**UNIVERSITE MOULAY ISMAIL**
**FACULTE DES SCIENCES**
**DEPARTEMENT DE PHYSIQUE**

**Année Universitaire 2023/ 2024**
**SMP-S4**
**Module : Electricité 3**

# Série N°3 : Ondes électromagnétiques dans les milieux matériels
# Corrigé

------------------------------------------------------------------------

**Exercice 1 :**

♦ **Etude du type de polarisation des ondes :**

**RAPPELL :** Pour connaitre l'état de polarisation d'une OEM, on doit vérifier les conditions suivantes :

■ **Polarisation circulaire :**

$\Delta\varphi = (2n+1)\dfrac{\pi}{2} \quad (n \in Z)$ et égalité des amplitudes des deux composantes du champ

■ **Polarisation rectiligne :**

$\Delta\varphi = n\pi \quad (n \in Z)$ sans condition sur les amplitudes des deux composantes.

■ **Polarisation elliptique :**

si aucune des conditions précédentes n'est vérifiée.

Donc :

**a)** $\vec{E}(M,t) = \begin{cases} E_x = E_{0x}\cos(\omega t - kz) \\ E_y = E_{0y}\cos(\omega t - kz - 3\pi) \\ E_z = 0 \end{cases}$ ; $\Delta\varphi = -3\pi \Rightarrow$ Polarisation rectiligne.

**b)** $\vec{E}(M,t) = \begin{cases} E_x = E_0\cos(\omega t - ky) \\ E_y = 0 \\ E_z = E_0\cos(\omega t - ky + \dfrac{\pi}{3}) \end{cases}$ : $\Delta\varphi = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow$ Polarisation elliptique

**c)** $\vec{E}(M,t) = \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_0\cos(\omega t - kx + \dfrac{3\pi}{2}) \\ E_z = E_0\cos(\omega t - kx) \end{cases}$ ; $\Delta\varphi = \dfrac{3\pi}{2}$. et $E_{0y} = E_{0y} = E_0 \Rightarrow$

Polarisation circulaire.

**d)** $\vec{E}(M,t) = \begin{cases} E_x = -\dfrac{1}{2}E_0\cos\left(\omega t - k.\dfrac{x\sqrt{3}+y}{2}\right) \\ E_y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}E_0\cos\left(\omega t - k.\dfrac{x\sqrt{3}+y}{2}\right) \\ E_z = 0 \end{cases}$ ; $\Delta\varphi = 0 \Rightarrow$ Polarisation rectiligne.

**e)** $\vec{E}(M,t) = E_0\cos(\omega t - kx).\vec{e}_y$ : une seule composante, le Champ électrique Oscille suivant une direction fixe qui est celle de l'axe X'X. : Polarisation rectiligne

**<u>Exercice 2</u> :** OEM plane monochromatique dont le champ électrique est donné par :

$$\vec{E}(M,t) = \begin{cases} E_x = E_0 \cos(\omega t - ky - \frac{5\pi}{2}) \\ E_y = 0 \\ E_z = E_0 \cos(\omega t - ky) \end{cases}_{(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)}$$

**1) ♦ Expression du vecteur d'onde $\vec{k}$ :**

Dans l'expression du champ $\vec{E}(M,t)$ le terme de phase :

$$\vec{k}.\overrightarrow{OM} = k.y \quad \Rightarrow \; k._x = k_z = 0 \;\text{ d'où }\; \vec{k}. = k.\vec{e}_y$$

**♦Direction et sens de polarisation :**

L'onde se propage donc parallèlement à Oy.
Le sens étant celui des $y > 0$ puisque les termes $\omega.t$ et $k_y$ sont de signes opposés.

**2) ♦Type de polarisation de l'onde** :

Le déphasage $\varphi$ entre les composantes $E_x$ et $E_z$ de $\vec{E}(M,t)$ est égal à $\frac{5\pi}{2}$ (multiple impair de $\frac{\pi}{2}$) en plus, leurs amplitudes sont égales $E_{0x} = E_{0z} = E_0$ : **L'onde est polarisée circulairement**.

**3) ♦Expression du champ $\vec{B}(M,t)$ :**

L'onde est plane, sa relation de structure entre vecteurs est : $\vec{B}(M,t) = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}(M,t)$

On rappelle que les champs $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$ de l'onde plane sont perpendiculaires au vecteur d'onde $\vec{k}$, donc à la direction de propagation, par suite leurs composantes suivant l'axe Oy sont nulles ($E_y = 0$ et $B_y = 0$)

Soit :

$$\begin{pmatrix} B_x \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} k.E_z \\ 0 \\ -k.E_x \end{pmatrix}$$

Par identification on obtient : $\begin{cases} B_x = \frac{k}{\omega} E_z = \frac{E_z}{v} \\ B_z = -\frac{k}{\omega} E_x = -\frac{E_x}{v} \end{cases}$

Où :

- $v = \frac{\omega}{k}$ est la vitesse de propagation de l'onde dans le milieu
- $\frac{E_0}{v} = B_0$ est la relation de structure de l'onde plane pour les modules.

