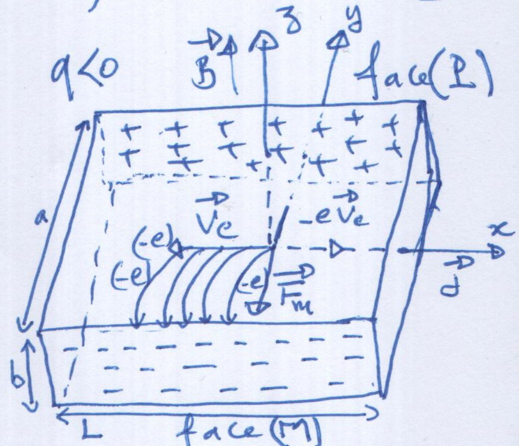
Corrigé Série 2

Exercice 1 :

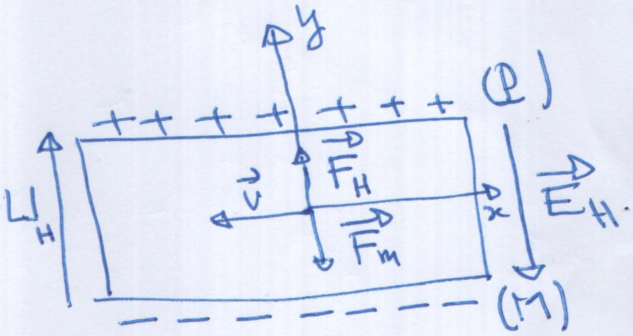
1) En présence du champ magnétique $\vec{B}$, une charge q qui se déplace à la vitesse $\vec{v}$ soumis à la force magnétique de Lorentz.

Dans le cas considéré, la force magnétique est dirigée suivant oy vers les y négatifs ($\vec{F}_m$)

- Sous l'action de cette force, les e^- vont s'accumuler sur la face (M) qui sera ainsi chargée négativement. Tandis que la face (P) perdant des e^-, se chargera positivement. Il apparaitra donc progressivement entre ces faces un champ électrostatique suivant (Oy) dans le sens négatif de y. Ce champ est appelé champ de Hall.



La différence de potentiel entre les surface latérale est égale à la tension de Hall. U_H



2) $\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

3) $\vec{F}_M + \vec{F}_H = q\vec{v} \wedge \vec{B} + q\vec{E}_H = \vec{F}_T$

4) à l'équilibre $\vec{F}_T = \vec{0} \Rightarrow \vec{E}_H = -\vec{V} \wedge \vec{B}$

on a : $\vec{J} = nq\vec{v} = -ne\vec{v} \Rightarrow \vec{E}_H = \frac{1}{ne}\vec{J} \wedge \vec{B}$

$$\vec{E}_H = \frac{1}{ne}\begin{pmatrix} j \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{ne}\begin{pmatrix} 0 \\ -jB \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{-jB}{ne}\vec{e}_y$$

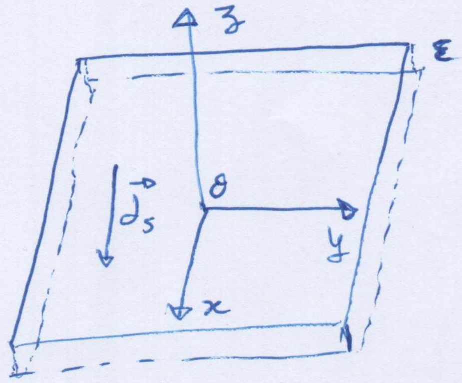
5) $U_H = V_p - V_M = \int_M^P dV = \int_M^N -E_H\,dy = |E_H| \cdot a \Rightarrow U_H = \frac{jB}{ne}a$

6) $U_H = \frac{jB}{ne}a = \frac{IB}{\cancel{a} \times b}\frac{\cancel{a}}{ne} = \frac{1}{ne.b} I.B = \frac{C_H}{b} I.B$, $C_H = \frac{1}{ne}$ est la constante de Hall.

En ~~[illegible]~~ mesurant la tension de Hall, on peut obtenir la valeur du champ magnétique, il s'agit d'un capteur pour le champ magnétique.

Exercice 2.

