Université Moulay Ismail
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année universitaire 19-20
Filières SMIA
Semestre 2

Correction de TD Algèbre III: Les Matrices

Youness Mazigh

<u>Exercice 16</u> : Soit E l'ensemble des matrices $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & -c & -b \\ b & a & -c \\ c & b & a \end{pmatrix}$ avec a, b, c dans $\mathbb{C}$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ dont on précisera une base et la dimension.
2. Montrer que $(E, +, \times)$ est une sous-algèbre commutative de l'algèbre $(\mathcal{M}_3(\mathbb{C}), +, \times)$.

<u>Solution</u> :

1. (a) Montrons que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. En effet, on sait que $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et comme $E \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, il suffit de montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
On a $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M(0,0,0)$, donc $E \neq \emptyset$. Soient $M(a,b,c), M(a',b',c') \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} \alpha.M(a,b,c) + \beta.M(a',b',c') &= \alpha.\begin{pmatrix} a & -c & -b \\ b & a & -c \\ c & b & a \end{pmatrix} + \beta.\begin{pmatrix} a' & -c' & -b' \\ b' & a' & -c' \\ c' & b' & a' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha.a + \beta.a' & -\alpha.c - \beta.c' & -\alpha.b - \beta.b' \\ \alpha.b + \beta.b' & \alpha.a + \beta.a' & -\alpha.c - \beta.c' \\ \alpha.c + \beta.c' & \alpha.b + \beta.b' & \alpha.a + \beta.a' \end{pmatrix} \\ &= M(\alpha.a + \beta.a', \alpha.b + \beta.b', \alpha.c + \beta.c'). \end{aligned}$$

Donc $\alpha.M(a,b,c) + \beta.M(a',b',c') \in E$. D'où E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

(b) Déterminons une base de E. Soit $M(a,b,c) \in E$, on a

$$\begin{aligned} M(a,b,c) &= \begin{pmatrix} a & -c & -b \\ b & a & -c \\ c & b & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -b \\ b & 0 & -0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & -c \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= a.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= a.M(1,0,0) + b.M(0,1,0) + c.M(0,0,1), \end{aligned}$$

et donc $\{M(1,0,0), M(0,1,0), M(0,0,1)\}$ est une famille génératrice de E. Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ tel que

$$\alpha.M(1,0,0) + \beta.M(0,1,0) + \gamma.M(0,0,1) = M(0,0,0).$$

Alors

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\gamma & -\beta \\ \beta & \alpha & -\gamma \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \gamma = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

D'où la famille $(M(1,0,0), M(0,1,0), M(0,0,1))$ est une famille libre. On en déduit que $(M(1,0,0), M(0,1,0), M(0,0,1))$ est une base de E, et par suite $\dim_{\mathbb{C}} E = 3$.

2. Montrons que $(E, +, \times)$ est une sous-algèbre commutative de l'algèbre $(\mathcal{M}_3(\mathbb{C}), +, \times)$. En effet, soient $M(a,b,c), M(a',b',c') \in E$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. D'après la question 1, on a

   (a) $0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{C})} \in E$

   (b) $M(a,b,c) + M(a',b',c') \in E$, puisque E est un espace vectoriel.

   (c) $\alpha.M(a,b,c) \in E$, puisque E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

   Reste à montrer que $M(a,b,c) \times M(a',b',c') \in E$. En effet, on a

$$\begin{aligned} M(a,b,c) \times M(a',b',c') &= \begin{pmatrix} a & -c & -b \\ b & a & -c \\ c & b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & -c' & -b' \\ b' & a' & -c' \\ c' & b' & a' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} aa' - cb' - bc' & -ac' - ca' - bb' & -ab' + cc' - ba' \\ ba' + ab' - cc' & -bc' + aa' - cb' & -bb' - ac' - ca' \\ ca' + bb' + ac' & -cc' + ba' + ab' & -cb' - bc' + aa' \end{pmatrix} \\ &= M(aa' - cb' - bc', ba' + ab' - cc', ca' + bb' + ac') \end{aligned}$$

   Donc $M(a,b,c) \times M(a',b',c') \in E$. □

Exercice 17 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice non nulle.

1. Développer et simplifier le produit $(I_n - A)(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{p-1})$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.

2. On dit que la matrice A est nilpotente s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $A^k = 0$. Le plus petit entier p tel que $A^p = 0$ s'appelle l'indice de nilpotence de A, c'est-à-dire, $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$. Montrer que si A est nilpotente, alors la matrice $I_n - A$ est inversible et donner son inverse $(I_n - A)^{-1}$.

