La nature de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{\arctan x}} dx$: On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{\arctan x}} = 1$ car $\arctan x \cdot \ln x \underset{0^+}{\sim} x \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$. Par conséquent, l'intégrale est convergente en 0 car l'intégrande admet une limite finie en 0.

Au voisinage de $+\infty$, on a $\frac{1}{x^{\arctan x}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\pi/2}}$ (car quand $y := \frac{1}{x} \rightarrow 0^+$, $\frac{x^{\pi/2}}{x^{\arctan x}} = y^{-\pi/2 + \arctan(1/y)} = y^{-\arctan(y)} = \frac{1}{y^{\arctan y}} \rightarrow 1$). Puisque $\pi/2 > 1$, l'intégrale converge donc aussi en $+\infty$.

* La nature de $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$ et de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$: En 0, par équivalence, on a $\frac{\cos x}{x^\alpha} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^\alpha}$ et $\frac{\sin x}{x^\alpha} \underset{0}{\sim} \frac{x}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha-1}}$. D'où, la première intégrale converge (absolument) si et seulement si $\alpha < 1$ et la seconde si et seulement si $\alpha < 2$.

En $+\infty$, pour chacune des deux intégrales, on a :

* convergence absolue si $\alpha > 1$ (Voir le cours).

* convergence simple si et seulement si $\alpha > 0$. En effet, cette condition est non seulement nécessaire (car si $\beta := -\alpha \geq 0$ alors $\int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi/2} x^\beta \sin x \, dx$ et $\int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi/2} x^\beta \cos x \, dx$, minorées par $(2k\pi)^\beta$, ne tendent pas vers 0) mais aussi suffisante, d'après le critère d'Abel.

En résumé :

- la première intégrale converge lorsque $0 < \alpha < 1$ et sa convergence n'est jamais absolue ;
- la seconde converge lorsque $0 < \alpha < 2$ mais sa convergence n'est absolue que si $\alpha > 1$.

* La nature de $\int_0^1 \sin(1/x) \, dx$: Par changement de variable $y = \frac{1}{x}$, cette intégrale est absolument convergente, comme celle de $\frac{\sin y}{y^2}$ en $+\infty$.

* La nature de $\int_0^1 \frac{dx}{\arccos x}$: Par changement de variable $y = \arccos x$, cette intégrale est absolument convergente, car $\int_0^1 \frac{dx}{\arccos x} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin y}{y} \, dy$ ($\int_0^{\pi/2} \frac{\sin y}{y} \, dy$ est faussement impropre, car l'intégrande admet une limite finie en 0).

* La nature de $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) \, dx$: Par changement de variable $y = x^2$, cette intégrale est semi-convergente, comme celle de $\frac{\sin y}{y^{1/2}}$ en $+\infty$.

* La nature de $\int_0^{+\infty} \cos(x^\alpha) \, dx$: Supposons $\alpha \neq 0$ (sinon, l'intégrale diverge évidemment). Par changement de variable $y = x^\alpha$, cette intégrale est de même nature que $\int_0^{+\infty} \frac{\cos y}{y^\beta} \, dy$ avec $\beta = 1 - \frac{1}{\alpha}$. Elle est donc convergente si et seulement si $0 < 1 - \frac{1}{\alpha} < 1$, c'est-à-dire $\alpha > 1$, et sa convergence n'est jamais absolue.

* La nature de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} \, dx$: En 0, l'intégrale est faussement impropre (l'intégrande tend vers 0). En $+\infty$, elle diverge, puisque $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$ et que l'intégrale en $+\infty$ de $\frac{\cos(2x)}{x}$ est semi-convergente (par changement de variable $y = 2x$) tandis que celle de $\frac{1}{x}$ est divergente.

* La nature de $\int_1^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \sin x \, dx$: L'intégrande est continu sur $[1, +\infty[$. Vérifions les hypothèses de la règle d'Abel. $x \mapsto 1 - \cos \frac{1}{\sqrt{x}}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$ et nulle à l'infini, et $x \mapsto \int_1^x \sin t \, dt = \cos 1 - \cos x$ est bornée. Par conséquent, l'intégrale converge. Mais elle est seulement semi-convergente car $\left| \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \sin x \right|_{x \rightarrow +\infty} \sim \frac{|\sin x|}{2x}$, non intégrable en $+\infty$.