d'où :

$$\vec{B}(M,t) = \begin{cases} B_x = \frac{k.}{\omega} E_z = \frac{E_z}{v} = \frac{E_0}{v} \cos(\omega t - ky) = B_0 \cos(\omega t - ky) \\ B_y = 0 \\ B_z = -\frac{k.}{\omega} E_x = -\frac{E_x}{v} = -\frac{E_0}{v} \cos(\omega t - ky - \frac{5\pi}{2}) = -B_0 \cos(\omega t - ky - \frac{5\pi}{2}) \end{cases}_{(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)}$$

**4) ♦ Le vecteur de Poynting est tel que :**

$$\vec{R}(M,t) = \frac{\vec{E}(M,t) \wedge \vec{B}(M,t)}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0}\begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_x \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu_0}\begin{pmatrix} 0 \\ E_z B_x - E_x B_z \\ 0_z \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\vec{R}(M,t) = \frac{1}{\mu_0}\left(E_z B_x - E_x B_z\right).\vec{e}_y = \frac{k}{\mu_0.\omega}\left(E_z^2 + E_x^2\right)\vec{e}_y = \frac{k}{\mu_0.\omega}E^2(M,t).\vec{e}_y = c.\varepsilon_0.E^2(M,t).\vec{e}_y$$

Le vecteur de Poynting est suivant la direction de propagation conformément aux propriétés des ondes planes.

**<u>Exercice 3</u> :**

Onde électromagnétique plane monochromatique, de pulsation $\omega$, se propageant dans un milieu diélectrique parfait. Au point **M**(x,y,z) à l'instant **t**, le champ est :

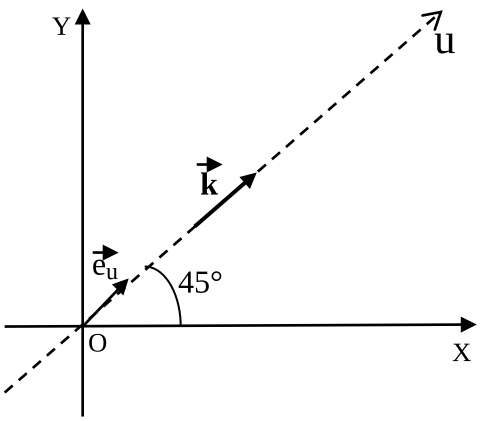
$$\vec{E}(M,t) = \left|\begin{array}{l} E_x = -\frac{1}{2\sqrt{2}}E_0 \cos\left(\omega t - k.\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right) \\ E_y = \frac{1}{2\sqrt{2}}E_0 \cos\left(\omega t - k.\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right) \\ E_z = -\frac{\sqrt{3}}{2}E_0 \cos\left(\omega t - k.\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right) \end{array}\right._{(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)}$$

**1) ♦ Expression du vecteur d'onde $\vec{k}$ :**

Dans l'expression de $\vec{E}(M,t)$ le terme de phase $\vec{k}.\overrightarrow{OM} = k_x.x + k_y.y + k_z.z = k.\frac{x+y}{\sqrt{2}}$.

Par identification on conclut que : $\vec{k}\begin{cases} k_x = \frac{k}{\sqrt{2}} \\ k_y = \frac{k}{\sqrt{2}} \\ k_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \vec{k} = \frac{k}{\sqrt{2}}\vec{e}_x + \frac{k}{\sqrt{2}}\vec{e}_y$

**L'OEM se propage dans le plan (XOY), dans la direction Ou en faisant un angle de 45° avec les axes OX et OY.**




**♦ Expression du vecteur unitaire $\vec{e}_u$ de la direction de propagation :**

$$\vec{e}_u = \frac{\vec{k}}{k} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_y$$

**2) ♦ Expression du vecteur unitaire $\vec{e}_v$ de la direction du champ électrique $\vec{E}(M,t)$ :**

Ecrivons le champ électrique dans la base cartésienne $(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ sous la forme :

$$\vec{E}(M,t)=E_x\vec{e}_x+E_y\vec{e}_y+E_z\vec{e}_z=E_0\cos\left(\omega t-k.\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)\left[-\frac{1}{2\sqrt{2}}\vec{e}_x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\vec{e}_y-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_z\right]$$

Il est donc sous la forme :

$$\vec{E}(M,t)=E_0\cos\left(\omega t-k.\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right).\vec{e}_v \qquad \text{où} \qquad \vec{e}_v=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\vec{e}_x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\vec{e}_y-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_z$$

On vérifie bien que le vecteur $\vec{e}_v$ est unitaire, en effet :

$$\|\vec{e}_v\|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$$

**♦ Nature de la polarisation de l'onde :**

Le champ $\vec{E}(M,t)$ vibre en gardant une direction fixe parallèle à l'axe **Ov** de vecteur unitaire $\vec{e}_v$.

L'onde est donc polarisée rectilignement suivant la direction **Ov**.

**♦ Comparaison des directions de $\vec{e}_u$ et $\vec{e}_v$ :**

On doit considérer le produit scalaire de $\vec{e}_u$ et $\vec{e}_v$, soit :

$$\vec{e}_u.\vec{e}_v=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_x+\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_y\right).\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\vec{e}_x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\vec{e}_y-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_z\right)=0$$

Les vecteurs $\vec{e}_u$ et $\vec{e}_v$ sont perpendiculaires : donc le champ $\vec{E}(M,t)$ est perpendiculaire à la direction de propagation **Ou**. L'onde est dite Transverse Electrique (TE).

