جامعة مولاي إسماعيل
UNIVERSITÉ MOULAY ISMAÏL
كلية العلوم القانونية والاقتصادية والاجتماعية
FACULTÉ DES SCIENCES JURIDIQUES ECONOMIQUES ET SOCIALES

Algèbre Linéaire

CHAKIB JERRY

Année Universitaire: 2023/2024

Table des Matières

1
Matrices

Définition *Matrice*

On appelle MATRICE $m \times n$ (ou d'ordre $m \times n$) à coefficients dans $\mathbb{K}$ tout tableau de m lignes et n colonnes d'éléments de $\mathbb{K}$. L'ensemble des matrices $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.
Si $m = n$ on dit qu'on a une MATRICE CARRÉE. L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Une matrice $m \times 1$ est appelée VECTEUR-COLONNE et une matrice $1 \times n$ est appelée VECTEUR-LIGNE.
On convient de noter a_{ij} l'élément de la matrice situé sur la i-ème ligne et j-ème colonne ($1 \le i \le m$ et $1 \le j \le n$).
Une matrice $\mathbb{A}$ est représentée entre deux parenthèses ou deux crochets :

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ou encore

$$\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} \qquad \text{ou} \qquad \mathbb{A} = [a_{ij}]_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$$

Nous travaillerons avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{Z}$.

Exemple

La matrice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

est carrée et d'ordre 3.

Définition *Addition de matrices*

Si $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$ et $\mathbb{B} = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$ sont deux matrices $m \times n$, on définit l'ADDITION des matrices par

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}.$$

La MATRICE NULLE, notée $\mathbb{O}_{m,n}$, est la matrice dont tous les éléments sont nuls.

La MATRICE OPPOSÉE D'UNE MATRICE $\mathbb{A}$ est notée $-\mathbb{A}$. Si $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$ alors $-\mathbb{A} = (-a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$.

Exemple

Soient les matrices

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$\mathbb{A}+\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 3+6 & 4+1 & 2+9 \\ 1+2 & 3+0 & 5+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 11 \\ 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Attention

La somme de deux matrices d'ordres différents n'est pas définie.

Propriété

Si $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ et $\mathbb{C}$ sont des matrices de même ordre, alors nous avons
▷ $\mathbb{A}+\mathbb{B} = \mathbb{B}+\mathbb{A}$ (commutativité),
▷ $\mathbb{A}+(\mathbb{B}+\mathbb{C}) = (\mathbb{A}+\mathbb{B})+\mathbb{C}$ (associativité).

Exemple

Soient les matrices

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\mathbb{A}+\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1+6 & -1-5 \\ 3+2 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B}+\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 6+1 & -5-1 \\ 2+3 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B}+\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 6+0 & -5+2 \\ 2+2 & 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

De plus,

$$(\mathbb{A}+\mathbb{B})+\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{A}+(\mathbb{B}+\mathbb{C}) = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Définition

On appelle MATRICE DIAGONALE toute matrice carrée $\mathbb{D} = (d_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ telle que $i \neq j \implies d_{ij} = 0$. Si on note $d_i = d_{ii}$, une matrice diagonale est de la forme

$$\mathbb{D}_n = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}.$$

On la note $\mathrm{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$.
La MATRICE IDENTITÉ d'ordre n, notée $\mathbb{I}_n$, est la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(1, 1, \dots, 1)$.

Définition *Matrices triangulaires*

On dit qu'une matrice carrée $\mathbb{A} = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est
▷ TRIANGULAIRE SUPÉRIEURE si $i > j \implies a_{ij} = 0$,
▷ TRIANGULAIRE INFÉRIEURE si $i < j \implies a_{ij} = 0$.
Une matrice triangulaire supérieure et inférieure (*i.e.* $i \neq j \implies a_{ij} = 0$) est une matrice diagonale.

Exemple

$$\mathbb{U}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&5&6&7\\0&0&2&-1\\0&0&0&-5\end{pmatrix}\qquad\text{est une matrice triangulaire supérieure,}$$

$$\mathbb{L}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\4&0&0&0\\5&-1&2&0\\7&9&15&4\end{pmatrix}\qquad\text{est une matrice triangulaire inférieure,}$$

$$\mathbb{D}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-8&0&0\\0&0&7&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad\text{est une matrice diagonale.}$$

Définition *Produit d'une matrice par un scalaire*

Si $\mathbb{A}=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ est une matrice $m\times n$ et si $\alpha\in\mathbb{K}$, on définit le PRODUIT D'UNE MATRICE PAR UN SCALAIRE par

$$\alpha\cdot\mathbb{A}=(\alpha\cdot a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$$

Propriété

Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux matrices de même ordre et $\alpha\in\mathbb{K}$ un scalaire, on a
▷ $\alpha\cdot(\mathbb{A}+\mathbb{B})=\alpha\cdot\mathbb{A}+\alpha\cdot\mathbb{B}$ (distributivité).

Exemple

Soit $\mathbb{A}=\begin{pmatrix}3&4&2\\1&3&5\end{pmatrix}$ et $\alpha=\frac{1}{2}$. On obtient $\mathbb{C}=\alpha\cdot\mathbb{A}=\begin{pmatrix}3/2&2&1\\1/2&3/2&5/2\end{pmatrix}$.

Définition *Produit de matrices*

Si $\mathbb{A}=(a_{ik})_{\substack{1\le i\le m\\1\le k\le n}}$ est une matrice $m\times n$ et $\mathbb{B}=(b_{kj})_{\substack{1\le k\le n\\1\le j\le p}}$ une matrice $n\times p$, on définit le PRODUIT DES MATRICES par

$$\mathbb{A}\times\mathbb{B}=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le p}}$$

C'est une matrice $m\times p$.

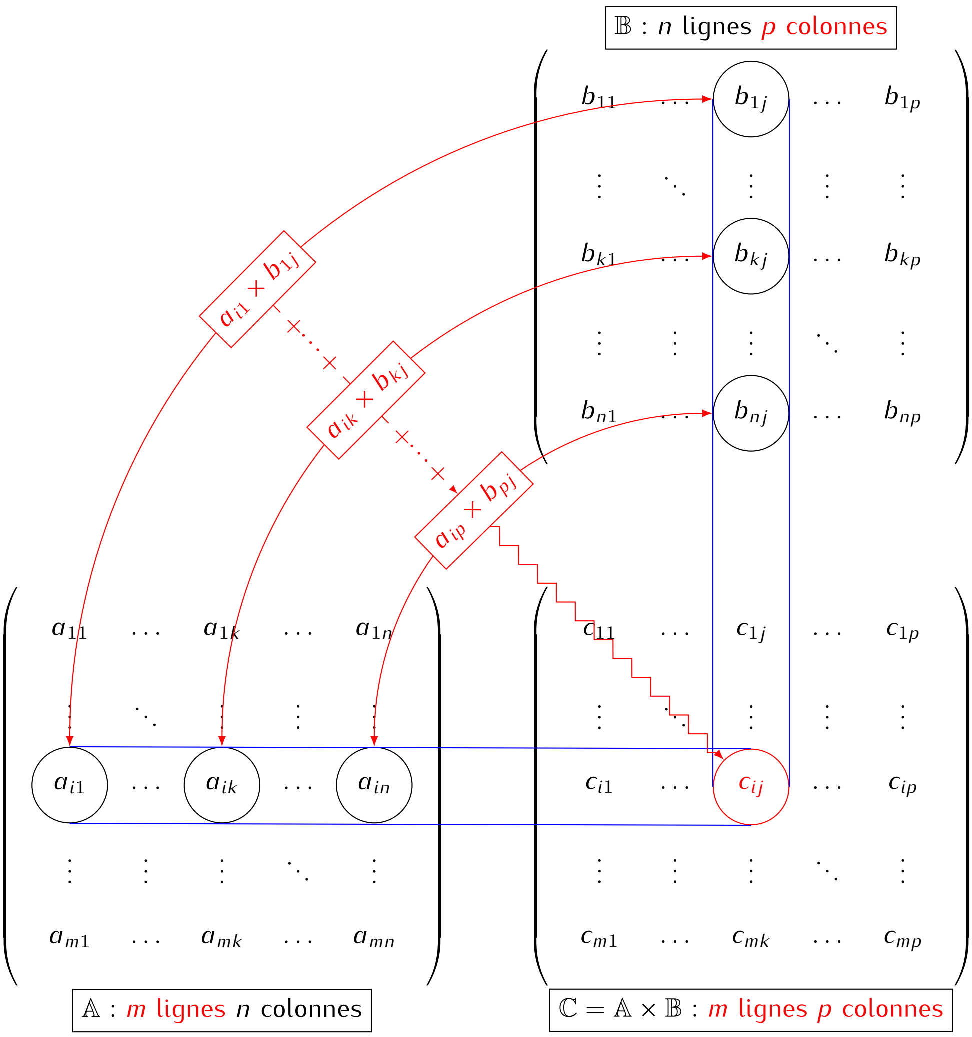
Exemple

Soient les deux matrices

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}1&3&0\\-1&1&2\end{pmatrix}\qquad\text{et}\qquad\mathbb{B}=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&3\\0&-1&-2\end{pmatrix}$$

La matrice $\mathbb{A}$ est d'ordre 2×3, la matrice $\mathbb{B}$ est d'ordre 3×3, donc la matrice produit $\mathbb{A}\times\mathbb{B}$ est une matrice d'ordre 2×3 :

$$\mathbb{A}\times\mathbb{B}=\begin{pmatrix}1\times1+3\times0+0\times0&1\times2+3\times2+0\times(-1)&1\times0+3\times3+0\times(-2)\\-1\times1+1\times0+2\times0&-1\times2+1\times2+2\times(-1)&-1\times0+1\times3+2\times(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&8&9\\-1&-2&-1\end{pmatrix}.$$



Propriété

Si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{C} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, alors

▷ $\mathbb{A} \times (\mathbb{B} \times \mathbb{C}) = (\mathbb{A} \times \mathbb{B}) \times \mathbb{C}$ (associativité) ;

▷ $\mathbb{A}(\times(\mathbb{B} + \mathbb{C}) = \mathbb{A} \times \mathbb{B} + \mathbb{A} \times \mathbb{C}$ (distributivité) ;

Si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\mathbb{A} \times \mathbb{I}_n = \mathbb{I}_n \times \mathbb{A} = \mathbb{A}$.