Autre Solution : $\left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \sin x = \left(\frac{1}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \sin x = \frac{\sin x}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc l'intégrale est semi-convergente, comme somme d'une intégrale semi-convergente et d'une intégrale absolument convergente.

* La nature de $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^\alpha} dx$: En 0, la fonction (positive) $\frac{1 - \cos x}{x^\alpha} \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{2x^{\alpha-2}}$ est intégrable si et seulement si $\alpha - 2 < 1$, c'est-à-dire $\alpha < 3$. En $+\infty$, l'intégrale converge si $\alpha > 1$ (car $0 \leq \frac{1 - \cos x}{x^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha}$) et diverge si $\alpha \leq 1$ (car $\int_{2k\pi+\pi/2}^{2k\pi+3\pi/2} \frac{1 - \cos x}{x^\alpha} dx \geq \int_{2k\pi+\pi/2}^{2k\pi+3\pi/2} \frac{dx}{x} = \ln \frac{2k\pi + 3\pi/2}{2k\pi + \pi/2} \sim \frac{1}{2k}$). Finalement, $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^\alpha} dx$ converge si et seulement si $1 < \alpha < 3$.

Exercice 7 (facultatif).

- Vrai car si $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A f(x) dx = J$ alors $\lim I_n = J$.
- Vrai car $\forall A \in \mathbb{R}^+ \quad I_{[A]} \leq \int_0^A f(x) dx \leq I_{[A]+1}$ (où $[A]$ désigne la partie entière de A) donc $\left| \int_0^A f(x) dx - I \right| \leq \max(|I_{[A]} - I|, |I_{[A]+1} - I|) \rightarrow 0$ quand $A \rightarrow +\infty$.
- Faux, bien que l'intégrale converge d'après le point précédent, car $\lim_{+\infty} f$ peut ne pas exister. On peut construire un contre-exemple où, de plus, la fonction positive f n'est pas bornée :

$$f(x) = \begin{cases} ng(n^3(x-n)) & \text{si } n \leq x \leq n + \frac{1}{n^3} \text{ pour un } n \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour n'importe quelle fonction non nulle intégrable $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ (par construction, $I_{n+1} = G \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$, avec $G = \int_0^1 g(t) dt$).

- Vrai : * Montrons d'abord que cette limite ℓ est forcément 0. Pour tout entier naturel n , puisque $I_{n+1} - I_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$, on a : $\inf_{x \geq n} f(x) \leq I_{n+1} - I_n \leq \sup_{x \geq n} f(x)$. Par passage à la limite, on en déduit : $\ell \leq 0 \leq \ell$.
 * Sachant maintenant que $\lim_{+\infty} f = 0$, montrons que l'intégrale converge. Pour tout $A \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\begin{aligned}
 \left| \int_0^A f(x) dx - I_{[A]} \right| &= \left| \int_{[A]}^A f(x) dx \right| \leq \int_{[A]}^A |f(x)| dx \\
 &\leq (A - [A]) \sup_{[A] \leq x \leq A} |f(x)| \\
 &\leq \sup_{x \geq [A]} |f(x)|
 \end{aligned}$$

donc

$$\left| \int_0^A f(x) dx - I \right| \leq \sup_{x \geq [A]} |f(x)| + |I_{[A]} - I| \rightarrow 0 \quad \text{quand } A \rightarrow +\infty.$$

- Faux. Exemple : $f(x) = \sin(2\pi x)$.

Exercice 8 (facultatif). La convergence et le calcul de :

* $A = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$: On a $A = [\arctan t]_0^{+\infty} = \pi/2$.

* $B = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$: On a $B = [2\sqrt{t}]_0^1 = 2$.

* $C = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)}$: La Décomposition en éléments simples dans \mathbb{R} de l'intégrande est

$$\frac{1}{(X+1)(X+2)} = \frac{1}{X+1} - \frac{1}{X+2}.$$

Une primitive sur $] -1, +\infty[$ est donc : $F(t) = \ln \frac{t+1}{t+2}$. Puisque $\lim_{+\infty} F = 0 \in \mathbb{R}$, l'intégrale converge

et $C = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)} = 0 - F(0) = \ln 2$.