**3) ♦ Expression du champ $\vec{B}(M,t)$ :**

$$\vec{B}(M,t)=\frac{\vec{k}}{\omega}\wedge\vec{E}(M,t)=\frac{k}{\omega}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}E_x\\E_y\\E_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{k}{\omega}\dfrac{E_z}{\sqrt{2}}\\-\dfrac{k}{\omega}\dfrac{E_z}{\sqrt{2}}\\\dfrac{k}{\omega}\dfrac{(E_y-E_x)}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

Soit :

$$\vec{B}(M,t)=\begin{cases}B_x=\dfrac{k}{\omega}\dfrac{E_z}{\sqrt{2}}=-\dfrac{k}{\omega}\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}E_0\cos\left(\omega t-k.\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}B_0\cos\left(\omega t-k.\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}\right)\\B_y=-\dfrac{k}{\omega}\dfrac{E_z}{\sqrt{2}}=\dfrac{k}{\omega}\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}E_0\cos\left(\omega t-k.\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}B_0\cos\left(\omega t-k.\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}\right)\\B_z=\dfrac{k}{\omega}\dfrac{(E_y-E_x)}{\sqrt{2}}=\dfrac{k}{\omega}\dfrac{E_0}{2}\cos\left(\omega t-k.\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{1}{2}B_0\cos\left(\omega t-k.\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}\right)\end{cases}$$

**Remarque :** On peut aussi mettre le champ $\vec{B}(M,t)$ sous la forme :

$$\vec{B}(M,t) = B_0 \cos\left(\omega t - k.\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right).\vec{e}_w \qquad \text{où} \qquad \vec{e}_w = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\vec{e}_y + \frac{1}{2}\vec{e}_z$$

$\vec{e}_w$ étant le vecteur unitaire de la direction **Ow** de $\vec{B}(M,t)$ .

**Exercice 4**

Une OEM plane monochromatique incidente se propage dans le milieu 1 (air) et arrive sous un angle d'incidence $\theta$ à la surface $\Sigma$ = plan (XOZ) qui sépare ce milieu du milieu 2 (bon conducteur). Son champ d'induction magnétique est situé dans le plan d'incidence (**XOY**).

Soient :
$(\vec{E}_i, \vec{B}_i, \vec{k}_i)$ : l'onde incidente dans le milieu (1)
$(\vec{E}_r, \vec{B}_r, \vec{k}_r)$ : l'onde réfléchie à la surface (**X0Z**) du conducteur.

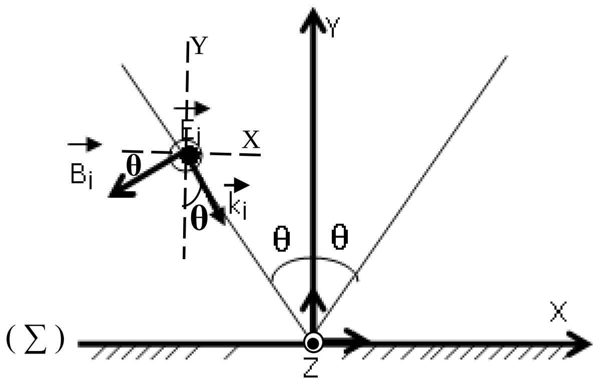
**1) a-** ♦ Pour représenter le champ $\vec{E}_i$ sur la figure, on tiendra compte du fait que le trièdre $(\vec{E}_i, \vec{B}_i, \vec{k}_i)$ est direct, soit $\vec{E}_i(M,t) = E_{iz}(M,t).\vec{e}_z$ (voir figure).

**b- ♦ Expression du vecteur d'onde $\vec{k}_i$ de l'onde incidente dans la base cartésienne :**

**Remarque :**

Les ondes incidente $(\vec{E}_i, \vec{B}_i, \vec{k}_i)$ et réfléchie $(\vec{E}_r, \vec{B}_r, \vec{k}_r)$ se propagent dans le milieu 1 (air), donc les modules de leurs vecteurs d'onde sont égaux :

$$\|\vec{k}_i\| = \|\vec{k}_r\| = k_1 = \frac{\omega}{c}$$




Par projection du vecteur $\vec{k}_i$ sur les axes X et Y du repère cartésien (voir figure) on obtient comme composantes :

$$\vec{k}_i \begin{cases} k_{ix} = k_1 \sin\theta = \dfrac{\omega}{c}\sin\theta \\ k_{iy} = -k_1\cos\theta = -\dfrac{\omega}{c}\cos\theta \\ k_{iz} = 0 \end{cases}$$

**c- ♦ Expression du champ électrique $\vec{E}_i(M,t)$ de l'onde incidente :**

Le sens du champ électrique $\vec{E}_i(M,t)$ est tel que le trièdre $(\vec{E}_i, \vec{B}_i, \vec{k}_i)$ soit direct (voir figure).

$$\begin{cases} \vec{E}_i(M,t) = E_{0iz}\cos(\omega t - \vec{k}_i.\vec{r}).\vec{e}_z = E_0 \cos[\omega t - k_1(x.\sin\theta - y.\cos\theta)].\vec{e}_z \\ \quad \text{avec } E_{0iz} = E_0 \end{cases}$$

**♦ Type de polarisation de cette onde :**

Le champ $\vec{E}_i(M,t)$ de l'onde incidente garde une direction fixe parallèle à l'axe **OZ** : L'onde est polarisée rectilignement suivant la direction de l'axe **OZ**.