Attention

$\mathbb{A} \times \mathbb{B} \neq \mathbb{B} \times \mathbb{A}$ en général (non commutativité).

Prenons le cas général avec $\mathbb{A}$ d'ordre $m \times p$ et $\mathbb{B}$ d'ordre $p \times n$. Le produit $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ est défini, c'est une matrice d'ordre $m \times n$. Qu'en est-il du produit $\mathbb{B} \times \mathbb{A}$? Il faut distinguer trois cas :

▷ si $m \neq n$ le produit $\mathbb{B} \times \mathbb{A}$ n'est pas défini ;

▷ si $m = n$ mais $p \neq n$, le produit $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ est défini et c'est une matrice d'ordre $m \times n$ tandis que le produit $\mathbb{B} \times \mathbb{A}$ est défini mais c'est une matrice d'ordre $p \times p$ donc $\mathbb{A} \times \mathbb{B} \neq \mathbb{B} \times \mathbb{A}$;

▷ si $m = n = p$, $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont deux matrices carrées d'ordre m. Les produits $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ et $\mathbb{B} \times \mathbb{A}$ sont aussi carrés et d'ordre m mais là encore, en général, $\mathbb{A} \times \mathbb{B} \neq \mathbb{B} \times \mathbb{A}$;

Exemple

Soient les matrices

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 18 & -15 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{B} \times \mathbb{A} = \begin{pmatrix} -9 & -6 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Définition *Matrice transposée*

Si $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$ est une matrice $m \times n$, on définit la matrice TRANSPOSÉE de $\mathbb{A}$, notée $\mathbb{A}^T$, par $\mathbb{A} = (a_{ji})_{\substack{1\leq j\leq n \\ 1\leq i\leq m}}$.
C'est donc une matrice $n \times m$ obtenue en échangeant lignes et colonnes de la matrice initiale.

Exemple

Soit la matrice $\mathbb{A}$ d'ordre 2×3 suivante

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Sa transposée est la matrice $\mathbb{A}^T$ d'ordre 3×2 suivante

$$\mathbb{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Propriété

▷ $(\mathbb{A}^T)^T = \mathbb{A}$ si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$,
▷ $(\alpha\mathbb{A})^T = \alpha\mathbb{A}^T$ si $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$,
▷ $(\mathbb{A} + \mathbb{B})^T = \mathbb{A}^T + \mathbb{B}^T$ si $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$,
▷ $(\mathbb{A} \times \mathbb{B})^T = \mathbb{B}^T \times \mathbb{A}^T$ si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Définition *Matrice symétrique, matrice anti-symétrique*

▷ Une matrice $\mathbb{A}$ est dite SYMÉTRIQUE si $\mathbb{A}^T = \mathbb{A}$, *i.e.* si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout $i \neq j$.
▷ Une matrice $\mathbb{A}$ est dite ANTI-SYMÉTRIQUE si $\mathbb{A}^T = -\mathbb{A}$, *i.e.* si $a_{ij} = -a_{ji}$ pour tout $i \neq j$.

Exemple

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -9 \\ 5 & 4 & 0 \\ -9 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$ est une matrice symétrique.

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -9 \\ -5 & 4 & 0 \\ 9 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$ est une matrice anti-symétrique.

Définition *Matrice inversible, matrice singulière*

Une matrice carrée $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite INVERSIBLE ou régulière si elle est symétrisable pour le produit matriciel, autrement dit s'il existe une matrice $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \mathbb{B} \times \mathbb{A} = \mathbb{I}_n$. Une matrice non régulière est dite SINGULIÈRE.
L'inverse, s'il existe, d'une matrice $\mathbb{A}$ est noté $\mathbb{A}^{-1}$.

Proposition

Soit $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux matrices inversibles, alors
▷ $\mathbb{A}^{-1}$ l'est aussi et $\left(\mathbb{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbb{A}$,
▷ $\mathbb{A}^T$ l'est aussi et $\left(\mathbb{A}^T\right)^{-1} = \left(\mathbb{A}^{-1}\right)^T$,
▷ $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ l'est aussi et $(\mathbb{A} \times \mathbb{B})^{-1} = \mathbb{B}^{-1} \times \mathbb{A}^{-1}$.

Définition *Trace*

Si $\mathbb{A}$ est une matrice carrée d'ordre n, on définit la TRACE de $\mathbb{A}$ comme la somme des éléments de la diagonale principale :

$$\text{tr}(\mathbb{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Exemple

La trace de la matrice $\mathbb{A}$ suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

est $\operatorname{tr}(\mathbb{A}) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 1 + 2 + (-2) = 1$.

Propriété

Si $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont deux matrices carrées d'ordre n, alors
▷ $\operatorname{tr}(\mathbb{A}^T) = \operatorname{tr}(\mathbb{A})$,
▷ $\operatorname{tr}(\mathbb{A} + \mathbb{B}) = \operatorname{tr}(\mathbb{A}) + \operatorname{tr}(\mathbb{B})$.
Si $\mathbb{A}$ est une matrice $m \times n$ et $\mathbb{B}$ une matrice $n \times m$, alors
▷ $\operatorname{tr}(\mathbb{A} \times \mathbb{B}) = \operatorname{tr}(\mathbb{B} \times \mathbb{A})$.

Calcul pratique d'un déterminant

Définition *Déterminant d'une matrice d'ordre n*

Soit $\mathbb{A}$ une matrice carrée d'ordre n.
Étant donné un couple (i, j) d'entiers, $1 \le i, j \le n$, on note $\mathbb{A}_{ij}$ la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de $\mathbb{A}$.
Le DÉTERMINANT de $\mathbb{A}$, noté $\det(\mathbb{A})$ ou $|\mathbb{A}|$, est défini par récurrence sur l'ordre de la matrice $\mathbb{A}$:
▷ si $n = 1$: le déterminant de $\mathbb{A}$ est le nombre

$$\det(\mathbb{A}) = a_{11},$$

▷ si $n > 1$: le déterminant de $\mathbb{A}$ est le nombre

$$\det(\mathbb{A}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbb{A}_{ij}) \qquad \text{quelque soit la ligne } i,\ 1 \le i \le n,$$

ou, de manière équivalente, le nombre

$$\det(\mathbb{A}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbb{A}_{ij}) \qquad \text{quelque soit la colonne } j,\ 1 \le j \le n.$$

Astuce

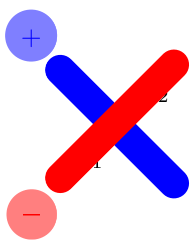
Pour se souvenir des signes de ces deux formules, on peut remarquer que la distribution des signes $+$ et $-$ avec la formule $(-1)^{i+j}$ est analogue à la distribution des cases noirs et blanches sur un damier :

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Exemple

Soit $\mathbb{A}$ une matrice carrée d'ordre $n = 2$.

$$\det(\mathbb{A}) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$



Exemple

Soit la matrice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

alors

$$\det(\mathbb{A}_{11}) = \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32},$$
$$\det(\mathbb{A}_{12}) = \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31},$$
$$\det(\mathbb{A}_{13}) = \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31},$$
$$\det(\mathbb{A}_{21}) = \det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32},$$
$$\det(\mathbb{A}_{22}) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31},$$
$$\det(\mathbb{A}_{23}) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31},$$
$$\det(\mathbb{A}_{31}) = \det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22},$$
$$\det(\mathbb{A}_{32}) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix} = a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21},$$
$$\det(\mathbb{A}_{33}) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

donc on peut calculer $\det(\mathbb{A})$ *par l'une des formules suivantes* :

- ▷ $a_{11}\det(\mathbb{A}_{11}) - a_{12}\det(\mathbb{A}_{12}) + a_{13}\det(\mathbb{A}_{13})$ (développement suivant la ligne $i = 1$)
- ▷ $-a_{21}\det(\mathbb{A}_{21}) + a_{22}\det(\mathbb{A}_{22}) - a_{23}\det(\mathbb{A}_{23})$ (développement suivant la ligne $i = 2$)
- ▷ $a_{31}\det(\mathbb{A}_{31}) - a_{32}\det(\mathbb{A}_{32}) + a_{33}\det(\mathbb{A}_{33})$ (développement suivant la ligne $i = 3$)
- ▷ $-a_{11}\det(\mathbb{A}_{11}) + a_{21}\det(\mathbb{A}_{21}) - a_{31}\det(\mathbb{A}_{31})$ (développement suivant la colonne $j = 1$)
- ▷ $a_{12}\det(\mathbb{A}_{12}) - a_{22}\det(\mathbb{A}_{22}) + a_{32}\det(\mathbb{A}_{32})$ (développement suivant la colonne $j = 2$)
- ▷ $-a_{13}\det(\mathbb{A}_{13}) + a_{23}\det(\mathbb{A}_{23}) - a_{33}\det(\mathbb{A}_{33})$ (développement suivant la colonne $j = 3$)

Quelques calculs montrent que ces formules donnent bien le même résultat.