1) La distribution de courant est invariante par translation suivant (ox) ou (oy) $\Longrightarrow$ B ne dépend que de z.



* tout plan perpendiculaire à (Oy) est un plan de symétrie $\Rightarrow$ le champ magnétique est parallèle à (Oy)

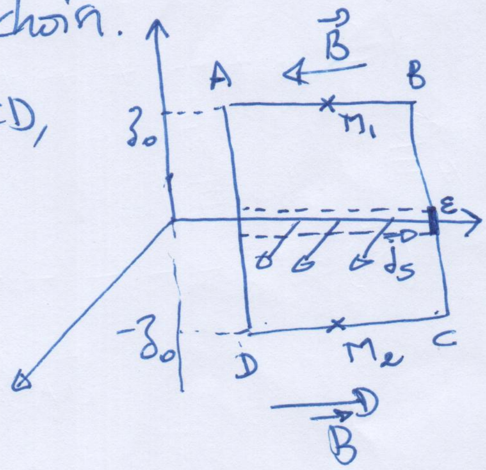
(xoy) est un plan de symétrie, pour deux point M et M' qui sont symétrique par rapport à (xoy)

$\vec{B}(M) = -\vec{B}(M')$ ($\vec{B}$ est un pseudo vecteur)

$\Rightarrow \vec{B} = \pm B(z)\,\vec{e}_y$

2) a) on prend dans le plan (yoz) le rectangle ABCD où AB et CD est symétrique par rapport à (oy) ont respectivement z_0 et $-z_0$ sur l'axe (OZ).

$\vec{B}$ doit être parallèle ou perpendiculaire au contour choisi.



$\vec{B}$ ne dépend que de z et constant le long de AB et CD, sa circulation est nulle sur BC et AD

si on va choisir le sens de circulation est le sens trigonométrique, $\vec{j}_s$ est positif et I égal à

$I_{ent} = j_s l$ avec $l = AB$

b)

on a : $\oint_C \vec{B}\cdot\vec{dl} = \underbrace{\int_A^D \vec{B}\cdot\vec{dl}}_{0} + \int_D^C \vec{B}\cdot\vec{dl} + \underbrace{\int_C^B \vec{B}\cdot\vec{dl}}_{0} + \int_B^A \vec{B}\cdot\vec{dl}$

$= B(-z_0)\cdot l + l\,B(z_0) = \mu_0 I = \mu_0 j_s l$

$\Rightarrow 2l\,B(z_0) = \mu_0 j_s l \Rightarrow B(z_0) = \frac{1}{2}\mu_0 j_s$

$\Rightarrow \begin{cases} \vec{B}(M_1) = -\frac{1}{2}\mu_0 j_s \\ \vec{B}(M_2) = \frac{1}{2}\mu_0 j_s \end{cases}$

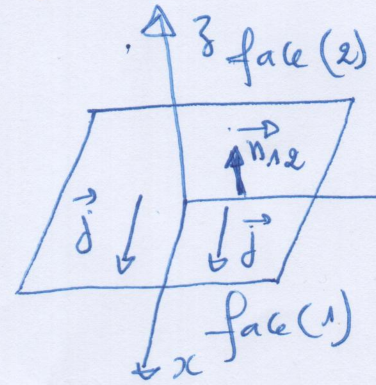
c) $\vec{B}$ au point $z=0$

Au point O, origine de l'espace, on a 2 plans de symétrie de la nappe :
(xOy) et (xOz) $\Rightarrow$ $\vec{B}$ doit être perpendiculaire à ces deux plans

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \text{ et } \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ B \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ donc $\vec{B}$ à l'origine càd pour $z=0$ ne peut être que nul

$$\Rightarrow \vec{B}(z=0) = \vec{0}$$



3) $\vec{B}_{face(1)} - \vec{B}_{face(2)} = \left(\frac{1}{2}\mu_0 j_s + \frac{1}{2}\mu_0 j_s\right)\vec{e_y}$

$= \mu_0 j_s \vec{e_y} \neq 0$

$= \mu_0 j_s (-\vec{e_x} \wedge \vec{e_z})$

$= -\mu_0 \vec{j_s} \wedge \vec{e_z}$ (avec $\vec{e_z} = \vec{n}_{12}$)

$\Rightarrow \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$

c'est la relation de discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique à la traversée d'une nappe de courant

4) $\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x(z) \\ A_y(z) \\ A_z(z) \end{pmatrix}$ / Invariance par translation suivant x et y.