* $D = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$: Par un raisonnement analogue, avec

$$\frac{1}{X^2-1} = \frac{1/2}{X-1} - \frac{1/2}{X+1},$$

$F(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1}$ (sur $]1, +\infty[$) et $D = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} = 0 - F(2) = \frac{\ln 3}{2}$.

* $E = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$: Par un raisonnement analogue, avec

$$\frac{1}{(X+1)(X+2)(X+3)} = \frac{1/2}{X+1} - \frac{1}{X+2} + \frac{1/2}{X+3},$$

$F(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$ (sur $] -1, +\infty[$) et $E = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} = 0 - F(0) = \frac{\ln(4/3)}{2}$.

* $F = \int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-3x+2)^2}$: Par un raisonnement analogue, avec

$$\frac{1}{(X^2-3X+2)^2} = \frac{2}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} - \frac{2}{X-2} + \frac{1}{(X-2)^2},$$

$F(x) = 2 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}$ (sur $] -\infty, 1[$, $]1, 2[$ et $]2, +\infty[$) et

$$F = \int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-3x+2)^2} = 0 - F(3) = \frac{3}{2} - 2 \ln 2.$$

* $G = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$: Par équivalence, l'intégrale converge en 0 car $\gamma > -1$. Par changement

de variable $s = 1/t$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) \ln t dt$ est l'opposée de $\int_0^1 f(t) \ln t dt$ (donc, comme elle,

convergente), si bien que $\int_0^{+\infty} f(t) \ln t \, dt$ est convergente et nulle.

* $H = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos t \, dt$: Par une double intégration par parties,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \cos t \, dt = \left[\frac{e^{-t} (\sin t - \cos t)}{2} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

* $I = \int_4^5 \frac{dt}{\sqrt{(t-4)(5-t)}}$: Par le changement de variable $s = 2t - 9$,

$$\int_4^5 \frac{dt}{\sqrt{(t-4)(5-t)}} = \int_{-1}^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = [\arcsin s]_{-1}^1 = \pi.$$

* $J = \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}} \, dt$: Par le changement de variable $s = \sqrt{1-t}$,

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}} \, dt = 2 \int_0^1 \ln(1-s^2) \, ds = 2 [G(1+s) - G(1-s)]_0^1,$$

avec $G(x) = x \ln x - x$, continue sur $]0, +\infty[$. Puisque $\lim_0 G = 0 \in \mathbb{R}$, l'intégrale est donc convergente et vaut $2(G(2) - 0) = 4(\ln 2 - 1)$.

* $K_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+t^\alpha)} \, dt$, ($\alpha \in \mathbb{R}$) : L'intégrande (positif et continu sur $]0, +\infty[$) est majoré par $\frac{1}{1+t^2}$, donc l'intégrale converge. Par changement de variable $s = 1/t$,

$$K_\alpha := \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+t^\alpha)} \, dt = \int_{+\infty}^0 \frac{1}{(1+s^{-2})(1+s^{-\alpha})} \frac{-ds}{s^2} = \int_0^{+\infty} \frac{s^\alpha}{(1+s^2)(1+s^\alpha)} \, ds =: K'_\alpha$$

donc $K_\alpha = \frac{K_\alpha + K'_\alpha}{2} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} \, dt = \frac{\pi}{4} = K_0$.

* $L = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(a+x^2)(b+x^2)}$ ($a, b > 0$) :

L'intégrale converge en $\pm\infty$ comme celle de $\frac{1}{x^4}$.

– Cas général : $b \neq a$. L'intégrande s'écrit alors $\frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{x^2+a} - \frac{1}{x^2+b} \right)$ donc admet pour primitive

$$F(x) := \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \arctan \frac{x}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}} \arctan \frac{x}{\sqrt{b}} \right).$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(a+x^2)(b+x^2)} = \lim_{+\infty} F - \lim_{-\infty} F = 2 \lim_{+\infty} F = \frac{\pi}{b-a} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}} \right) = \frac{\pi}{b\sqrt{a} + a\sqrt{b}}.$$

– Cas particulier : $b = a$. Par changement de variable $x = y\sqrt{a}$ puis $y = \tan t$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(a+x^2)^2} = \frac{1}{a\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{(1+y^2)^2} = \frac{1}{a\sqrt{a}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = \frac{\pi}{2a\sqrt{a}}.$$