Astuce

Il convient d'utiliser cette définition après avoir fait apparaître sur une même rangée le plus possible de zéro sachant que

- ▷ si deux colonnes (resp. deux lignes) sont identiques ou proportionnelles, alors $\det(\mathbb{A}) = 0$;
- ▷ si on échange deux colonnes (resp. deux lignes), alors le déterminant est changé en son opposé ;
- ▷ on ne change pas un déterminant si on ajoute à une colonne (resp. une ligne) une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes), *i.e.*

  $$C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j, \qquad\qquad L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j,$$

  avec $j \neq i$ et $\alpha \neq 0$.

Exemple

Soit la matrice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

alors

$$\det(\mathbb{A}_{11}) = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = 10, \qquad \det(\mathbb{A}_{12}) = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 0, \qquad \det(\mathbb{A}_{13}) = \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 0,$$
$$\det(\mathbb{A}_{21}) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = -3, \qquad \det(\mathbb{A}_{22}) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 5, \qquad \det(\mathbb{A}_{23}) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3,$$
$$\det(\mathbb{A}_{31}) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -2, \qquad \det(\mathbb{A}_{32}) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \qquad \det(\mathbb{A}_{33}) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2,$$

donc on peut calculer $\det(\mathbb{A})$ par l'une des formules suivantes :
- $1\det(\mathbb{A}_{11}) + 0\det(\mathbb{A}_{12}) + 1\det(\mathbb{A}_{13}) = 10+0+0 = 10$
- $0\det(\mathbb{A}_{21}) + 2\det(\mathbb{A}_{22}) + 0\det(\mathbb{A}_{23}) = 0+2\times 5+0 = 10$ ←-- formule pratique car il n'y a qu'un déterminant à calculer
- $0\det(\mathbb{A}_{31}) + 3\det(\mathbb{A}_{32}) + 5\det(\mathbb{A}_{33}) = 0+0+5\times 2 = 10$
- $1\det(\mathbb{A}_{11}) + 0\det(\mathbb{A}_{21}) + 0\det(\mathbb{A}_{31}) = 10+0+0 = 10$ ←-- formule pratique car il n'y a qu'un déterminant à calculer
- $0\det(\mathbb{A}_{12}) + 2\det(\mathbb{A}_{22}) + 3\det(\mathbb{A}_{32}) = 0+2\times 5+0 = 10$
- $1\det(\mathbb{A}_{13}) + 0\det(\mathbb{A}_{23}) + 5\det(\mathbb{A}_{33}) = 0+0+5\times 2 = 10$

Propriété

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments diagonaux.

Théorème

$\mathbb{A}$ est inversible si et seulement si $\det(\mathbb{A}) \neq 0$.

Propriété

- $\det(\mathbb{A}^T) = \det(\mathbb{A})$,
- $\det(\mathbb{A}^{-1}) = \dfrac{1}{\det(\mathbb{A})}$,
- $\det(\mathbb{A}\times\mathbb{B}) = \det(\mathbb{A})\cdot\det(\mathbb{B})$.

Définition *Rang*

Le RANG d'une matrice quelconque $\mathbb{A}$ est égal au plus grand entier s tel que l'on puisse extraire de $\mathbb{A}$ une matrice carrée d'ordre s inversible, c'est-à-dire de déterminant non nul. Les opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice ne modifient pas le rang.

Exemple

Soit $\mathbb{A}$ la matrice suivante

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le rang de $\mathbb{A}$ est 2 car
- $\mathbb{A}$ est d'ordre 2×3 donc $s \le \min\{2,3\}$ donc $s = 0$, 1 ou 2 ;
- comme le déterminant de la sous-matrice composée de la première et de la deuxième colonne est nul, on ne peut pas conclure ;
- comme le déterminant de la sous-matrice composée de la première et de la troisième colonne est non nul, alors $s = 2$.

Exemple

Soit $\mathbb{A}$ la matrice suivante

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- $\mathbb{A}$ est d'ordre 3×3 donc $s \le 3$
- le déterminant de $\mathbb{A}$ est 0 donc $s \neq 3$
- le déterminant de la sous-matrice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{smallmatrix}\right)$ est 5, donc $s = 2$.

Définition *Cofacteur*

Soit $\mathbb{A}$ une matrice carrée d'ordre n. Étant donné un couple (i,j) d'entiers, $1 \le i,j \le n$, on note $\mathbb{A}_{ij}$ la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de $\mathbb{A}$. On appelle COFACTEUR de l'élément a_{ij} le nombre $(-1)^{i+j}\det(\mathbb{A}_{ij})$.

Exemple

Soit $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors la matrice des cofacteurs de $\mathbb{A}$ est la matrice $\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Calcul de $\mathbb{A}^{-1}$

$\mathbb{A}$ étant inversible, pour obtenir $\mathbb{A}^{-1}$ il suffit de résoudre le système $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ qui admet pour solution $\mathbf{x} = \mathbb{A}^{-1}\mathbf{b}$.

1. On calcul la matrice des cofacteurs des éléments de $\mathbb{A}$, appelée comatrice de $\mathbb{A}$;
2. on transpose la comatrice de $\mathbb{A}$;
3. on divise par $\det(\mathbb{A})$.

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbb{A})}\left((-1)^{i+j}\det(\mathbb{A}_{ij})\right)^T$$

Exemple

Soit $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $\det(\mathbb{A}) = ad - bc \neq 0$.
on a déjà calculé le déterminant de cette matrice ainsi que la matrice des cofacteurs, il suffit alors de calculer la transposée et on obtient

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Exemple

Calculer l'inverse de la matrice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. On calcule la matrice des cofacteurs des éléments de $\mathbb{A}$, appelée comatrice de $\mathbb{A}$:

$$\text{comatrice} = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

2. on transpose la comatrice de $\mathbb{A}$:

$$\text{comatrice}^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

3. on divise par $\det(\mathbb{A})$:

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

2
Systèmes Linéaires

Définition *Système linéaire*

Soit $n, p, \geq 1$ des entiers. Un SYSTÈME LINÉAIRE $n \times p$ est un ensemble de n équations linéaires à p inconnues de la forme

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1, \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n. \end{cases}$$

- ▷ Les COEFFICIENTS a_{ij} et les SECONDES MEMBRES b_i sont des éléments donnés de $\mathbb{K}$. Les INCONNUES $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont à chercher dans $\mathbb{K}$.
- ▷ Le SYSTÈME HOMOGÈNE associé à (S) est le système obtenu en remplaçant les b_i par 0.
- ▷ Une SOLUTION de (S) est un p-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ qui vérifie simultanément les n équations de (S). Résoudre (S) signifie chercher toutes les solutions.
- ▷ Un système est IMPOSSIBLE, ou incompatible, s'il n'admet pas de solution. Un système est POSSIBLE, ou compatible, s'il admet une ou plusieurs solutions.
- ▷ Deux systèmes sont ÉQUIVALENTS s'ils admettent les mêmes solutions.

Écriture matricielle

Si on note

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

le système (S) est équivalent à l'écriture matricielle $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Méthodes de résolution

Définition *Système de Cramer*

Un SYSTÈME est dit DE CRAMER s'il a une solution, et une seule.

Propriété

Considérons un système carré d'ordre n à coefficients réels. Le système est de Cramer si une des conditions équivalentes suivantes est remplie :

1. $\mathbb{A}$ est inversible ;
2. $\mathrm{rg}(\mathbb{A}) = n$;
3. le système homogène $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ admet seulement la solution nulle.

Méthode de CRAMER

La solution d'un système de CRAMER d'écriture matricielle $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est donnée par

$$x_j = \frac{\det(\mathbb{A}_j)}{\det(\mathbb{A})}, \qquad 1 \leq j \leq n$$

où $\mathbb{A}_j$ est la matrice obtenue à partir de $\mathbb{A}$ en remplaçant la j-ème colonne par la colonne des seconds membres $\mathbf{b}$.

Cette formule est cependant d'une utilité pratique limitée à cause du calcul des déterminants qui est très couteux.

Exemple *Système d'ordre* 2

On veut résoudre le système linéaire

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

par la méthode de Cramer. On a

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad \det(\mathbb{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\mathbb{A}_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad \det(\mathbb{A}_1) = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$

$$\mathbb{A}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}, \qquad \det(\mathbb{A}_2) = a_{11}b_2 - b_1a_{21},$$

donc

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Exemple

On veut résoudre le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

par la méthode de Cramer. On a

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \det(\mathbb{A}) = 2,$$

$$\mathbb{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \det(\mathbb{A}_1) = -6,$$

$$\mathbb{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \det(\mathbb{A}_2) = 10,$$

$$\mathbb{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det(\mathbb{A}_3) = 10,$$

donc

$$x = \frac{-6}{2} = -3, \qquad y = \frac{10}{2} = 5, \qquad z = \frac{10}{2} = 5.$$

Définition *Système échelonné*

Un système (S) est EN ESCALIER, ou ÉCHELONNÉ, si le nombre de premiers coefficients nuls successifs de chaque équation est strictement croissant.

Autrement dit, un système est échelonné si les coefficients non nuls des équations se présentent avec une sorte d'escalier à marches de longueurs variables marquant la séparation entre une zone composée uniquement de zéros et une zone où les lignes situées à droite de l'escalier commencent par des termes non nuls, comme dans l'exemple suivant de 5 équations à 6 inconnues :

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} 5x_1 & -x_2 & -x_3 & +2x_4 & & +x_6 & = & b_1 \\ & & 3x_3 & -x_4 & +2x_5 & & = & b_2 \\ & & & & -x_5 & +x_6 & = & b_3 \\ & & & & & 5x_6 & = & b_4 \\ & & & & & 0 & = & b_5 \end{array}\right.$$

Réduction

Quand un système contient une équation du type

$$0x_1 + \cdots + 0x_p = b,$$

B si $b \neq 0$ le système est impossible,
B si $b = 0$, on peut supprimer cette équation, ce qui conduit à un système équivalent à (S) dit SYSTÈME RÉDUIT.