(yOz) est un plan d'antisymétrie $\Rightarrow$ $\vec{A}$ est perpendiculaire à (yOz) ($\vec{A}$ est un vecteur polaire).

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x(z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

on a : $\vec{B} = \vec{rot}\,\vec{A} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ B(z) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A(z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial A}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow B(z) = \frac{\partial A}{\partial z} \Rightarrow A = \int B\,dz$

pour $z > 0$ $B(z) = -\frac{\mu_0 j_s}{2} \Rightarrow A(z) = -\frac{\mu_0 j_s}{2} z + cte_1$

pour $z = 0$ $B(0) = 0 \Rightarrow A(z) = cte_2$

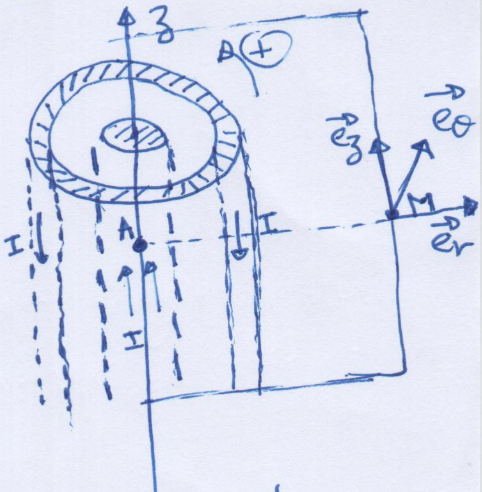
pour $z < 0$ $B(z) = \frac{\mu_0 j_s}{2} \Rightarrow A(z) = \frac{\mu_0 j_s}{2} z + cte_3$

5) $\vec{A}(0) = \vec{0} \Rightarrow A(0) = cte_2 = 0$

$\lim_{z \to 0^\pm} A(z) = 0 \Rightarrow cte_1 = cte_2 = 0$

Exercice 3: (Examen SMPC-S3, session normale 2019/2020) 7pts

1- On prend le système de coord. cylindrique pour décrire $\vec{B}$



* Symétrie:

Le plan π défini par la droite AM et l'axe (Oz) est un plan de symétrie pour le courant

$\Rightarrow \vec{B}(M) \perp \vec{AM} \Rightarrow \vec{B}(M) \parallel \vec{e}_\theta$

$\Rightarrow \vec{B}(M) = B\vec{e}_\theta$

* Invariance:

Toute translation parallèle à l'axe (Oz) et toute rotation autour de cette axe laisse la distribution du courant invariante

$\Rightarrow \vec{B}(M) = \vec{B}(r,\theta,z) = \vec{B}(r) = B(r)\vec{e}_\theta$

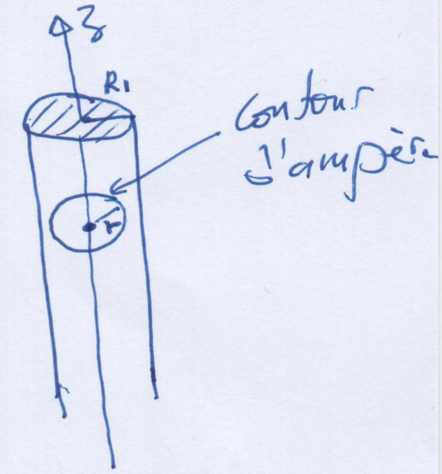
2- Quatre régions d'étude

* $r < R_1$

Le contour d'ampère utilisé dans ce cas est un cercle de rayon r et d'axe (Oz), le sens positif est le sens trigonométrique

$\oint \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 I_{enl}$ (Théorème d'Ampère) on a $I_{enl} = \iint \vec{j} \cdot \vec{ds} = \iint \vec{j} \cdot \vec{n}\, ds = j \int ds = j\pi r^2$

Dans le cylindre central de rayon R_1, le courant traverse ce cylindre suivant l'axe z et on a la densité de courant est répartie uniformément dans ce cylindre $\Rightarrow I = j \cdot S = j\pi R_1^2 \Rightarrow j = \frac{I}{\pi R_1^2}$