♦ **Mode fondamental de polarisation :**

Le champ électrique incident $\vec{E}_i(M,t)$ est perpendiculaire au plan d'incidence (**XOY**) ce qui correspond au mode polarisation **TE** (Transverse Electrique).

**2)** ♦ **Expression du champ $\vec{B}_i(M,t)$ :**

Puisque l'onde est plane, on peut utiliser la relation de structure :

$$\vec{B}_i(M,t) = \frac{\vec{k}_i}{\omega} \wedge \vec{E}_i(M,t)$$

Soit : $$\vec{B}_i(M,t) = \frac{1}{\omega}\begin{pmatrix} k_1 \sin\theta \\ -k_1\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_{iz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{k_1}{\omega} E_{iz}\cos\theta \\ -\frac{k_1}{\omega} E_{iz}\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{ix} \\ B_{iy} \\ B_{iz} \end{pmatrix}$$

Par identification des composantes on obtient comme expression:

$$\vec{B}_i(M,t) = \begin{cases} B_{ix} = -\frac{k_1}{\omega} E_{iz}\cos\theta = -\frac{k_1}{\omega} E_0 \cos\theta \cos[\omega t - k_1(x\sin\theta - y\cos\theta)] \\ B_{iy} = -\frac{k_1}{\omega} E_{iz}\sin\theta = -\frac{k_1}{\omega} E_0 \sin\theta \cos[\omega t - k_1(x.\sin\theta - y.\cos\theta)] \\ B_{iz} = 0 \end{cases}$$

Où $\frac{k_1}{\omega} E_0 = \frac{E_0}{c} = B_0$

---

**REMARQUE :** On peut aussi déterminer le champ $\vec{B}_i(M,t)$ à partir de la figure précédente.

Le champ $\vec{B}_i(M,t)$ est situé dans le plan (**XOY**), donc on a:

$$\vec{B}_i(M,t) = \begin{cases} B_{ix} = B_{0ix}\cos[\omega t - k_1(x.\sin\theta - y.\cos\theta)] \\ B_{iy} = B_{0iy}\cos[\omega t - k_1(x.\sin\theta - y.\cos\theta)] \\ B_{iz} = 0 \end{cases}$$

Par projection sur les axes **OX** et **OY** on obtient : $\begin{cases} B_{0ix} = -B_0\cos\theta \\ B_{0iy} = -B_0\sin\theta \end{cases}$

d'où l'expression :

$$\vec{B}_i(M,t) = \begin{cases} B_{ix} = -B_0\cos\theta\cos[\omega t - k_1(x.\sin\theta - y.\cos\theta)] \\ B_{iy} = -B_0\sin\theta\cos[\omega t - k_1(x.\sin\theta - y.\cos\theta)] \\ B_{iz} = 0 \end{cases}$$

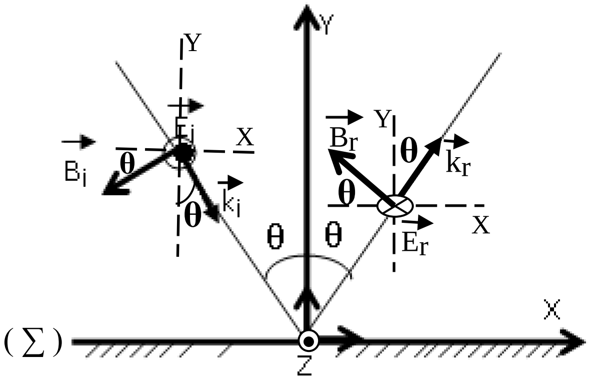
---

**3) ♦ a- Expression du vecteur d'onde $\vec{k}_r$ de l'onde réfléchie :**

$\|\vec{k}_i\| = \|\vec{k}_r\| = k_1 = \dfrac{\omega}{c}$

Par projection du vecteur $\vec{k}_r$ sur les axes **X** et **Y** du repère cartésien on obtient comme composantes :

$$\vec{k}_r \begin{cases} k_{rx} = k_1 \sin\theta \\ k_{iy} = k_1 \cos\theta \\ k_{iz} = 0 \end{cases}$$




**b- ■ Expression du champ $\vec{E}_r(M, t)$ de l'onde réfléchie :**

Le champ réfléchi reste toujours polarisé rectilignement suivant la direction Oz.

$$\vec{E}_r(M, t) = E_{0rz} \cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r}).\vec{e}_z = E_{0rz} \cos[\omega t - k_1(x.\sin\theta + y.\cos\theta)].\vec{e}_z$$

Pour déterminer $E_{0rz}$ et, par suite, le sens du champ $\vec{E}_r(M, t)$, on fait appel à la relation de passage pour la composante tangentielle Du champ électrique $\vec{E}$, à la surface de séparation entre le milieu 1 (air) et le milieu 2 (conducteur).