Définition *Matrice augmentée*

Si on ajoute le vecteur-colonne des seconds membres $\mathbf{b}$ à la matrice des coefficients $\mathbb{A}$, on obtient ce qu'on appelle la matrice augmentée que l'on note $[\mathbb{A}|\mathbf{b}]$.

Méthode du pivot de Gauss

Soit $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ la matrice des coefficients du système (S) et $[\mathbb{A}|\mathbf{b}]$ la matrice augmentée.

Étape j : en permutant éventuellement deux lignes de la matrice augmentée, on peut supposer $a_{jj} \neq 0$ (appelé pivot de l'étape j). On transforme toutes les lignes L_i avec $i > j$

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{ij}}{a_{jj}} L_j$$

ainsi on élimine l'inconnue x_j dans chaque lignes L_i.
En réitérant le procédé pour i de 1 à n, on aboutit à un système échelonné.

Exemple

Soit le système linéaire

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$$

1. Résolution par la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=1\\ 2x_1+3x_2+4x_3+x_4=2\\ 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3\\ 4x_1+x_2+2x_3+3x_4=4 \end{cases} \xrightarrow[\substack{L_3\leftarrow L_3-3L_1\\ L_4\leftarrow L_4-4L_1}]{L_2\leftarrow L_2-2L_1} \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=1\\ -x_2-2x_3-7x_4=0\\ -2x_2-8x_3-10x_4=0\\ -7x_2-10x_3-13x_4=0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[L_4\leftarrow L_4-7L_2]{L_3\leftarrow L_3-2L_2} \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=1\\ -x_2-2x_3-7x_4=0\\ -4x_3+4x_4=0\\ 4x_3+36x_4=0 \end{cases} \xrightarrow{L_4\leftarrow L_4+L_3} \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=1\\ -x_2-2x_3-7x_4=0\\ -4x_3+4x_4=0\\ 40x_4=0 \end{cases}$$

donc

$$x_4=0,\quad x_3=0,\quad x_2=0,\quad x_1=1.$$

2. Résolution par la méthode du pivot de Gauss en écriture matricielle :

$$[\mathbb{A}|\mathbf{b}]=\left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&3&4&1\\ 2&3&4&1&2\\ 3&4&1&2&3\\ 4&1&2&3&4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_3\leftarrow L_3-3L_1\\ L_4\leftarrow L_4-4L_1}]{L_2\leftarrow L_2-2L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&3&4&1\\ 0&-1&-2&-7&0\\ 0&-2&-8&-10&0\\ 0&-7&-10&-13&0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_4\leftarrow L_4-7L_2]{L_3\leftarrow L_3-2L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&3&4&1\\ 0&-1&-2&-7&0\\ 0&0&-4&4&0\\ 0&0&4&36&0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_4\leftarrow L_4+L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&3&4&1\\ 0&-1&-2&-7&0\\ 0&0&-4&4&0\\ 0&0&0&40&0 \end{array}\right)$$

donc

$$x_4=0,\quad x_3=0,\quad x_2=0,\quad x_1=1.$$

3
Espaces Vectoriels

Espaces vectoriels, Sous-espaces vectoriels

Définition *Espace vectoriel*

Un ESPACE VECTORIEL sur $\mathbb{K}$ est un ensemble E contenant au moins un élément, noté $\mathbf{0}_E$, ou simplement $\mathbf{0}$, muni d'une addition

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}\in E \qquad \text{pour tout } \mathbf{u},\mathbf{v}\in E$$

et d'une multiplication par les scalaires

$$\alpha\cdot\mathbf{u}\in E \qquad \text{pour tout } \mathbf{u}\in E \text{ et pour tout } \alpha\in\mathbb{K}$$

avec les propriétés suivantes : pour tout $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}\in E$ et pour tout α, $\beta\in\mathbb{K}$,

① $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$ (associativité)

② $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$ (commutativité)

③ $\mathbf{u}+\mathbf{0}_E=\mathbf{0}_E+\mathbf{u}=\mathbf{u}$ (existence d'un élément neutre pour l'addition)

④ $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=(-\mathbf{u})+\mathbf{u}=\mathbf{0}_E$ en notant $-\mathbf{u}=(-1_{\mathbb{K}})\cdot\mathbf{u}$ (existence d'un élément opposé)

⑤ $(\alpha+\beta)\cdot\mathbf{u}=\alpha\cdot\mathbf{u}+\beta\cdot\mathbf{u}$ (compatibilité avec la somme des scalaires)

⑥ $\alpha\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\alpha\cdot\mathbf{u}+\alpha\cdot\mathbf{v}$ (compatibilité avec la somme des vecteurs)

⑦ $\alpha\cdot(\beta\cdot\mathbf{u})=(\alpha\beta)\cdot\mathbf{u}$ (compatibilité avec le produit des scalaires)

⑧ $1_{\mathbb{K}}\cdot\mathbf{u}=\mathbf{u}$ (compatibilité avec l'unité)

Les éléments de E sont appelés VECTEURS, l'élément neutre de l'addition $\mathbf{0}_E$ est appelé VECTEUR NUL, le symétrique d'un vecteur $\mathbf{u}$ pour l'addition est appelé VECTEUR OPPOSÉ DE $\mathbf{u}$ et est noté $-\mathbf{u}$.
Nous travaillerons avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$

Exemple

L'ensemble $\mathbb{R}^2=\{\,(x,y)\mid x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}\,\}$ est un espace vectoriel pour les opérations
▷ somme : $(x,y)+(z,w)=(x+z,y+w)$
▷ multiplication : $\alpha\cdot(x,y)=(\alpha x,\alpha y)$.

Définition *Sous-espace vectoriel*

Soit E un espace vectoriel. On dit que F est un SOUS-ESPACE VECTORIEL de E si et seulement si F est un espace vectoriel et $F\subset E$.

Exemple

- ▷ L'ensemble $\{\,\mathbf{0}_E\,\}$ constitué de l'unique élément nul est un sous-espace vectoriel de E, à ne pas confondre avec l'ensemble vide $\emptyset$ qui n'est pas un sous-espace vectoriel de E (il ne contient pas le vecteur nul).
- ▷ L'ensemble E est un sous-espace vectoriel de E.

Pour montrer qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E on utilise le théorème suivant.

Théorème

F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

1. $F \subset E$
2. $\mathbf{0}_E \in F$
3. $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in F \implies \mathbf{u}+\mathbf{v} \in F$
4. $\mathbf{u} \in F, \alpha \in \mathbb{K} \implies \alpha \cdot \mathbf{u} \in F$

Exemple

L'ensemble

$$F = \{\, \mathbb{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr}(\mathbb{A}) = \mathbb{O}_2 \,\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a+d=0 \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de l'ensemble $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En effet :

1. $F \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$;
2. $\mathbf{0}_E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in F$ car $0+0=0$;
3. si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ appartiennent à F (c'est-à-dire $a+d=0$ et $e+h=0$), alors $M+N = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$ appartient à F car $(a+e)+(d+h) = (a+d)+(e+h) = 0+0 = 0$;
4. si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartient à F (c'est-à-dire $a+d=0$) et si $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $\alpha \cdot M = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$ appartient à F car $\alpha a + \alpha d = \alpha(a+d) = 0$.

Exemple

L'ensemble

$$F = \{\, \mathbb{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \det(\mathbb{A}) = 0 \,\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, ad=bc \right\}$$

n'est pas un sous-espace vectoriel de l'ensemble $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En effet la somme de deux éléments de F peut ne pas appartenir à F, par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple

On note $\operatorname{Fonct}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et on considère les sous-ensembles suivants de $\operatorname{Fonct}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

① $F = \{\, f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ est paire} \,\}$;
② $F = \{\, f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ est impaire} \,\}$;
③ $F = \{\, f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(-x) = f(x)+2 \,\}$;
④ $F = \{\, f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) \geq 0 \,\}$;
⑤ $F = \{\, f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = 0 \,\}$;
⑥ $F = \{\, f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = 1 \,\}$;
⑦ $F = \{\, f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(1) = 0 \,\}$.

On cherche lesquels forment des sous-espaces vectoriels :

① F est un sous-espace vectoriel de $\operatorname{Fonct}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ car
  1. $x \mapsto 0 \in F$,
  2. $f, g \in F \implies f+g \in F$ car $(f+g)(-x) = f(-x)+g(-x) = f(x)+g(x) = (f+g)(x)$,
  3. $f \in F, \alpha \in \mathbb{R} \implies \alpha \cdot f \in F$ car $(\alpha \cdot f)(-x) = \alpha f(-x) = \alpha f(x) = (\alpha \cdot f)(x)$;

② F est un sous-espace vectoriel de $\operatorname{Fonct}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ car
  1. $x \mapsto 0 \in F$,
  2. $f, g \in F \implies f+g \in F$ car $(f+g)(-x) = f(-x)+g(-x) = -f(x)-g(x) = -(f+g)(x)$,

3. $f \in F$, $\alpha \in \mathbb{R} \implies \alpha \cdot f \in F$ car $(\alpha \cdot f)(-x) = \alpha f(-x) = -\alpha f(x) = -(\alpha \cdot f)(x)$;

③ F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\text{Fonct}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car il ne contient pas la fonction nulle $x \mapsto 0$;

④ F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\text{Fonct}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car l'opposé de la fonction $f\colon x \mapsto 1$, qui est un élément de F, est la fonction $f\colon x \mapsto -1$, qui n'est pas un élément de F ;

⑤ F est un sous-espace vectoriel de $\text{Fonct}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car

1. $x \mapsto 0 \in F$,
2. $f, g \in F \implies f + g \in F$ car $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \equiv 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,
3. $f \in F$, $\alpha \in \mathbb{R} \implies \alpha \cdot f \in F$ car $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x) \equiv 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;

⑥ F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\text{Fonct}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car il ne contient pas la fonction nulle $x \mapsto 0$;

⑦ $F = \{\, f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(1) = 0 \,\}$; F est un sous-espace vectoriel de $\text{Fonct}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car

1. $x \mapsto 0 \in F$,
2. $f, g \in F \implies f + g \in F$ car $(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 0$,
3. $f \in F$, $\alpha \in \mathbb{R} \implies \alpha \cdot f \in F$ car $(\alpha \cdot f)(1) = \alpha f(1) = 0$.