Solution :

1. Simplifions le produit $(I_n - A)(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{p-1})$. On a

$$\begin{aligned} (I_n - A)(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{p-1}) &= I_n(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{p-1}) - A(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{p-1}) \\ &= I_n + A + A^2 + \cdots + A^{p-1} - (A + A^2 + \cdots + A^p) \\ &= I_n - A^p. \end{aligned}$$

   D'où

$$(I_n - A)(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{p-1}) = I_n - A^p.$$

2. Montrons si A est nilpotente, alors $I_n - A$ est inversible. Supposons que A est une matrice nilpotente d'indice de nilpotence p. Alors d'après 1, on a

$$(I_n - A)(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{p-1}) = I_n - A^p = I_n$$

puisque $A^p = 0$, et donc $I_n - A$ est une matrice inversible, d'après [1, Corollaire 3.4.18], et son inverse est

$$(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \cdots + A^{p-1}.$$

□

Exercice 18 : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

1. Décomposer A sous forme $aI + bJ$ où I et J sont deux matrices à déterminer.
2. Montrer que la matrice J est nilpotente.
3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ à l'aide de la formule du binôme de Newton.

Solution :

1. Décomposons A sous forme $aI + bJ$ où I et J sont deux matrices à déterminer. On a

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc $A = aI + bJ$, avec $I = I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Montrons que $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente. On a

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J^3 = JJ^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$J^4 = JJ^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc J est une matrice nilpotente d'indice de nilpotence 4.

3. Calculons A^n. On a $A = aI + bJ$, et comme $IJ = JI$, on obtient par la formule du binôme de Newton pour les matrices que

$$A^n = (aI + bJ)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (aI)^{n-k} (bJ)^k.$$

Ainsi,

$$A^n = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (aI)^{n-k} (bJ)^k, & \text{si } n \leq 4 \\ \\ a^n I + \mathrm{C}_n^1 a^{n-1} bJ + \mathrm{C}_n^2 a^{n-2} b^2 J^2 + \mathrm{C}_n^3 a^{n-3} b^3 J^3, & \text{si } n > 4, \end{cases}$$

puisque J est une matrice nilpotente d'indice de nilpotence 4.

<u>Exercice 19</u> : Soit E un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ la famille définie par $e'_1 = e_1 + e_2 - e_3$, $e'_2 = e_1 - e_3$, $e'_3 = e_1 - e_2$.

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E. Former la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$.
2. Écrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ et calculer son inverse P^{-1}.
3. Quelle relation lie les matrices A, D, P et P^{-1}?
4. Calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis déduire A^n.
5. Vérifier que $\mathrm{Tr}(D) = \mathrm{Tr}(A)$ et $\mathrm{rang}(D) = \mathrm{rang}(A)$. Pourquoi a-t-on ces égalités?

<u>Solution</u> :

1. (a) Montrons que $\mathcal{B}'$ est une base de E. En effet, soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ tel que

$$\alpha e'_1 + \beta e'_2 + \gamma e'_3 = 0.$$

Donc

$$\alpha.(e_1 + e_2 - e_3) + \beta(e_1 - e_3) + \gamma(e_1 - e_2) = (\alpha + \beta + \gamma)e_1 + (\alpha - \gamma)e_2 + (-\alpha - \beta)e_3 = 0.$$

Comme $\mathcal{B}$ est une base de E, on obtient

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \\ -\alpha - \beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \gamma = \alpha \\ \beta = -\alpha \\ \alpha = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

D'où $\mathcal{B}'$ est une famille libre. Or $\dim E = 3$ et $\mathrm{card}(\mathcal{B}') = 3$, on en déduit que $\mathcal{B}'$ est une base de E.