**c- ♦ Relation de passage pour $\vec{E}(M, t)$ :**

A la surface de séparation $\Sigma$ = plan (XOZ) il y a continuité de la composante tangentielle de $\vec{E}$. Soit :

$$\begin{cases} \vec{E}_1(M, t).\vec{T} = \vec{E}_2(M, t).\vec{T} \\ \vec{E}_1(M, t) = \vec{E}_i(M, t) + \vec{E}_r(M, t) \\ \vec{E}_2 = \vec{0} \text{ dans le milieu conducteur} \\ \vec{T} = \vec{e}_z \text{ vecteur unitaire tangent} \end{cases}$$

En un point M du plan (XOZ), en particulier $M \equiv O(0,0,0)$ : $\left(\vec{E}_i(O, t) + \vec{E}_r(O, t)\right).\vec{e}_z = 0$

$$\begin{cases} \left(E_0 \cos(\omega t) + E_{0rz} \cos(\omega t)\right)\vec{e}_z.\vec{e}_z = 0 \\ \text{ce qui donne :} \quad E_{0rz} = -E_0 \end{cases}$$

d'où l'expression du champ électrique de l'onde réfléchie :

$$\vec{E}_r(M, t) = -E_0 \cos[\omega t - k_1(x.\sin\theta + y.\cos\theta)].\vec{e}_z$$

**Remarque :** Le champ réfléchi à la surface du conducteur est toujours en opposition de phase avec le champ incident.

**♦ Pour la représentation les vecteurs $\vec{E}_r(M, t)$ et $\vec{k}_r$ voir figure ci-haut.**

- à un instant t où le champ $\vec{E}_i(M, t)$ est dans le sens positif de l'axe **Z**, le champ réfléchi $\vec{E}_r(M, t)$ est dans le sens contraire.

- Le sens du champ $\vec{B}_r(M, t)$ est tel que le trièdre $(\vec{E}_r, \vec{B}_r, \vec{k}_r)$ soit direct.

**4) ■ Expression du champ $\vec{B}_r(M, t)$ :**

A partir de la relation de structure : $\vec{B}_r(M,t) = \frac{\vec{k}_r}{\omega} \wedge \vec{E}_r(M,t)$

On a : $\vec{B}_r(M,t) = \frac{1}{\omega}\begin{pmatrix} k_1 \sin\theta \\ k_1 \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_{rz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k_1}{\omega} E_{rz} \cos\theta \\ -\frac{k_1}{\omega} E_{rz} \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{rx} \\ B_{ry} \\ B_{rz} \end{pmatrix}$

Soit, par identification des composantes on obtient comme expression:

$$\vec{B}_r(M,t) = \begin{cases} B_{rx} = \frac{k_1}{\omega} E_{rz} \cos\theta = -\frac{k_1}{\omega} E_0 \cos\theta \cos[\omega t - k_1(x\sin\theta + y\cos\theta)] \\ B_{ry} = -\frac{k_1}{\omega} E_{rz} \sin\theta = \frac{k_1}{\omega} E_0 \sin\theta \cos[\omega t - k_1(x.\sin\theta + y.\cos\theta)] \\ B_{rz} = 0 \end{cases}$$

Où $\frac{k_1}{\omega} E_0 = \frac{E_0}{c} = B_0$

**5)** ■ **Expression du champ** $\vec{E}(M,t)$ **de l'onde résultante de la superposition des ondes incidente** et réfléchie en un point **M** de l'espace $(Y > 0)$ :

$$\vec{E}(M,t) = \vec{E}_i(M,t) + \vec{E}_r(M,t) = E_0\{\cos[\omega t - k_1(x.\sin\theta - y.\cos\theta)] - \cos[\omega t - k_1(x.\sin\theta + y.\cos\theta)]\}.\vec{e}_z$$

On utilisera la relation trigonométrique : $\cos P - \cos Q = -2\sin\left(\frac{P-Q}{2}\right).\sin\left(\frac{P+Q}{2}\right)$

Soit

$$\vec{E}(M,t) = -2E_0 \sin(k_1 y.\cos\theta).\sin[\omega t - (k_1 \sin\theta).x]\vec{e}_z$$

qui peut aussi se mettre sous la forme suivante :

$$\vec{E}(M,t) = 2E_0 \sin(k_1 y.\cos\theta).\cos\left[\omega t - (k_1 \sin\theta).x + \frac{\pi}{2}\right].\vec{e}_z$$

♦ **Nature de l'onde obtenue :**

■ l'amplitude de l'onde obtenue $2E_0 \sin(k_1 y.\cos\theta)$ n'est pas constante, elle varie avec y, donc **elle n'est pas plane**.

■ l'onde se propage suivant la direction positive de l'axe **OX** (**onde est progressive**), à la vitesse de phase $v = v_\varphi = \frac{dx}{dt}$. En effet :

le terme de phase $\vec{k}.\overrightarrow{OM} = k_x.x + k_y.y + k_z.z = (k_1 \sin\theta).x$. Par identification on obtient :

$$\vec{k} \begin{cases} k_x = k_1 \sin\theta \\ k_y = 0 \\ k_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{k} = (k_1 \sin\theta).\vec{e}_x$$

En plus, les termes $\omega.t$ et $(k_1 \sin\theta).x$ sont de signes contraires, donc : **L'OEM se propage dans la direction positive de l'axe OX**.