Alors $I_{enl} = \frac{I \pi r^2}{\pi R_1^2} = I \frac{r^2}{R_1^2}$

En appliquant le théorème d'Ampère :

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I_{enl} = \mu_0 \frac{I r^2}{R_1^2} \quad (1)$$

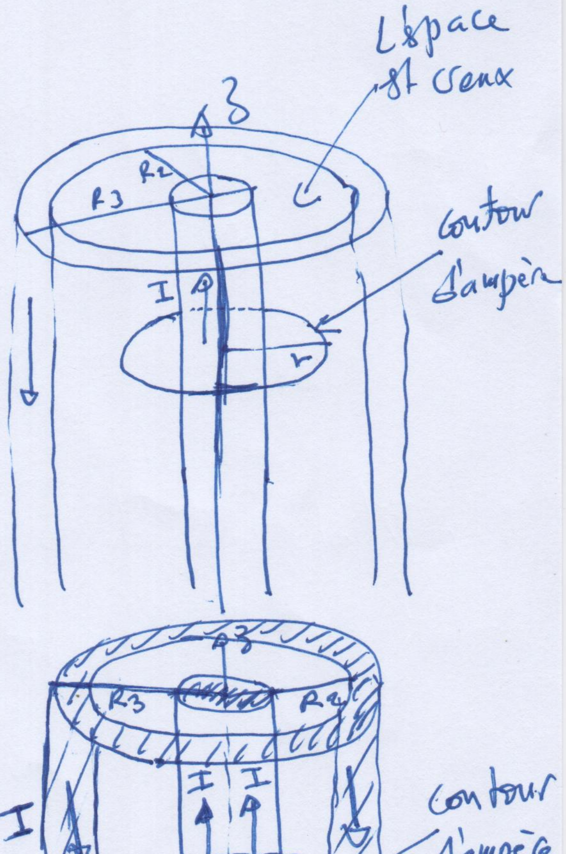
$$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = B \int dl = B\, 2\pi r \quad (2)$$

$$(1) = (2) \Longrightarrow B\, 2\pi r = \mu_0 \frac{I r^2}{R_1^2} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{r}{R_1^2}$$

* $R_1 < r < R_2$

puisque l'espace entre R_1 et R_2 est creux.

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



* $R_2 < r < R_3$

L'espace entre R_2 et R_3 est plein

le contour d'ampère est un cercle de rayon r avec $R_2 < r < R_3$

Th. d'ampère $\Rightarrow B \cdot 2\pi r = \mu_0 I_{enlac}$

$$= \mu_0 I - \mu_0 I_i$$

Le cylindre central est traversé par I dans le sens de z, le cylindre creux d'épaisseur $R_3 - R_2$ est traversé par le courant I dans le sens opposé de z

$\Rightarrow B \cdot 2\pi r = \mu_0 I - \mu_0 I_i$

I 8t le courant du cylindre plein central dans le sens⊕

I_i 8t le courant du cylindre creux d'épaisseur $r - R_2$, puisque on s'intéresse par les courants à l'intérieur du contour d'ampère

on a la même densité j dans le cylindre creux d'épaisseur $R_3 - R_2 \Rightarrow I = j \cdot S$, S 8t la section transversale du cylindre creux, enfait c'8t la surface de la section transversale située entre R_2 et R_3

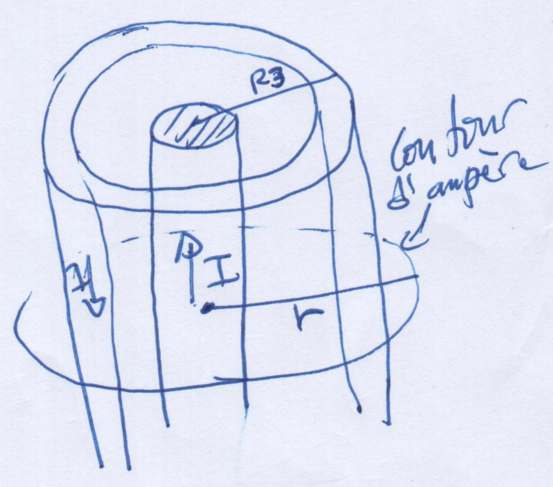
$$\Rightarrow I = j\pi\left(R_3^2 - R_2^2\right) \Rightarrow j = \frac{I}{\pi\left(R_3^2 - R_2^2\right)}$$

$$I_i = j\pi\left(r^2 - R_2^2\right)$$

$$= I\,\frac{\pi\left(r^2 - R_2^2\right)}{\pi R_3^2 - R_2^2} = I\left(\frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}\right)$$

donc $B = \mu_0(I - I_i)/2\pi r = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(1 - \dfrac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}\right)$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\frac{\left(R_3^2 - r^2\right)}{R_3^2 - R_2^2}$$