Combinaisons linéaires, espace engendré

Définition *Combinaison linéaire*

Soient $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p$ des éléments de l'espace vectoriel E et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ des éléments de $\mathbb{K}$. Le vecteur

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot \mathbf{u}_i$$

est appelé COMBINAISON LINÉAIRE des vecteurs $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p$.

Exemple

Considérons les trois vecteurs

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Montrons que $\mathbf{u}_3$ est combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$.

Pour prouver qu'un vecteur $\mathbf{v}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p$ il faut montrer qu'il existe p constantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ telles que

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_p \mathbf{u}_p.$$

On cherche alors a et b réels tels que

$$\mathbf{u}_3 = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2,$$

ce qui donne

$$\begin{cases} -1 = -a, \\ 0 = -2a + 2b, \\ -4 = -3a - b, \end{cases} \qquad \iff \qquad a = b = 1.$$

Par conséquent $\mathbf{u}_3$ est combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ car $\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$.

Définition *Espace engendré*

Soient $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p$ des éléments de l'espace vectoriel E. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de ces p vecteurs fixés est un sous-espace vectoriel de E appelé SOUS-ESPACE VECTORIEL ENGENDRÉ par $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p$ et noté $\text{Vect}\,\{\, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p \,\}$:

$$\text{Vect}\,\{\, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p \,\} = \left\{ \mathbf{u} \in E \;\middle|\; \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p, \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot \mathbf{u}_i \right\}.$$

Notons que les vecteurs $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p$ *appartiennent à* $\mathrm{Vect}\left\{\, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p \,\right\}$ *car pour tout* $j = 1, 2, \dots, p$

$$\mathbf{u}_j = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{p} 0 \cdot \mathbf{u}_i + 1 \cdot u_j.$$

Bien sûr le vecteur $\mathbf{0}_E$ *appartient à* $\mathrm{Vect}\left\{\, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p \,\right\}$ *car*

$$\mathbf{0}_E = \sum_{i=1}^{p} 0 \cdot \mathbf{u}_i.$$

Exemple

▷ $\mathrm{Vect}\left\{\, \mathbf{0}_E \,\right\} = \left\{\, \mathbf{0}_E \,\right\}$

▷ $\mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \right\} = \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b\\ b & a\end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}.$

Familles libres, génératrices, bases

Définition *Famille libre, famille génératrice, base*

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel et $\mathcal{F} = \left\{\, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p \,\right\}$ une famille de vecteurs de E. On dit que la famille $\mathcal{F}$ est...

... GÉNÉRATRICE DE E si et seulement si tout vecteur de E est combinaison linéaire des éléments de F :

$$\text{pour tout } \mathbf{u} \in E \text{ il existe } (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p \text{ tel que } \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot \mathbf{u}_i;$$

... LIBRE si et seulement si le vecteur nul $\mathbf{0}_E$ est combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{F}$ de façon unique :

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_E \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_i = 0 \ \forall i$$

... BASE DE E si et seulement si tout vecteur de E est combinaison linéaire des éléments de F de façon unique :

$$\text{pour tout } \mathbf{u} \in E \text{ il existe unique } (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p \text{ tel que } \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot \mathbf{u}_i;$$

Les réels $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont alors les coordonnées du vecteur $\mathbf{u}$ dans la base $\mathcal{F}$, on écrit $\mathrm{coord}(\mathbf{u}, \mathcal{F}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ et on dit que E est de DIMENSION p FINIE.

Exemple

La famille $\left\{\, \mathbf{u} = (1, 0), \mathbf{v} = (0, 1), \mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \,\right\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ n'est pas libre : par exemple le vecteur $(2, -1)$ peut s'écrire comme $2\mathbf{u} - \mathbf{v}$, comme $2\mathbf{w} - 3\mathbf{v}$ etc.

Exemple

Considérons les trois vecteurs

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 3\\ 1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ -1\\ 1\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 2\end{pmatrix}.$$

Pour montrer qu'ils sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^4$, il faut montrer que le vecteur $(0, 0, 0, 0)$ ne peut s'écrire que d'une seule façon comme combinaison linéaire de $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$. Supposons que

$$\mathbf{0} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \alpha_3\mathbf{u}_3,$$

ce qui revient au système linéaire

$$\begin{cases} 0 = 3a,\\ 0 = a,\\ 0 = 2a - b,\\ 0 = b + 2c \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = b = c = 0.$$

Par conséquent la famille $\left\{\, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \,\right\}$ est libre dans $\mathbb{R}^4$.

Théorème *et définition*

Dans un espace vectoriel E de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre d'éléments. Ce nombre, noté $\dim(E)$, est appelé la DIMENSION de E.

Théorème

Dans un espace vectoriel E de dimension n, une famille génératrice a au moins n éléments. Si elle a plus de n éléments, on peut en extraire une sous-famille libre de cardinal n qui est alors une base de E. Si elle a exactement n éléments, c'est une base de E.

Théorème *de la base incomplète*

Dans un espace vectoriel E de dimension n, une famille libre a au plus n éléments. Si elle a moins de n éléments, on peut la compléter de façon à obtenir une base. Si elle a exactement n éléments, c'est une base de E.

Théorème *de la dimension*

Soit $\mathcal{F}$ une famille d'éléments de E de dimension finie n. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

❶ $\mathcal{F}$ est une base de E

❷ $\mathcal{F}$ est libre et de cardinal n

❸ $\mathcal{F}$ est génératrice de E et de cardinal n

❹ $\mathcal{F}$ est libre et génératrice de E

Attention

On utilise ce théorème principalement pour montrer qu'une famille $\mathcal{F}$ est une base de E. On utilisera surtout les implications suivantes (avec E de dimension n) :

▷ si $\mathcal{F}$ est libre et de cardinal n alors $\mathcal{F}$ est une base de E

▷ si $\mathcal{F}$ est libre et génératrice de E alors $\mathcal{F}$ est une base de E

Exemple

Avec $n \in \mathbb{N}$, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est de dimension n. La famille $\mathcal{B} = \{\,(1,0,\dots,0);(0,1,\dots,0);\dots;(0,0,\dots,1)\,\}$ est une base, appelée BASE CANONIQUE de $\mathbb{R}^n$, car pour tout vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} = (u_1,u_2,\dots,u_n) = u_1\cdot(1,0,\dots,0) + u_2\cdot(0,1,\dots,0) + \dots + u_n\cdot(0,0,\dots,1)$ de façon unique.

Exemple

On a déjà vu que $\mathcal{A} = \{\,(1,0),(0,1)\,\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et que par conséquent $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2. Soit $\mathcal{B} = \{\,(2,-1),(1,2)\,\}$. Pour prouver que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ on va prouver qu'elle est une famille libre de cardinal 2 :

▷ $\mathcal{B}$ est une famille libre car

$$\alpha_1\cdot(2,-1) + \alpha_2\cdot(1,2) = (0,0) \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = 0,$$

▷ $\text{cardinal}(\mathcal{B}) = 2$.

Attention *Dimension ≠ cardinal*

Attention à ne pas confondre DIMENSION et CARDINAL : dans un espace vectoriel de dimension n, toutes les bases ont le même cardinal, mais il ne faut pas parler de cardinal d'un espace vectoriel, ni de dimension d'une base.

Exemple

Avec $n \in \mathbb{N}$, l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[x]$ des polynômes de degré $\le n$ est de dimension $n+1$. La base $\mathcal{C} = \{\,1,x,x^2,\dots,x^n\,\}$ est appelée BASE CANONIQUE de $\mathbb{R}_n[x]$ car, pour tout polynôme $p \in \mathbb{R}_n[x]$, $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ de façon unique.

Exemple

Avec $n,m \in \mathbb{N}^*$, l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ des matrices $n\times m$ est un espace vectoriel de dimension nm. L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices $n\times n$ est un espace vectoriel de dimension n^2. La base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \right\}.$$

Définition *Vecteurs linéairement indépendants*

Quand une famille est libre, on dit que les vecteurs qui la composent sont LINÉAIREMENT INDÉPENDANTS. Une FAMILLE LIÉE est une famille non libre.

Exemple

- ▷ $\{\mathbf{u}\}$ est une famille libre si et seulement si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}_E$.
- ▷ L'espace vectoriel $\{\mathbf{0}_E\}$ n'as pas de base, il est de dimension 0.
- ▷ Soit E un espace vectoriel de dimension n. Le seul sous-espace vectoriel de E de dimension 0 est $\{\mathbf{0}_E\}$, le seul sous-espace vectoriel de E de dimension n est E.

Définition *Vecteurs colinéaires*

Deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ de E sont dits colinéaires si et seulement si $\mathbf{u} = \mathbf{0}_E$ ou $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. Par conséquent, $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ est une famille libre si et seulement si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ ne sont pas colinéaires.

Exemple

Soient $\mathbf{u} = (2, -1, 3)$, $\mathbf{v} = (-4, 2, -6)$ et $\mathbf{w} = (-4, 2, 6)$.

- ▷ $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont colinéaires car $\mathbf{v} = 2 \cdot \mathbf{u}$: la famille $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ n'est donc pas libre ;
- ▷ $\mathbf{u}$ et $\mathbf{w}$ ne sont pas colinéaires : la famille $\{\mathbf{u}, \mathbf{w}\}$ est libre ;
- ▷ $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ ne sont pas colinéaires : la famille $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ est libre.