(b) Formons la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$. Comme $\dim E = 3$, la matrice D est de la forme $D = \begin{pmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & d_{1,3} \\ d_{2,1} & d_{2,2} & d_{2,3} \\ d_{3,1} & d_{3,2} & d_{3,3} \end{pmatrix}$, donc $f(e'_i) = d_{1,i}e'_1 + d_{2,i}e'_2 + d_{3,i}e'_3$ pour $i = 1, 2, 3$;

$$\begin{cases} f(e'_1) = d_{1,1}e'_1 + d_{2,1}e'_2 + d_{3,1}e'_3 \\ f(e'_2) = d_{1,2}e'_1 + d_{2,2}e'_2 + d_{3,2}e'_3 \\ f(e'_3) = d_{1,3}e'_1 + d_{2,3}e'_2 + d_{3,3}e'_3 \end{cases}$$

D'une part, on a

$$\begin{cases} f(e_1) = 2e_1 - 2e_2 + e_3 \\ f(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3 \\ f(e_3) = -2e_2 + 3e_3 \end{cases}$$

puisque $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, et donc

$$\begin{cases} f(e'_1) = f(e_1 + e_2 - e_3) = f(e_1) + f(e_2) - f(e_3) = e_1 + e_2 - e_3 \\ f(e'_2) = f(e_1 - e_3) = f(e_1) - f(e_3) = 2e_1 - 2e_3 \\ f(e'_3) = f(e_1 - e_2) = f(e_1) - f(e_2) = 3e_1 - 3e_2 \end{cases}.$$

D'autre part, on a

$$\begin{cases} d_{1,1}e'_1 + d_{2,1}e'_2 + d_{3,1}e'_3 = d_{1,1}(e_1 + e_2 - e_3) + d_{2,1}(e_1 - e_3) + d_{3,1}(e_1 - e_2) \\ f(e'_2) = d_{1,2}e'_1 + d_{2,2}e'_2 + d_{3,2}e'_3 = d_{1,2}(e_1 + e_2 - e_3) + d_{2,2}(e_1 - e_3) + d_{3,2}(e_1 - e_2) \\ f(e'_3) = d_{1,3}e'_1 + d_{2,3}e'_2 + d_{3,3}e'_3 = d_{1,3}(e_1 + e_2 - e_3) + d_{2,3}(e_1 - e_3) + d_{3,3}(e_1 - e_2). \end{cases}$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{cases} e_1 + e_2 - e_3 = (d_{1,1} + d_{2,1} + d_{3,1})e_1 + (d_{1,1} - d_{3,1})e_2 + (-d_{1,1} - d_{2,1})e_3 \\ 2e_1 - 2e_3 = (d_{1,2} + d_{2,2} + d_{3,2})e_1 + (d_{1,2} - d_{3,2})e_2 + (-d_{1,2} - d_{2,2})e_3 \\ 3e_1 - 3e_2 = (d_{1,3} + d_{2,3} + d_{3,3})e_1 + (d_{1,3} - d_{3,3})e_2 + (-d_{1,3} - d_{2,3})e_3 \end{cases}$$

Par suite

$$\begin{cases} d_{1,1} + d_{2,1} + d_{3,1} = 1 \\ d_{1,1} - d_{3,1} = 1 \\ -d_{1,1} - d_{2,1} = -1 \end{cases}, \quad \begin{cases} d_{1,2} + d_{2,2} + d_{3,2} = 2 \\ d_{1,2} - d_{3,2} = 0 \\ -d_{1,2} - d_{2,2} = -2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} d_{1,3} + d_{2,3} + d_{3,3} = 3 \\ d_{1,3} - d_{3,3} = -3 \\ -d_{1,3} - d_{2,3} = 0 \end{cases}$$

Ce qui entraîne,

$$\begin{cases} d_{3,1} = 0 \\ d_{1,1} = 1 + d_{3,1} \\ d_{2,1} = -d_{1,1} + 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} d_{3,2} = 0 \\ d_{1,2} = d_{3,2} \\ d_{2,2} = -d_{1,2} + 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} d_{3,3} = 3 \\ d_{1,3} = d_{3,3} - 3 \\ d_{2,3} = -d_{1,3} \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} d_{1,1} = 1 \\ d_{2,1} = 0 \\ d_{3,1} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} d_{1,2} = 0 \\ d_{2,2} = 2 \\ d_{3,2} = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} d_{1,3} = 0 \\ d_{2,3} = 0 \\ d_{3,3} = 3 \end{cases}.$$

D'où

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Écrivons la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. On a

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 - e_3 \\ e'_2 = e_1 - e_3 \\ e'_3 = e_1 - e_2 \end{cases}$$

Donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculons P^{-1}. Puisque P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, alors elle inversible et son inverse P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$. On a

$$\begin{cases} e_1 + e_2 - e_3 = e'_1 \\ e_1 - e_3 = e'_2 \\ e_1 - e_2 = e'_3 \end{cases} \iff \begin{cases} e_2 = e'_1 - e'_2 \\ e_3 = -e'_2 + e_1 \\ e_1 = e_2 + e'_3 \end{cases} \iff \begin{cases} e_1 = e'_1 - e'_2 + e'_3 \\ e_2 = e'_1 - e'_2 \\ e_3 = e'_1 - 2e'_2 + e'_3 \end{cases}$$

D'où

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. La relation lie les matrices A, D, P et P^{-1} est $A = PDP^{-1}$, d'après [1, Proposition 3.5.13]. On vérifie que

$$\begin{aligned} PDP^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = A. \end{aligned}$$

4. Calculons D^n, $n \in \mathbb{N}$. On a $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(1, 2, 3)$ est une matrice diagonale, et donc

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Calculons A^n. On a d'après 3, $A = PDP^{-1}$, et donc

$$\begin{aligned}
A^n &= (PDP^{-1})^n \\
&= PD^nP^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2^n & 3^n \\ 1 & 0 & -3^n \\ -1 & -2^n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1-2^n+3^n & 1-2^n & 1-2^{n+1}+3^n \\ 1-3^n & 1 & 1-3^n \\ -1+2^n & -1+2^n & -1+2^{n+1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

D'où

$$A^n = \begin{pmatrix} 1-2^n+3^n & 1-2^n & 1-2^{n+1}+3^n \\ 1-3^n & 1 & 1-3^n \\ -1+2^n & -1+2^n & -1+2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

5. (a) Vérifions que $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(D)$. On a $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{Tr}(A) = 2+1+3 = 6$, et on a $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Tr}(A) = 1+2+3 = 6$. D'où

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(D) = 6.$$

(b) Vérifions que $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(D)$. Calculons le rang de A, en effet, la matrice A est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs $f(e_1), f(e_2)$ et $f(e_3)$ dans la base $\mathcal{B}$. Donc

$$\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)).$$

Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ tel que

$$\alpha f(e_1) + \beta f(e_2) + \gamma f(e_3) = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} 2\alpha - \beta = 0 \\ -2\alpha + \beta - 2\gamma = 0 \\ \alpha + \beta + 3\gamma = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -2\gamma = 0 \\ \beta = 2\alpha \\ \alpha + \beta + 3\gamma = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta = 2\alpha \\ 3\alpha = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

D'où la famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ est libre, et comme $\dim E = 3$, on en déduit que $(f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ est une base de E. Par suite $\text{rang}(A) = 3$.
Calculons le rang de D. La matrice D est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs $f(e'_1), f(e'_2)$ et $f(e'_3)$ dans la base $\mathcal{B}'$. Donc

$$\text{rang}(D) = \text{rang}(f(e'_1), f(e'_2), f(e'_3)).$$

Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$, alors

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

D'où la famille $(f(e'_1), f(e'_2), f(e'_3)$ est libre, et comme $\dim E = 3$, on en déduit que $(f(e'_1), f(e'_2), f(e'_3)$ est une base de E. Par suite $\text{rang}(D) = 3$. On en déduit que

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(D) = 3.$$

(c) On a les égalités $\text{rang}(A) = \text{rang}(D)$ et $\text{Tr}(A) = \text{tr}(D)$, car les matrices A et D sont semblables, $A = PDP^{-1}$.

$\square$

Exercice 20 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit l'application $f : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$, $P(X) \longmapsto P(X+1) + P(X)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \cdots, X^{n-1})$ de $\mathbb{R}_n[X]$. f est-il un automorphisme?

Solution :

1. Montrons que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $P(X), Q(x) \in \mathbb{R}_n[X]$, on a

$$\begin{aligned} f(\alpha P(X) + \beta Q(X)) &= f((\alpha P + \beta Q)(X)) \\ &= (\alpha P + \beta Q)(X+1) + (\alpha P + \beta Q)(X) \\ &= \alpha P(X+1) + \beta Q(X+1) + \alpha P(X) + \beta Q(X) \\ &= \alpha f(P(X)) + \beta f(Q(X)), \end{aligned}$$

et donc f est un endomorphisme.