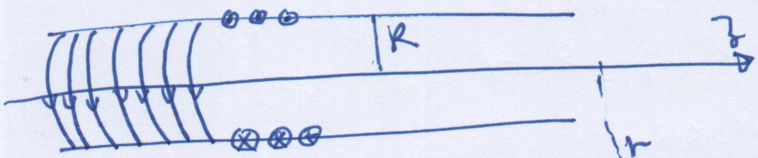
* $r > R_3$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I - \mu_0 I$$

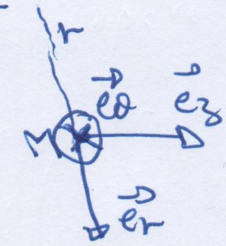
$$= 0$$

$$\Rightarrow B = 0$$

Exercice 4 :



1) La symétrie cylindrique du



Solénoïde $\Rightarrow$ A ne dépend que de r, ne dépend ni de z ni de θ.

On a $\Pi_S = (\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ est un plan de symétrie

et $\Pi_A = (\vec{e_r}, \vec{e_z})$ est un plan d'antisymétrie

$\Rightarrow A \in \Pi_S$ et $\perp$ sur Π_A

$\Rightarrow \vec{A} \parallel \vec{e_\theta} \Rightarrow \vec{A} = A(r)\,\vec{e_\theta} = \begin{pmatrix} 0 \\ A(r) \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial r \overset{=0}{A_r}}{\partial r}}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial \overset{=0}{A_z}}{\partial z}}_{=0}$$ (A ne dépend pas de θ)

2 - La courbe est un cercle de rayon r et d'axe (Oz)

$\oint \vec{A}\cdot\vec{dl} = 2\pi r A$ (A ne dépend de θ)

on a : $\oint \vec{A}\cdot\vec{dl} = \iint_S \vec{B}\cdot\vec{dS}$ $\left(\oint \vec{A}\cdot\vec{dl} = \iint_S \vec{rot}\,\vec{A}\cdot\vec{dS} : \text{Théorème de Stokes}\right)$

$= 2\pi r A \Rightarrow A = \dfrac{1}{2\pi r}\iint \vec{B}\cdot\vec{dS}$

$\vec{B}$ suivant $\vec{e_z}$ et $\vec{dS}$ aussi

donc $A = \dfrac{1}{2\pi r}\displaystyle\int_0^r\int_0^{2\pi} B\, r\,dr\,d\theta$ avec $\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 n I\,\vec{e_z} & \text{si } 0<r<R \\ 0 & \text{si } r>R \end{cases}$

* Si $r>R \Rightarrow A = \dfrac{1}{2\pi r}\displaystyle\int_0^R\int_0^{2\pi} B\cdot r\,dr\,d\theta + \dfrac{1}{2\pi r}\int_R^r\int_0^{2\pi} \underbrace{B}_{=0}\cdot r\cdot dr\cdot d\theta$

$= \dfrac{1}{2\pi r} B \displaystyle\int_0^R r\,dr \int_0^{2\pi} d\theta = \dfrac{B}{2\pi r}\dfrac{R^2}{2}2\pi = \dfrac{BR^2}{2r} = \mu_0 n I \dfrac{R^2}{2r}$

* Si $r<R$ $A = \dfrac{B}{2\pi r}\displaystyle\int_0^r r\,dr\int_0^{2\pi} d\theta = \dfrac{B}{2\pi r}\dfrac{r^2}{2}2\pi = B\dfrac{r}{2} = \mu_0 n I \dfrac{r}{2}$