♦ le champ électrique $\vec{E}(M, t)$ résultant vibre en gardant la direction parallèle à l'axe **OZ** :
**L'onde est polarisée rectilignement suivant la direction OZ.**

On peut déterminer la vitesse de phase (ou de propagation de l'onde) en écrivant qu'en tout point **M** du plan d'onde, la phase est constante, soit :

$$\omega.t - k_1 x \sin\theta = cste$$

En différentiant cette relation on obtient : $\omega.dt - k_1 \sin\theta.dx = 0$

Soit : $$v = v_\varphi = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k_1 \sin\theta}$$

**<u>Exercice 5 :</u> Onde électromagnétique en incidence oblique**

- **Milieux (1) :** Diélectrique parfait, non magnétique ($\varepsilon_{r1}, \mu_0, n_1$)
- **Milieux (2) :** Diélectrique parfait, non magnétique ($\varepsilon_{r2}, \mu_0, n_2$)
- $\sum$ plan (XOY) ) : Surface de séparation entre les 2 milieux, ne contenant ni charges ($\sigma = 0$), ni courants réels ($\vec{k} = \vec{0}$).
- $(\vec{E}_i, \vec{B}_i, \vec{k}_i)$ : OEM plane sinusoïdale de pulsation $\omega$ et de vecteur d'onde $\vec{k}_i$, polarisée rectilignement suivant l'axe Ox ($\vec{E}_i(M,t) \perp (YOZ)$ ), se propage dans le milieu diélectrique (1) à la vitesse $v_1$ et arrivant, à la surface de séparation, sous un angle d'incidence $\theta_1$. Son champ électrique est donc : $\bar{\vec{E}}_i(M,t) = E_{0i} e^{j(\omega t - \vec{k}_i.\vec{r})}.\vec{e}_x$

Soient :

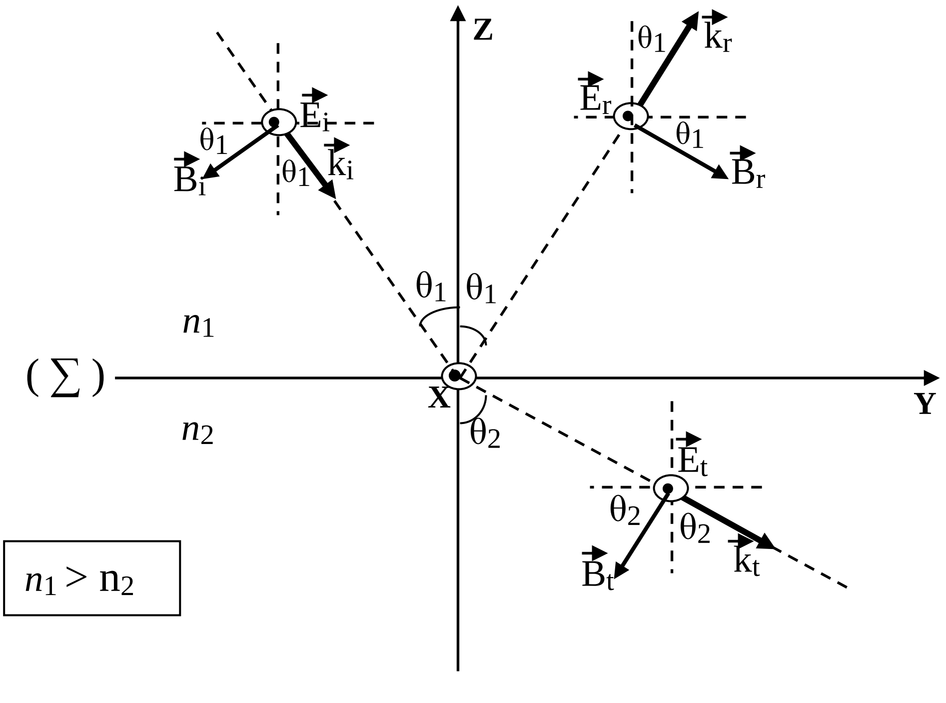
- $(\vec{E}_r, \vec{B}_r, \vec{k}_r)$ : Onde réfléchie à la surface ($\sum$) dans le milieu (1) ayant la même vitesse $v_1$
- $(\vec{E}_t, \vec{B}_t, \vec{k}_t)$ : Onde transmise dans le milieu (2) et se propageant à la vitesse $v_2$

Les modules des vecteurs d'ondes incidente, réfléchie et transmise ainsi que les vitesses de propagation dans les deux milieux sont :

$$\begin{cases} v_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_1}} \quad ; \quad v_2 = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_2}} \\ k_i = k_r = \dfrac{\omega}{v_1} = k_1 \quad k_t = \dfrac{\omega}{v_2} = k_2 \end{cases} \quad t$$

On considère le cas $n_1 > n_2$.