Théorème

Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs. Si deux vecteurs de $\mathcal{F}$ sont colinéaires alors la famille est liée. La réciproque est fausse.

Exemple

- ▷ Soit $\mathcal{F} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ avec $\mathbf{u} = (1, 0, -1)$, $\mathbf{v} = (2, 3, 5)$ et $\mathbf{w} = (-1, 0, 1)$. La famille est liée car $\mathbf{w} = (-1) \cdot \mathbf{u}$.
- ▷ Soit $\mathcal{F} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ avec $\mathbf{u} = (1, 1, -1)$, $\mathbf{v} = (2, -1, 2)$ et $\mathbf{w} = (3, 0, 1)$. La famille est liée car $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$. Cependant les vecteurs $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ ne sont pas à deux à deux colinéaires.

Attention

Pour montrer qu'une famille de plus de deux vecteurs est libre, on sera amené à résoudre le système linéaire correspondant, qui est un système homogène : la famille est libre si et seulement si le système admet uniquement la solution nulle.

Définition *Rang d'une famille de vecteurs*

Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{F} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ une famille d'éléments de E. On appelle RANG DE $\mathcal{F}$, et on note $\mathrm{rg}(\mathcal{F})$, la dimension du sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{F}$:

$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\mathrm{Vect}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}).$$

Attention

Le rang d'une matrice $\mathbb{A}$ est le rang des vecteurs colonnes de $\mathbb{A}$, c'est-à-dire la dimension du sous-espace vectoriel qu'ils engendrent. Donc

$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \mathrm{rg}([\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n]),$$

où $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n]$ est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de la famille $\mathcal{F}$.

4 Applications Linéaires

Rappels : relation, fonction, application

Définition

Soient E et F deux ensembles.

▷ Une APPLICATION f de E dans F est une fonction de E dans F dont le domaine de définition est égal à E.

▷ Une INJECTION f de E dans F est une application de E dans F vérifiant

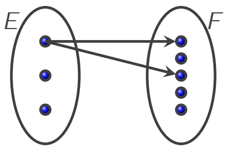
$$\forall (x,x') \in E \times E \quad f(x) = f(x') \implies x = x'.$$

▷ Une SURJECTION f de E dans F est une application de E dans F vérifiant

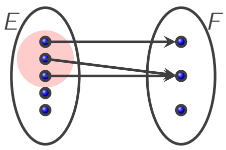
$$\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad y = f(x).$$

▷ Une BIJECTION f de E dans F est une application de E dans F qui est injective et surjective.

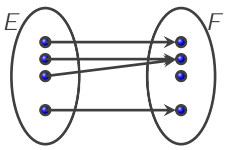
Exemple

1. 

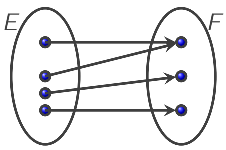
Elle n'est pas une fonction.

2. 

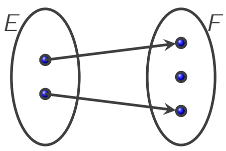
Elle est une fonction mais elle n'est pas une application.

3. 

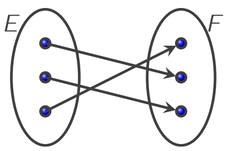
Elle est une application ni injective ni surjective.

4. 

Elle est une application surjective non injective.

5. 

Elle est une application injective non surjective.

6. 

Elle est une bijection.

Définition *Application linéaire*

Soit E, F deux espaces vectoriels. Une APPLICATION $f: E \to F$ est dite LINÉAIRE (ou HOMOMORPHISME) de E vers F si
▷ $f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$ pour tout $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in E$,
▷ $f(\alpha \cdot \mathbf{u}) = \alpha \cdot f(\mathbf{u})$ pour tout $\mathbf{u}$, $\alpha \in \mathbb{K}$,
ou, de manière équivalente,
▷ $f(\alpha \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{v}) = \alpha \cdot f(\mathbf{u}) + \beta \cdot f(\mathbf{v})$ pour tout $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in E$ et pour tout α, $\beta \in \mathbb{K}$.

Exemple

Soit les applications :
① $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (x+2y+3z, 2y-z, x+z)$;
② $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (0, 2y-z, 0)$;
③ $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (x+2y+3, 2y-z, x+z)$;
④ $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (x+2y+3z, 2yz, x+z)$;
⑤ $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x+2y+3z$;
⑥ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + 2x$.

On veut trouver celles qui sont linéaires :
① f est une application linéaire car pour tout (x,y,z), $(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ et pour tout a, $b \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} &f(ax+bx', ay+by', az+bz') \\ &\quad = (ax+bx'+2(ay+by')+3(az+bz'), 2(ay+by')-(az+bz'), ax+bx'+(az+bz')) \\ &\qquad = a(x+2y+3z, 2y-z, x+z) + b(x'+2y'+3z', 2y'-z', x'+z') = af(x,y,z) + bf(x',y',z'); \end{aligned}$$

② f est une application linéaire car pour tout (x,y,z), $(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ et pour tout a, $b \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} f(ax+bx', ay+by', az+bz') &= (0, 2(ay+by')-(az+bz'), 0) \\ &= a(0, 2y-z, 0) + b(0, 2y'-z', 0) = af(x,y,z) + bf(x',y',z'); \end{aligned}$$

③ f n'est pas une application linéaire car par exemple $f(0,0,0) = (3,0,0)$;
④ f n'est pas une application linéaire car pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{ (0,0,0) \}$ et pour $a \in \mathbb{R} \setminus \{ 0; 1 \}$ on a

$$\begin{gathered} f(ax, ay, az) = (ax+2ay+3az, 2a^2yz, ax+az) \\ \nparallel \\ af(x,y,z) = (ax+2ay+3az, 2ayz, ax+az); \end{gathered}$$

⑤ f est une application linéaire car pour tout (x,y,z), $(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ et pour tout a, $b \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} &f(ax+bx', ay+by', az+bz') \\ &\quad = ax+bx'+2(ay+by')+3(az+bz') \\ &\qquad = a(x+2y+3z) + b(x'+2y'+3z') = af(x,y,z) + bf(x',y',z'); \end{aligned}$$

⑥ f n'est pas une application linéaire car par exemple $f(2) = 8 \neq 2f(1) = 3$.

Définition

Soit $f: E \to F$ une application linéaire.
▷ Si $f: E \to F$ est bijective, on dit que f est un ISOMORPHISME de E sur F.
▷ Si $F = E$, on dit que $f: E \to E$ est un ENDOMORPHISME de E.
▷ Si $F = E$ et $f: E \to E$ est bijective, on dit que f est un AUTOMORPHISME de E.
▷ Si $F = \mathbb{R}$, on dit que $f: E \to \mathbb{R}$ est une FORME LINÉAIRE.

▷ *Pour prouver qu'une application $f: E \to F$ est linéaire on utilise la définition.*
▷ *Si f est une application linéaire, pour prouver qu'elle est un isomorphisme il suffit de prouver qu'elle est bijective ;*
▷ *si f est une application linéaire, pour prouver qu'elle est un endomorphisme il suffit de prouver que $f(E) \subset E$;*
▷ *si f est une application linéaire, pour prouver qu'elle est un automorphisme il suffit de prouver qu'elle est bijective et que $f(E) \subset E$.*

Exemple

L'application nulle

$$\begin{aligned} f: E &\to F \\ \mathbf{u} &\mapsto \mathbf{0}_F \end{aligned}$$

est linéaire. En effet :
▷ $f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{0}_F$ et $f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_F + \mathbf{0}_F = \mathbf{0}_F$ pour tout $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in E$;
▷ $f(\alpha \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{0}_F$ et $\alpha \cdot f(\mathbf{u}) = \alpha \cdot \mathbf{0}_F = \mathbf{0}_F$ pour tout $\mathbf{u}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exemple

L'application identique

$$f\colon E \to E$$
$$\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u}$$

est linéaire. En effet :

- ▷ $f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{u}+\mathbf{v} = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$ pour tout $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in E$;
- ▷ $f(\alpha \cdot \mathbf{u}) = \alpha \cdot \mathbf{u} = \alpha \cdot f(\mathbf{u})$ pour tout $\mathbf{u}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

C'est d'ailleurs un automorphisme de E.

Exemple

Les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont les applications $x \mapsto ax$ (à ne pas confondre avec les applications affines).

Exemple

Les formes linéaires de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ sont les applications $(x, y, z) \mapsto ax + by + cz$.

Définition

- ▷ L'ensemble des applications linéaires de E vers F est noté $\mathcal{L}(E, F)$ ou $\mathrm{Hom}(E, F)$;
- ▷ l'ensemble des isomorphismes de E sur F est noté $\mathrm{Isom}(E, F)$;
- ▷ L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$ ou $\mathrm{End}(E)$;
- ▷ L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathrm{Aut}(E)$.

Propriété

❶ Soit $f\colon E \to F$ une application linéaire. L'image du vecteur nul est le vecteur nul : $f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_F$.

❷ Soit $f\colon E \to F$ une application linéaire. L'image de l'opposé est l'opposé de l'image : $f(-\mathbf{u}) = -f(\mathbf{u})$ pour tout $\mathbf{u} \in E$.

❸ Soit $f\colon E \to F$ une application linéaire. L'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images : $f(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbf{u}_i) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f(\mathbf{u}_i)$ pour tout $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p \in E$.

❹ La composée de deux applications linéaires $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to G$ est linéaire : $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ $\implies$ $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

❺ La somme de deux applications linéaires est linéaire : $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(E, F)$ $\implies$ $f + g \in \mathcal{L}(E, F)$.

❻ Le produit entre un scalaire et une application linéaire est linéaire : $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ $\implies$ $\alpha f \in \mathcal{L}(E, F)$.