3) A ne dépend que de R et A suivant $\vec{e}_\theta$

$\vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ en coordonnée cylindriques :

$$= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial (rA_\theta)}{\partial z}\right)\vec{e_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial rA_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e_z}$$

$$= \vec{B}$$

Puisque $\vec{B}$ est suivant $\vec{e_z}$, donc on va garder seulement le terme de $\vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ suivant $\vec{e_z}$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial rA_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e_z}$$

On a $A_r = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial rA}{\partial r}\vec{e_z} = \vec{B}$ $\quad (A_\theta = A)$

$$\Rightarrow \frac{\partial rA}{\partial r} = B.r \Rightarrow rA = \int B r\,dr$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{r}\int B.r\,dr$$

Deux cas à discuter :

* si $r < R$ $\qquad B = \mu_0 n I$

$$A = \frac{1}{r}\int_0^r B.r\,dr = \frac{1}{r} B \frac{r^2}{2} = B\frac{r}{2}$$

* si $r > R$ $\qquad B = 0$

$$A = \frac{1}{r}\int_0^R B\,r.dr = \frac{1}{r} B \frac{R^2}{2} = \frac{BR^2}{2r}$$

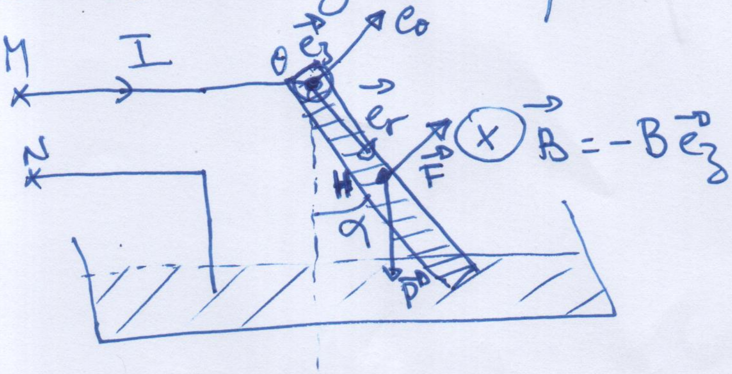
Exercice 5 :

1) Le système de coordonnées le mieux adapté pour traiter cet exercice est le système de coordonnées cylindrique

$\vec{F} = I L \vec{e_r} \wedge \vec{B}$

$= -I L B (\vec{e_r} \wedge \vec{e_z})$

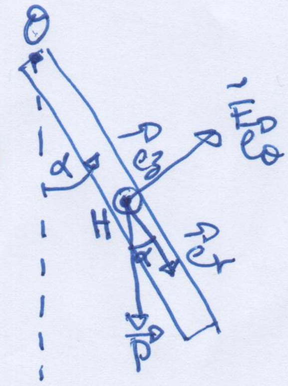
$= I L B \vec{e_\theta}$



2) les forces sont dessinées sur le schéma

3) La barre est à l'équilibre lorsque la somme des moments des forces est nulle

$\mathcal{M}_{(O)}(\vec{P}) = \vec{OH} \wedge \vec{P}$ et $\mathcal{M}_{(O)}(\vec{F}) = \vec{OH} \wedge \vec{F}$



On a $\vec{OH} = \frac{L}{2}\vec{e_r}$ et $\vec{P} = m\vec{g} = mg(\cos\alpha\,\vec{e_r} - \sin\alpha\,\vec{e_\theta})$

$\vec{\mathcal{M}}(\vec{P}) = \vec{OH} \wedge \vec{P} = \frac{L}{2}\vec{e_r} \wedge mg(\cos\alpha\,\vec{e_r} - \sin\alpha\,\vec{e_\theta})$

$= \frac{L}{2} mg \left[\underbrace{(\vec{e_r} \wedge \cos\alpha\,\vec{e_r})}_{\vec{0}} - (\vec{e_r} \wedge \sin\alpha\,\vec{e_\theta}) \right]$

$= -\frac{L}{2} mg \sin\alpha\,\vec{e_r} \wedge \vec{e_\theta}$

$\vec{\mathcal{M}}(\vec{F}) = \frac{L}{2}\vec{e_r} \wedge I L B \vec{e_\theta} = \frac{L^2}{2} I B\,\vec{e_r} \wedge \vec{e_\theta}$