1) **♦Expressions des vecteurs d'onde incidente $\vec{k}_i$, réfléchie $\vec{k}_r$ et transmis $\vec{k}_t$ dans la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ :**



$$\vec{k}_i = \begin{cases} k_{ix} = 0 \\ k_{iy} = k_1 \sin\theta_1 \\ k_{iz} = -k_1 \cos\theta_1 \end{cases} \qquad \vec{k}_r = \begin{cases} k_{rx} = 0 \\ k_{ry} = k_1 \sin\theta_1 \\ k_{rz} = k_1 \cos\theta_1 \end{cases} \qquad \vec{k}_t = \begin{cases} k_{tx} = 0 \\ k_{ty} = k_2 \sin\theta_2 \\ k_{tz} = -k_2 \cos\theta_2 \end{cases}$$

**2) ♦ Les champs** $(\vec{B}_i, \vec{E}_r, \vec{B}_r, \vec{E}_t, \vec{B}_t)$ **sont représentés sur la figure ci-haut en tenant compte du fait que :**

■ dans le cas $n_1 > n_2$ considéré ici, le champ réfléchi $\vec{E}_r$ est en phase avec le champ incident $\vec{E}_i$ et que le champ transmis $\vec{E}_t$ est toujours en phase avec le champ incident $\vec{E}_i$ .

■ les trièdres $(\vec{E}_i, \vec{B}_i, \vec{k}_i)$ , $(\vec{E}_r, \vec{B}_r, \vec{k}_r)$ et $(\vec{E}_t, \vec{B}_t, \vec{k}_t)$ sont directs..

**3) ♦ Expression de la relation de structure d'une onde plane :** $\underline{\vec{B}}(M,t) = \dfrac{\vec{k}}{\omega} \wedge \underline{\vec{E}}(M,t)$ .

**4) ♦ Expressions des champs** $\underline{\vec{E}}_i(M,t)$ et $\underline{\vec{B}}_i(M,t)$ **de l'onde incidente :**

$$\underline{\vec{E}}_i(M,t) = \underline{E}_{ix}(M,t).\vec{e}_x = E_{0i}\, e^{i\left[\omega t - k_1 (y \sin\theta_1 - z\cos\theta_1)\right]}.\vec{e}_x$$

$$\underline{\vec{B}}_i(M,t) = \frac{\vec{k}_i}{\omega} \wedge \underline{\vec{E}}_i(M,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{k_1 \sin\theta_1}{\omega} \\ -\dfrac{k_1\cos\theta_1}{\omega} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \underline{E}_{ix} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{k_1\cos\theta_1}{\omega}\underline{E}_{ix} \\ -\dfrac{k_1 \sin\theta_1}{\omega}\underline{E}_{ix} \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\underline{\vec{B}}_i(M,t) = \begin{cases} \underline{B}_{ix} = 0 \\ \underline{B}_{iy} = -\dfrac{k_1\cos\theta_1}{\omega}\underline{E}_{ix} = -\dfrac{k_1 E_{0i}\cos\theta_1}{\omega} e^{i\left[\omega t - k_1 (y\sin\theta_1 - z\cos\theta_1)\right]} \\ \underline{B}_{iz} = -\dfrac{k_1\sin\theta_1}{\omega}\underline{E}_{ix} = -\dfrac{k_1 E_{0i}\sin\theta_1}{\omega} e^{i\left[\omega t - k_1 (y\sin\theta_1 - z\cos\theta_1)\right]} \\ \text{où } \dfrac{k_1 E_{0i}}{\omega} = \dfrac{E_{0i}}{v_1} = B_{0i} \end{cases}$$

**5) ♦ Expressions des champs** $\underline{\vec{E}}_r(M,t)$ et $\underline{\vec{B}}_r(M,t)$ **de l'onde réfléchie :**

Le champ réfléchi est en phase avec le champ incident, donc on a :

$$\underline{\vec{E}}_r(M,t) = \underline{E}_{rx}(M,t).\vec{e}_x = E_{0r}\, e^{i\left[\omega t - k_1 (y \sin\theta_1 + z\cos\theta_1)\right]}.\vec{e}_x$$

$$\underline{\vec{B}}_r(M,t) = \frac{\vec{k}_r}{\omega} \wedge \underline{\vec{E}}_r(M,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{k_1 \sin\theta_1}{\omega} \\ \dfrac{k_1\cos\theta_1}{\omega} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \underline{E}_{rx} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{k_1\cos\theta_1}{\omega}\underline{E}_{rx} \\ -\dfrac{k_1 \sin\theta_1}{\omega}\underline{E}_{rx} \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\vec{\underline{B}}_r(M,t)=\begin{cases}\underline{B}_{rx}=0\\ \underline{B}_{ry}=-\dfrac{k_1\cos\theta_1}{\omega}\underline{E}_{rx}=\dfrac{k_1E_{0r}\cos\theta_1}{\omega}e^{i\left[\omega t-k_1(y\sin\theta_1+z\cos\theta_1)\right]}\\ \underline{B}_{rz}=-\dfrac{k_1\sin\theta_1}{\omega}\underline{E}_{rx}=-\dfrac{k_1E_{0r}\sin\theta_1}{\omega}e^{i\left[\omega t-k_1(y\sin\theta_1+z\cos\theta_1)\right]}\\ \text{où }\dfrac{k_1E_{0r}}{\omega}=\dfrac{E_{0r}}{v_1}=B_{0r}\end{cases}$$

♦ **Expressions des champs** $\vec{E}_t(M,t)$ et $\vec{B}_t(M,t)$ **de l'onde transmise :**