2. Déterminations de la matrice $M(f, \mathcal{B})$. Soit $m < n$, on a

$$f(X^m) = (X+1)^m + X^m = \sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{C}_m^k X^k + 2X^m.$$

D'où

$$M(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & \mathrm{C}_2^1 & \mathrm{C}_3^1 & \cdots & \mathrm{C}_{n-1}^1 \\ 0 & 0 & 2 & \mathrm{C}_3^2 & \cdots & \mathrm{C}_{n-1}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \cdots & \mathrm{C}_{n-1}^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{pmatrix}.$$

L'endomorphisme f est bijectif. En effet, soit $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & C_2^1 & C_3^1 & \cdots & C_{n-1}^1 \\ 0 & 0 & 2 & C_3^2 & \cdots & C_{n-1}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \cdots & C_{n-1}^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

on obtient le système

$$\begin{cases} 2\alpha_{n-1} = 0 \\ 2\alpha_{n-2} + C_{n-1}^{n-2}\alpha_{n-1} = 0 \\ 2\alpha_{n-3} + C_{n-2}^{n-3}\alpha_{n-2} + C_{n-1}^{n-3}\alpha_{n-1} = 0 \\ 2\alpha_{n-4} + C_{n-3}^{n-4}\alpha_{n-3} + C_{n-2}^{n-4}\alpha_{n-2} + C_{n-1}^{n-4}\alpha_{n-1} = 0 \\ \vdots \\ 2\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1} = 0 \end{cases}$$

D'où $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$. Par suite, f est injectif. Comme $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie, on en déduit que f est bijectif. $\square$

Exercice 21 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 3A + 2I_2$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
2. Pour $n \geq 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
3. En déduire l'expression de la matrice A^n.

Solution :

1. Calculons $A^2 - 3A + 2I_2$. On a

$$\begin{aligned} A^2 - 3A + 2I_2 &= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -9 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où

$$A^2 - 3A + 2I_2 = 0.$$

On a $A^2 - 3A + 2I_2 = 0$, donc $3A - A^2 = 2I_2$. D'où

$$A(\frac{3}{2}I_2 - \frac{1}{2}A) = I_2$$

Par suite, A est une matrice inversible dont l'inverse $A^{-1} = \frac{3}{2}I_2 - \dfrac{1}{2}A$.

2. Déterminons le reste de la division euclidienne de X^n par X^2-3X+2, pour $n \geq 2$. En effet, soit $R(X)$ le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$. Comme $P(X) = X^2 - 3X + 2$ est un polynôme de degré 2, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que

$$R(X) = aX + b.$$

Or $P(1) = P(2) = 0$, on obtient

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 2^n \end{cases}$$

puisque, il existe $Q(X)$ tel que $X^n = Q(X)P(X) + R(X)$. Ainsi, $a = 2^n - 1$ et $b = 2 - 2^n$. Par suite

$$R(X) = (2^n - 1)X + 2 - 2^n.$$

3. Déduisons l'expression de la matrice A^n. D'après la question 2, on a

$$X^n = Q(X)(X^2 - 3X + 2) + (2^n - 1)X + 2 - 2^n, \quad n \geq 2$$

et comme $A^2 - 3A + 2I_2 = 0$, on obtient

$$A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_2, \quad \text{pour tout } n \geq 2.$$

$\square$

Exercice 22 : Trouver le rang de chacune des matrices suivantes à l'aide de la méthode de Gauss :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & -7 & -3 \\ 3 & 8 & 1 & -7 & -8 \end{pmatrix}$$

Solution :

1. Calculons le rang de A. On a

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 + \frac{1}{2}L_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3/2 & -3/2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 + \frac{1}{2}L_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3/2 & -3/2 \\ 0 & -3/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 + L_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où $\text{rang}(A) = 2$.

2. Calculons le rang de B. On a

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 - \frac{3}{2}L_1} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 0 & 11/2 & 17/2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 + \frac{1}{2}L_1} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 0 & 11/2 & 17/2 \\ 0 & -3/2 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 + \frac{3}{11}L_2} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 0 & 11/2 & 17/2 \\ 0 & 0 & -15/22 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 - \frac{4}{11}L_2} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 0 & 11/2 & 17/2 \\ 0 & 0 & -15/22 \\ 0 & 0 & 16/11 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 + \frac{15}{32}L_2} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 0 & 11/2 & 17/2 \\ 0 & 0 & -15/22 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où $\text{rang}(B) = 3$.