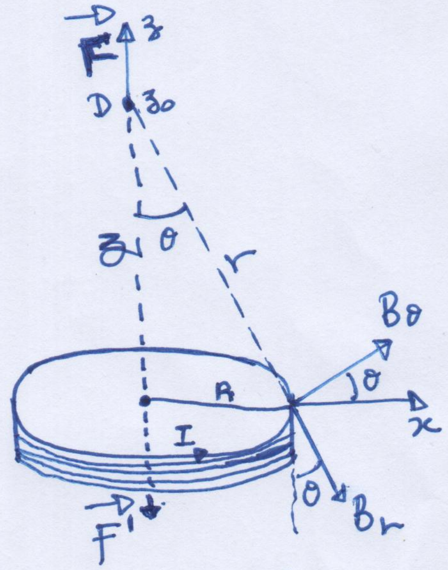
à l'équilibre $\vec{\mathcal{M}}(\vec{F}) + \vec{\mathcal{M}}(\vec{P}) = \vec{0} \Rightarrow \frac{L^2}{2} I B - \frac{L}{2} mg \sin\alpha = 0$

$L I B = mg \sin\alpha \Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{L I B}{mg}\right)$

4) Lorsque le bas ~~sort~~ de la barre sort du bain de mercure, on aura un ~~cour~~ circuit ouvert et la force de Laplace s'annule. Ensuite La barre retombe dans le bain de mercure et on aura à nouveau un circuit fermé et la force de Laplace réapparait. La barre va osciller pendant un moment jusqu'à que la barre se stabilise à la limite du bain de mercure même il va rester des petits osillations car le contact avec le mercure doit exister.

Exercice 6

L'énergie potentielle magnétique d'un dipôle magnétique est donnée par : $E_p = -\vec{M}\vec{B}$, $\vec{M}$ est le moment magnétique d'un dipôle avec $\vec{M} = I\vec{S}$, I est le courant ~~qui~~ qui traverse un circuit d'une surface S, $\vec{S}$ est le vecteur surface



on sait que le champ crée par une spire a la forme suivante $\vec{B}(z) = \dfrac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\theta\,\vec{e_z}$

alors le champ crée par la bobine en D est :

$$\vec{B_b}(z) = \frac{\mu_0 N I}{2R}\sin^3\theta\,\vec{e_z} \quad \text{avec } \sin\theta = \frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

$$\vec{B_b}(z) = \frac{\mu_0 N I}{2}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\vec{e_z}$$

1) Le dipôle de moment $\vec{M}(M_x, M_y, M_z)$ supposé constant, placé dans un champ extérieur et soumis :

* au couple de force $\Gamma = \vec{M}\wedge\vec{B}$
* et à la force résultante $\vec{F} = -\vec{grad}\,E_p = \vec{grad}\,(\vec{M}\cdot\vec{B})$

donc $\vec{F_x} = \dfrac{\partial}{\partial x}(M_xB_x + M_yB_y + M_zB_z) = M_x\dfrac{\partial B_x}{\partial x} + M_y\dfrac{\partial B_y}{\partial x} + M_z\dfrac{\partial B_z}{\partial x}$

$= \vec{M}\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial x}$

La même chose pour F_y et $F_z \Rightarrow F_y = \vec{M}\,\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial y}$

$$F_z = \vec{M}\,\frac{\partial \vec{B}}{\partial z}$$

2) a) le dipôle placé dans le champ de la bobine (non uniforme) est soumis à un couple nul, puisque le moment magnétique est parallèle à Oz et la même chose pour le champ crée par la bobine donc

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B} = \vec{0}$$

La force de laplace $\vec{F}$ est donnée par :

$$F_x = \vec{M}\,\frac{\partial \vec{B}}{\partial x}, \quad F_y = \vec{M}\,\frac{\partial \vec{B}}{\partial y}, \quad F_z = \vec{M}\,\frac{\partial \vec{B}}{\partial z}$$

$\vec{B}$ ne dépend que de $z \Rightarrow \vec{F} = \vec{M}\,\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial z}\,\vec{e}_z$

$$\Rightarrow \vec{F} = M\,\frac{\mu_0 n I}{2}\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\right) = \frac{3\mu_0 M N I R^2}{2}\,\frac{z}{(R^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\,\vec{e}_z$$