❼ Si f est un isomorphisme, alors f^{-1} est un isomorphisme : $f \in \mathrm{Isom}(E, F)$ $\implies$ $f^{-1} \in \mathrm{Isom}(E, F)$.

❽ La composée de deux isomorphismes $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to G$ est un isomorphisme : $f \in \mathrm{Isom}(E, F)$ et $g \in \mathrm{Isom}(F, G)$ $\implies$ $g \circ f \in \mathrm{Isom}(E, G)$.

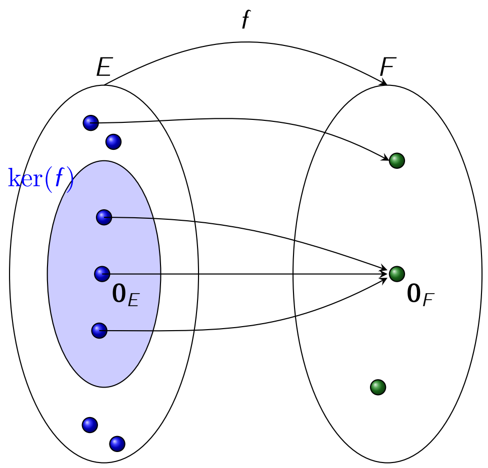
Noyau, image et rang d'une applications linéaire

Définition *Noyau, image, rang*

▷ On appelle NOYAU d'une application linéaire f de E vers F l'ensemble des vecteurs $\mathbf{u} \in E$ tels que $f(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_F$. Le noyau est noté $\ker(f)$. On a donc

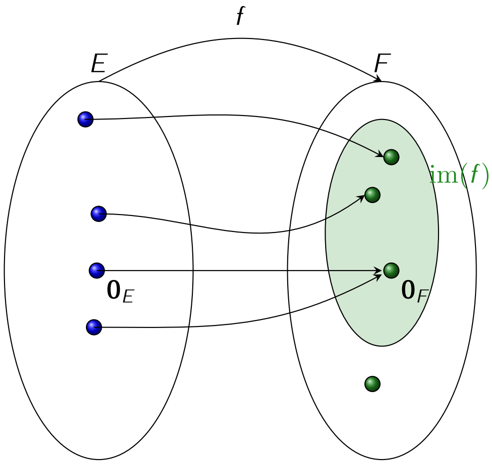
$$\ker(f) = \{\, \mathbf{u} \in E \mid f(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_F \,\}.$$

La détermination du $\ker(f)$ conduit donc naturellement à la résolution d'un système linéaire homogène.



▷ On appelle IMAGE d'une application linéaire f de E vers F l'ensemble des vecteurs $\mathbf{v} \in F$ tels qu'il existe $\mathbf{u} \in E$ vérifiant $f(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$. L'image est notée $\mathrm{im}(f)$. On a donc

$$\mathrm{im}(f) = \{\, \mathbf{v} \in F \mid \exists\, \mathbf{u} \in E,\ \mathbf{v} = f(\mathbf{u}) \,\}\,.$$



▷ On appelle RANG d'une application linéaire f de E vers F la dimension de l'image de f. On le note $\mathrm{rg}(f)$. On a donc

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{im}(f)).$$

Proposition

▷ $\ker(f)$ est un sous espace vectoriel de E.
▷ $\mathrm{im}(f)$ est un sous espace vectoriel de F.

Proposition

▷ f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{\, \mathbf{0}_E \,\}$.
▷ f est surjective si et seulement si $\mathrm{im}(f) = F$.
▷ f est bijective si et seulement si $\ker(f) = \{\, \mathbf{0}_E \,\}$ et $\mathrm{im}(f) = F$.

Proposition

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire de E vers F.

❶ L'image d'une base de E est une famille génératrice de $\mathrm{im}(F)$.

❷ L'image d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de F si et seulement si f est surjective.

❸ L'image d'une famille libre de E est une famille libre de F si et seulement si f est injective.

❹ L'image d'une base de E est une base de F si et seulement si f est bijective.

❺ S'il existe un isomorphisme de E vers F alors $\dim(E) = \dim(F)$.

Théorème *du rang ou des dimensions*

$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f)$

Proposition

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire de E vers F.
Si $\dim(E) = \dim(F)$, il y a équivalence entre :

▷ $f \in \mathrm{Isom}(E, F)$,
▷ $\ker(f) = \{\, \mathbf{0}_E \,\}$,
▷ $\mathrm{im}(f) = F$, i.e. $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$.

Cas particulier : si $E = F$, il y a équivalence entre :

▷ $f \in \mathrm{Aut}(E)$,
▷ $\ker(f) = \{\, \mathbf{0}_E \,\}$,
▷ $\mathrm{im}(f) = E$.

Définition *Matrice d'une application linéaire*

Soit

E et F deux espaces vectoriels,
$\mathcal{B} = \{\, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n \,\}$ une base de E,
$\mathcal{C} = \{\, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_m \,\}$ une base de F,
$f \colon E \to F$ une application linéaire de E dans F.

On appelle matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{C}$ de F la matrice $m \times n$ dont la j-ème colonne est constituée des coordonnées de $f(\mathbf{e}_j)$ dans la base $\mathcal{C}$:

$$\mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

coordonnées de $f(e_j)$

On voit tout de suite que la matrice d'une application linéaire ne sera pas la même suivant l'ordre dans lequel on prend les vecteurs de $\mathcal{B}$ et l'ordre dans lequel on prend les vecteurs de $\mathcal{C}$.

Exemple

Si $\mathcal{B} = \{\, \mathbf{b}_1 = (1,0,0), \mathbf{b}_2 = (0,1,0), \mathbf{b}_3 = (0,0,1) \,\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et si $\mathcal{C} = \{\, \mathbf{c}_1 = (1,0), \mathbf{c}_2 = (0,1 \,\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$, l'application linéaire $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(\mathbf{b}_1) = 2\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2$, $f(\mathbf{b}_2) = 5\mathbf{c}_2$, $f(\mathbf{b}_3) = -\mathbf{c}_1 + 3\mathbf{c}_2$, a pour matrice

$$\mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Définition *Image d'un vecteur par une application linéaire*

Soit

- ▷ E et F deux espaces vectoriels,
- ▷ $\mathcal{B} = \{\, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n \,\}$ une base de E,
- ▷ $\mathcal{C} = \{\, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_m \,\}$ une base de F,
- ▷ $f \colon E \to F$ une application linéaire de E dans F,
- ▷ $\mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ la matrice $m \times n$ de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{C}$ de F.

Si $\mathbf{u}$ a pour coordonnées $\operatorname{coord}(\mathbf{u}, \mathcal{B}) = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ alors $f(\mathbf{u})$ a pour coordonnées $\operatorname{coord}(f(\mathbf{u}), \mathcal{C}) = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ dans la base $\mathcal{C}$ avec

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j \qquad \text{pour } 1 \le i \le m,$$

ce qui peut s'illustrer par

$$\overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}^{\mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \in \mathcal{M}_{m,n}} \overbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_j \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}}^{\operatorname{coord}(\mathbf{u}, \mathcal{B}) \in \mathcal{M}_{n,1}} = \overbrace{\begin{pmatrix} a_{11}u_1 + \dots + a_{1j}u_j + \dots + a_{1n}u_n \\ \vdots \\ a_{i1}u_1 + \dots + a_{ij}u_j + \dots + a_{in}u_n \\ \vdots \\ a_{m1}u_1 + \dots + a_{mj}u_j + \dots + a_{mn}u_n \end{pmatrix}}^{\operatorname{coord}(f(\mathbf{u}), \mathcal{C}) \in \mathcal{M}_{m,1}}$$

Attention

La matrice associée à une application linéaire n'est pas unique, elle dépends des bases choisies dans les espaces E et F.

Propriété

Soit $\mathbb{A}$ une matrice d'ordre $m \times n$, E un espace vectoriel de dimension n, F un espace vectoriel de dimension m. Quelles que soient les bases choisies dans E et F, le rang de l'application linéaire $f \colon E \to F$ associée à $\mathbb{A}$ est toujours le même est est égale au rang de la matrice $\mathbb{A}$.

Propriété

Soit E et F deux espaces vectoriels, $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{C}$ une base de F, $f \colon E \to F$ une application linéaire de E dans F. Alors

- ▷ f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{ \mathbf{0}_E \}$ si et seulement si $\mathrm{rg}(\mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})) = \dim(E)$,
- ▷ f est surjective si et seulement si $\mathrm{im}(f) = F$ si et seulement si $\mathrm{rg}(\mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})) = \dim(F)$,
- ▷ f est bijective si et seulement si $\ker(f) = \{ \mathbf{0}_E \}$ et $\mathrm{im}(f) = F$ si et seulement si $\mathrm{rg}(\mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})) = \dim(E) = \dim(F)$ si et seulement si $\det(\mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})) \neq 0$.

Proposition

Une matrice carrée est inversible si et seulement si c'est la matrice d'un isomorphisme.