3. Calculons le rang de C. On a

$$C=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\2&1&1&0\\1&2&-1&1\\-1&0&-1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{L_2-2L_1}\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&-1&1&-2\\1&2&-1&1\\-1&0&-1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{L_3-L_1}\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&-1&1&-2\\0&1&-1&0\\-1&0&-1&-3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_4+L_1}\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&-1&1&-2\\0&1&-1&0\\0&1&-1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{L_3+L_2}\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&-1&1&-2\\0&0&0&-2\\0&1&-1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{L_4+L_2}\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&-1&1&-2\\0&0&0&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3\leftrightarrow c_4}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&-1&-2&1\\0&0&-2&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

D'où $\mathrm{rang}(C)=3$.

4. Calculons le rang D. On a

$$D=\begin{pmatrix}1&3&1&-2&-3\\1&4&3&-1&-4\\2&3&-4&-7&-3\\3&8&1&-7&-8\end{pmatrix}\xrightarrow{L_2-L_1}\begin{pmatrix}1&3&1&-2&-3\\0&1&2&1&-1\\2&3&-4&-7&-3\\3&8&1&-7&-8\end{pmatrix}\xrightarrow{L_3-2L_1}\begin{pmatrix}1&3&1&-2&-3\\0&1&2&1&-1\\0&-3&-6&-3&3\\3&8&1&-7&-8\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_4-3L_1}\begin{pmatrix}1&3&1&-2&-3\\0&1&2&1&-1\\0&-3&-6&-3&3\\0&2&-2&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{L_3+3L_2}\begin{pmatrix}1&3&1&-2&-3\\0&1&2&1&-1\\0&0&0&0&0\\0&2&-2&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{L_4-2L_2}\begin{pmatrix}1&3&1&-2&-3\\0&1&2&1&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&-6&-3&-3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3\leftrightarrow L_4}\begin{pmatrix}1&3&1&-2&-3\\0&1&2&1&-1\\0&0&-6&-3&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

D'où $\mathrm{rang}(D)=3$. □

<u>Exercice 23</u> : A l'aide de la méthode de Gauss, déterminer si les matrices suivantes sont inversibles, et déterminer leurs inverses lorsque elles sont inversibles:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&2\\2&0&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&1&5\\-1&1&-1\\0&3&3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&2&3&1\\0&3&2&1\end{pmatrix}$$

<u>Solution</u> :

1. Calculons le rang de A. On a

$$\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&2\\2&0&3\end{pmatrix}\xrightarrow{L_3-2L_1}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&2\\0&2&3\end{pmatrix}\xrightarrow{L_3-2L_2}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&2\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

D'où $\text{rang}(A) = 3$. Par suite A est une matrice inversible.
Déterminons l'inverse de A. On a

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & : & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & : & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3-2L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & : & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3-2L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & : & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2+C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & : & -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_3-2C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & : & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & : & -2 & -4 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{-C_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & : & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & : & -2 & -4 & -9 \end{pmatrix}$$

D'où

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & -9 \end{pmatrix}$$

2. Calculons le rang de B. On a

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2+1/2L_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3/2 & 3/2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3-2L_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où $\text{rang}(B) = 2$ et donc B n'est pas inversible.

3. Calculons le rang de C. On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2-L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3-L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3-2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_4-3L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4+L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

D'où $\text{rang}(C) = 4$ et donc C est une matrice inversible.
Déterminons l'inverse de C. On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & : & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & : & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2-L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & : & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & : & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3-L_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & : & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & : & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & : & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3-2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & : & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & : & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & : & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4-3L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & : & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & : & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & : & 3 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4+L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & : & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & : & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & : & 4 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3-C_2}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & : & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & : & -1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & : & 1 & -2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3 & : & 4 & -5 & 6 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{C_4-C_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & : & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & : & -1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & : & 1 & -2 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -3 & : & 4 & -5 & 6 & 5\end{pmatrix} \xrightarrow{C_4+C_3}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & : & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & : & -1 & 1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & 1 & -2 & 3 & 5\\ 0 & 0 & 0 & -3 & : & 4 & -5 & 6 & 11\end{pmatrix} \xrightarrow{-1/3C_4} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & : & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & : & -1 & 1 & -1 & 2/3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & 1 & -2 & 3 & -5/3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 4 & -5 & 6 & -11/3\end{pmatrix}$$

D'où

$$C^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & -1 & 2/3\\ 1 & -2 & 3 & -5/3\\ 4 & -5 & 6 & -11/3\end{pmatrix}$$

Bibliography

[1] **Bentaleb. A.** *Cours d'Algèbre III du deuxième semestre SMIA*. Université Moulay Ismail, Faculté des sciences 2020.