(c'est une force répulsive puisqu'elle est dirigée suivant $\vec{e}_z$)

b) on sait que le champ magnétique crée par le dipôle magnétique a une composante radiale B_{dr} et une composante orthoradiale $B_{d\theta}$

$$\vec{B}_d = \begin{cases} B_{dr} = \dfrac{\mu_0 M}{4\pi r^3}\,2\cos\theta \\ B_{d\theta} = \dfrac{\mu_0 M}{4\pi r^3}\,\sin\theta \end{cases}$$

un élément dl d'une spire autour du point est soumis à la force de laplace $d\vec{F'} = I\,\vec{dl} \wedge \vec{B}_d$

$$= I\begin{pmatrix} dl_x \\ dl_y \\ dl_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_{dx} \\ 0 \\ B_{dz} \end{pmatrix} = I\,dl_y\,B_{dz}\,\vec{e}_x - I\,B_{dx}\,dl_y\,\vec{e}_z$$

avec $dl_x = dl_z = 0$

$$\text{avec}\begin{cases} \vec{B}_{dz} = (\sin\theta\,B_{d\theta} - B_{dr}\cos\theta)\,\vec{e}_z \\ \vec{B}_{dx} = (\cos\theta\,B_{d\theta} + \sin\theta\,B_{dr})\,\vec{e}_x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} dF'_x = I\,dl_y\,B_{dz} = I\,dl_y\,(\sin\theta\,B_{d\theta} - B_{dr}\cos\theta) \\ dF'_z = -I\,dl_y\,B_{dx} = -I\,dl_y\,(\cos\theta\,B_{d\theta} + \sin\theta\,B_{dr}) \end{cases}$$

Les forces élémentaire agissant sur deux éléments diamétralement opposés de la bobine sont égales et opposés.

La somme de ces deux forces est nulle.

Alors la composante utile est dF'_z

$$dF'_z = -I\, dl_y (\cos\theta B_{d\theta} + \sin\theta B_{dr}) , \quad \sin\theta = \frac{R}{r} , \quad \cos\theta = \frac{z}{r}$$

$$= -I\, dl_y \left(\cos\theta \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} \sin\theta + \sin\theta \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} 2\cos\theta\right) = -I\, dl_y (\sin\theta\cos\theta) \frac{3\mu_0 M}{4\pi r^3}$$

$$dF'_z = -\frac{3\mu_0 M I}{4\pi r^3} \frac{Rz}{r^2} dl_y = -\frac{3\mu_0 M I R z}{4\pi r^5} dl_y$$

La résultante des forces agissant sur les N spires de la bobine est donc :

$$F'_z = -\frac{3\mu_0 M I R z N}{4\pi r^5} \underbrace{\int dl_y}_{=2\pi R} = -\frac{3\mu_0 M I R^2 z N}{2 r^5} , \quad r = (R^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{F'} = -\frac{3\mu_0 M I R^2 z N}{2 (R^2 + z^2)^{5/2}} \vec{e_z}$$

on constate que $\vec{F} = -\vec{F'}$ ce qui est en accord avec le principe d'action et réaction

c) Le travail que doit excercer l'opérateur pour amener le dipôle de la position D vers le centre O est :

$$W_{OP} = -\int \vec{F}\cdot\vec{dr} = -\int_{z_0}^{0} F.\, dz \quad \text{avec } F = \frac{3\mu_0 M N I R^2}{2} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$W_{opérateur} = -\frac{3\mu_0 M N I R^2}{2} \int_{z_0}^{0} \frac{z\, dz}{(R^2 + z^2)^{5/2}}$$

$$\int_{z_0}^{0} \frac{z\, dz}{(R^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = \left[\frac{-1}{3(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\right]_{z_0}^{0} = \left[-\frac{1}{3R^3} + \frac{1}{3(R^2 + z_0^2)^{3/2}}\right]$$

$$= \frac{1}{3R^3}\left[-1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{z_0^2}{R^2}\right)^{3/2}}\right]$$

$$\Rightarrow W_{opérateur} = -\frac{3\mu_0 M N I R^2}{2} \frac{1}{3R^3} \left(-1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{z_0^2}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$= \frac{\mu_0 M N I}{2R} \left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{z_0^2}{R^2}\right)^{3/2}}\right)$$