Exemple

La matrice de l'application linéaire nulle

$$\begin{aligned} f \colon E &\to F \\ \mathbf{u} &\mapsto \mathbf{0}_F \end{aligned}$$

est toujours la matrice nulle $\mathbb{O}_{n,p}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

Exemple

Soient $\mathcal{B} = \{ \mathbf{e}_1 = (1,0,0), \mathbf{e}_2 = (0,1,0), \mathbf{e}_3 = (0,0,1) \}$ et $\mathcal{C} = \{ \mathbf{e}'_1 = (1,0), \mathbf{e}'_2 = (0,1) \}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ respectivement, et soit $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire telle que

$$f(\mathbf{e}_1) = (1,2), \quad f(\mathbf{e}_2) = (3,4), \quad f(\mathbf{e}_3) = (5,6).$$

Comme

$$f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}'_1 + 2\mathbf{e}'_2, \quad f(\mathbf{e}_2) = 3\mathbf{e}'_1 + 4\mathbf{e}'_2, \quad f(\mathbf{e}_3) = 5\mathbf{e}'_1 + 6\mathbf{e}'_2,$$

alors

$$\mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Si $\mathbf{u} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_2 \in \mathbb{R}^3$, *i.e.* que $\mathbf{u}$ a pour coordonnées (x, y, z) dans la base $\mathcal{B}$, alors $f(\mathbf{u})$ a pour coordonnées dans la base $\mathcal{C}$ le vecteur

$$\mathbb{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})\,\mathrm{coord}(\mathbf{u}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 3y + 5z \\ 2x + 4y + 6z \end{pmatrix} = \mathrm{coord}(f(\mathbf{u}), \mathcal{C}).$$

On a donc $f(\mathbf{u}) = (x + 3y + 5z; 2x + 4y + 6z)$ dans la base $\mathcal{C}$, ce qui confirme le calcul direct $f(\mathbf{u}) = xf(\mathbf{e}_1) + yf(\mathbf{e}_2) + zf(\mathbf{e}_3)$.

5
Diagonalisation

Soit $\mathbf{E}$ un espace vectoriel de dimension n dont une base est : $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$
On note f une application linéaire définie par : $f \quad : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{E} & \longrightarrow & \mathbf{E} \\ \boldsymbol{x} & \longmapsto & f(\boldsymbol{x}) \end{array} \right.$ et soit A sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.

Préliminaires

Soit $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) \in \mathbf{E}^2$. On note X et B leur représentation sous forme de vecteurs dans la base $\mathcal{B}$.
La résolution du système linéaire :

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$$

équivaut à la résolution du système matriciel :

$$A.X = B$$

La résolution de ce système linéaire peut se faire en appliquant la méthode dite du *Pivot de Gauss* afin de se ramener à un système triangulaire du type :

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} a'_{1,1}.x_1 & +a'_{1,2}.x_2 & +a'_{1,3}.x_3 & \cdots & +a'_{1,n}.x_n & = & b'_1 \\ 0 & a'_{2,2}.x_2 & +a'_{2,3}.x_3 & \cdots & +a'_{2,n}.x_n & = & b'_2 \\ 0 & 0 & a'_{3,3}.x_3 & \cdots & +a'_{3,n}.x_n & = & b'_3 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & = & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & +a'_{n,n}.x_n & = & b'_n \end{array} \right.$$

La meilleure solution est bien sûr de se ramener à un système purement diagonal.

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a'_{1,1}.x_1 & 0 & \cdots & 0 & = & b'_1 \\ 0 & a'_{2,2}.x_2 & \cdots & 0 & = & b'_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & = & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & +a'_{n,n}.x_n & = & b'_n \end{array} \right.$$

Il faut trouver une base de $\mathbf{E}$ dans laquelle l'expression de la matrice de f est plus simple que dans la base $\mathcal{B}$.

$\Longrightarrow$ Diagonaliser (resp. triangulariser) une application (ou une matrice), c'est trouver une base $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ où $f(\boldsymbol{e}_i) = \lambda_i \boldsymbol{e}_i$ (resp $f(\boldsymbol{e}_i) = \sum_{j=1}^{i} \alpha_{ij} \boldsymbol{e}_j$).

$\Longrightarrow$ Diagonaliser (resp. triangulariser) une application (ou une matrice), c'est trouver une matrice inversible P telle que la matrice $\Delta = P^{-1}.A.P$ soit diagonale (resp triangulaire).

La diagonalisation d'une matrice est utile pour calculer ses puissances. Soit A une matrice semblable à une matrice diagonale Δ ($A = P\Delta P^{-1}$).
Les puissances de la matrice A se calculent de la façon suivante :

$$A^n \;=\; P\Delta^n P^{-1}$$

La puissance $n^{\text{ème}}$ d'une matrice diagonale se calcule en élevant à la puissance n les termes diagonaux.

Valeurs propres et vecteurs propres d'une application linéaire

Définitions

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est valeur propre de f s'il existe $\boldsymbol{x} \in \mathbf{E}\backslash\{\mathbf{0}\}$ tel que $f(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}$

Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f, alors $E_f(\lambda) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{E}/f(\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{x}\}$ est l'espace propre associé à λ

Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f, alors tout vecteur de $E_f(\lambda)$ est appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Le spectre de f est l'ensemble des valeurs propres de f. On le note $Spec(f)$.

Propriétés

Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbf{E}$. $\boldsymbol{x}$ est vecteur propre de $f \Longleftrightarrow \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ et $\exists \lambda \in \mathbb{K}/f(\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{x}$.

Soient $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_p$ p vecteurs propres associés aux p valeurs propres **distinctes** $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$.
Alors la famille $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_p)$ est une famille libre.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. $E_f(\lambda) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{E}/f(\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{x}\} = \ker(f - \lambda.Id)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbf{E}$ stable par f.
$\lambda \in Spec(f) \Longleftrightarrow E_f(\lambda) \neq \{\mathbf{0}\}$

Calcul pratique des valeurs propres

$$\begin{array}{lcl}
\lambda \text{ valeur propre de } f & \Longleftrightarrow & \exists \boldsymbol{x} \in \mathbf{E}\backslash\{\mathbf{0}\} \text{ tel que } f(\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{x} \\
 & \Longleftrightarrow & \exists \boldsymbol{x} \in \mathbf{E}\backslash\{\mathbf{0}\} \text{ tel que } (f - \lambda.Id)\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \\
 & \Longleftrightarrow & \text{Le vecteur nul a au moins 2 antécédents distincts par } f. \\
 & \Longleftrightarrow & (f - \lambda.Id) \text{ n'est pas injectif.} \\
 & \Longleftrightarrow & \det(f - \lambda.Id) = 0
\end{array}$$

$\det(f - \lambda.Id)$ est un polynôme du $n^{\text{ième}}$ degré en λ si n est la dimension de l'espace vectoriel $\mathbf{E}$.
On l'appelle le polynôme caractéristique de f et on le note $P_f(\lambda)$.
Finalement :

$$\lambda \text{ valeur propre de } f \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda \text{ racine du polynôme caractéristique } P_f(\lambda).$$

Remarque
Le produit des valeurs propres est égal au déterminant de f et la somme des valeurs propres à la Trace (somme des éléments diagonaux) de la matrice représentative de f dans une base quelconque.

Exemple
Montrez que les valeurs propres de la matrice : $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ sont : $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 4$.

Conditions de diagonalisation

Définitions

On dit que l'application linéaire f (ou la matrice A) est diagonalisable si **E** *possède une base de vecteurs propres de f (ou de A).*
Cette base est appelée base propre.

On appelle ordre de la valeur propre λ_i l'ordre de la racine λ_i dans le polynôme caractéristique $\det(A-\lambda Id)$.
On note α_i l'ordre de la valeur $i^{ième}$ valeur propre.

Propriétés

La matrice A possède au plus n valeurs propres distinctes.

Si $\det(A-\lambda Id) = (\lambda-\lambda_1)^{\alpha_1}.\cdots.(\lambda-\lambda_p)^{\alpha_p}$, alors $\forall i \in [1,p], \quad 1 \leq dimE_{\lambda_i} \leq \alpha_i$

A diagonalisable $\Longleftrightarrow \forall i \in [1,p], \quad dim(E_{\lambda_i}) = \alpha_i$
En particulier, si A possède n valeurs propres distinctes, la matrice est diagonalisable.

Remarques

1. Une matrice symétrique réelle est toujours diagonalisable.
2. Une matrice peut être diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$ (si par exemple les racines du polynôme caractéristique sont complexes).

Matrice de passage vers la base propre

Soit A une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
La matrice de passage depuis la base canonique vers la base propre de A est la matrice :
$P = Mat(Id, \mathcal{B}_{propre}, \mathcal{B}_{canonique})$. Si Δ est la matrice diagonale dans la base propre, alors on a la relation suivante entre A et Δ : $A = P.\Delta.P^{-1}$.
On rappelle que les vecteurs colonnes de la matrice P sont formés des coordonnées des vecteurs de la base propre sur la base canonique.

4.3.4 Application

Cherchons la matrice de changement de base P associée à la matrice : $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
On sait que la matrice B est diagonalisable car elle possède 2 valeurs propres distinctes $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 4$.
La résolution des 2 équations $A.X_i = \lambda_i X$ permet de trouver une base des 2 espaces propres :
E_{-1} de base $\boldsymbol{u}_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et E_4 de base $\boldsymbol{u}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
Dans la base propre : $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{u}_{-1}, \boldsymbol{u}_4)$, la matrice de f est diagonale : $\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.
Enfin on a la relation suivante entre les matrices B et Δ : $\Delta = P^{-1}.B.P$, avec :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \frac{1}{5}.\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple d'une matrice non-diagonalisable

Soit la matrice : $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
La matrice C possède une seule valeur propre d'ordre 2 : $\lambda = 1$. La matrice est diagonalisable si $dim E_\lambda = 2$.

Cherchons les vecteurs propres associés à $\lambda = 1$:

$$\begin{array}{rcl} E_\lambda & = & \ker(C - Id) \\ E_\lambda & = & \left\{ \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / \left\{ \begin{array}{rcl} 0 & = & 0 \\ 2x & = & 0 \end{array} \right. \right\} \\ E_\lambda & = & \left\{ \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & \forall \end{array} \right. \right\} \end{array}$$

Donc E_λ est la droite vectorielle portée par le vecteur $\boldsymbol{u}_0 = (0, 1)$ et $dim(E_\lambda) = 1$.
Puisque $dim(E_\lambda) < \alpha(\lambda = 1)$, la matrice C n'est pas diagonalisable.

Remarque
On peut montrer que sur $\mathbb{C}$