Le champ transmis est toujours en phase avec le champ incident, donc on a :

$$\vec{\underline{E}}_t(M,t)=\underline{E}_{tx}(M,t).\vec{e}_x=E_{0t}\,e^{i\left[\omega t-k_1(y\sin\theta_2-z\cos\theta_2)\right]}.\vec{e}_x$$

$$\vec{\underline{B}}_t(M,t)=\frac{\vec{k}_t}{\omega}\Lambda\vec{\underline{E}}_t(M,t)=\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{k_2\sin\theta_2}{\omega}\\ -\dfrac{k_2\cos\theta_2}{\omega}\end{pmatrix}\Lambda\begin{pmatrix}\underline{E}_{tx}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -\dfrac{k_2\cos\theta_2}{\omega}\underline{E}_{tx}\\ \dfrac{k_2\sin\theta_2}{\omega}\underline{E}_{tx}\end{pmatrix}$$

Soit :

$$\vec{\underline{B}}_t(M,t)=\begin{cases}\underline{B}_{tx}=0\\ \underline{B}_{ty}=-\dfrac{k_2\cos\theta_2}{\omega}\underline{E}_{tx}=\dfrac{k_2E_{0t}\cos\theta_2}{\omega}e^{i\left[\omega t-k_1(y\sin\theta_2-z\cos\theta_2)\right]}\\ \underline{B}_{tz}=\dfrac{k_2\sin\theta_2}{\omega}\underline{E}_{tx}=-\dfrac{k_2E_{0t}\sin\theta_2}{\omega}e^{i\left[\omega t-k_1(y\sin\theta_2-z\cos\theta_2)\right]}\\ \text{où }\dfrac{k_2E_{0t}}{\omega}=\dfrac{E_{0t}}{v_2}=B_{0t}\end{cases}$$

**6)** ♦ Le mode de polarisation de l'onde est **le mode Transverse Electrique (TE)** car le champ électrique est orthogonal au plan d'incidence **(YOZ)**. Il s'appelle aussi **mode H**.

======================================================================

**REMARQUE :** Les expressions réelles de champs électromagnétiques des ondes incidente, réfléchie et transmise s'écrivent :

■ **Onde incidente :**

$$\vec{E}_i(M,t)=E_{ix}(M,t).\vec{e}_x=E_{0i}\cos\left[\omega t-k_1(y\sin\theta_1-z\cos\theta_1)\right].\vec{e}_x$$

$$\vec{B}_i(M,t)=\begin{cases}B_{ix}=0\\ B_{iy}=-\dfrac{k_1\cos\theta_1}{\omega}E_{ix}=-\dfrac{k_1E_{0i}\cos\theta_1}{\omega}\cos\left[\omega t-k_1(y\sin\theta_1-z\cos\theta_1)\right]\\ B_{iz}=-\dfrac{k_1\sin\theta_1}{\omega}E_{ix}=-\dfrac{k_1E_{0i}\sin\theta_1}{\omega}\cos\left[\omega t-k_1(y\sin\theta_1-z\cos\theta_1)\right]\\ \text{où }\dfrac{k_1E_{0i}}{\omega}=\dfrac{E_{0i}}{v_1}=B_{0i}\end{cases}$$

■ **Onde réfléchie :**

$$\vec{E}_r(M,t)=E_{rx}(M,t).\vec{e}_x=E_{0r}\cos\left[\omega t-k_1(y\sin\theta_1+z\cos\theta_1)\right].\vec{e}_x$$

$$\vec{B}_r(M,t) = \begin{cases} B_{rx} = 0 \\ B_{ry} = -\dfrac{k_1 \cos\theta_1}{\omega} E_{rx} = \dfrac{k_1 E_{0r} \cos\theta_1}{\omega} \cos\left[\omega\, t - k_1\,(y \sin\theta_1 + z\cos\theta_1)\right] \\ B_{rz} = -\dfrac{k_1 \sin\theta_1}{\omega} E_{rx} = -\dfrac{k_1 E_{0r} \sin\theta_1}{\omega} \cos\left[\omega\, t - k_1\,(y \sin\theta_1 + z\cos\theta_1)\right] \\ \text{où } \dfrac{k_1 E_{0r}}{\omega} = \dfrac{E_{0r}}{v_1} = B_{0r} \end{cases}$$

■ **Onde transmise :**

$$\vec{E}_t(M,t) = E_{tx}(M,t).\vec{e}_x = E_{0t} \cos\left[\omega\, t - k_1\,(y \sin\theta_2 - z\cos\theta_2)\right].\vec{e}_x$$

$$\vec{B}_t(M,t) = \begin{cases} B_{tx} = 0 \\ B_{ty} = -\dfrac{k_2 \cos\theta_2}{\omega} E_{tx} = \dfrac{k_2 E_{0t} \cos\theta_2}{\omega} \cos\left[\omega\, t - k_1\,(y \sin\theta_2 - z\cos\theta_2)\right] \\ B_{tz} = \dfrac{k_2 \sin\theta_2}{\omega} E_{tx} = -\dfrac{k_2 E_{0t} \sin\theta_2}{\omega} \cos\left[\omega\, t - k_1\,(y \sin\theta_2 - z\cos\theta_2)\right] \\ \text{où } \dfrac{k_2 E_{0t}}{\omega} = \dfrac{E_{0t}}{v_2} = B_{0t} \end{cases}$$

==============================================