Chapitre 3:
Applications linéaires, Matrices et Déterminants
Algèbre-PC-S2

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences Meknès
Université Moulay Ismail

Année Universitaire 2023-2024

Plan

Rappel sur les applications

Définitions

Soient E et F deux ensembles.

- Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction.
  f est dite une application si tout élément de E admet une seule image dans F. $(\forall x \in E, \exists! y \in F, \quad f(x) = y)$.
- Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Soient $A \subset E$ et $B \subset F$.
  - On appelle image directe de A par f, qu'on note $f(A)$, le sous ensemble de F formé par les images des éléments de A;
    $$\begin{aligned} f(A) &= \{f(x), \quad x \in A\} \\ &= \{y \in F / \exists x \in A, \quad f(x) = y\}. \end{aligned}$$
  - On appelle image réciproque de B par f, qu'on note $f^{-1}(B)$, le sous ensemble de E formé par les antécédents des éléments de B; $f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$.

Rappel sur les applications

Définitions

- Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
  - f est dite injective si tout élément de F admet au plus un antécédent. Autrement dit,

$$f \text{ est injective } \iff \forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

  - f est dite surjective si tout élément de F admet au moins un antécédent. Autrement dit,

$$\begin{aligned} f \text{ est surjective } &\iff \forall y \in F, \exists x \in E, \quad f(x) = y \\ &\iff f(E) = F. \end{aligned}$$

  - f est dite bijective si f est à la fois injective et surjective.

Définitions et exemples

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désignera un corps commutatif ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et E et F désigneront deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Définition: Application linéaire

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
f est dite une application linéaire ou homomorphisme de E vers F si :

$$\forall u, v \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \begin{cases} \bullet f(u+v) = f(u) + f(v) \text{ et} \\ \bullet f(\alpha u) = \alpha f(u). \end{cases}$$

Remarque

On voit facilement que :

$$\begin{aligned} f \text{ est linéaire } &\Longleftrightarrow \forall u, v \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v) \\ &\Longleftrightarrow \forall u, v \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v). \end{aligned}$$

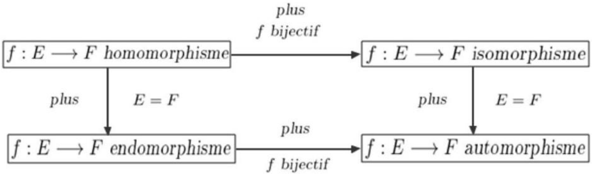
Définitions et exemples

Définitions

Soit $f : E \longrightarrow F$ un homomorphisme .

- f est dite isomorphisme si f est bijective.
- f est dite endomorphisme si $E = F$.
- f est dite automorphisme si f est bijective et $E = F$.

On peut voir ça à travers le schéma suivant :



Notation

$\rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de E vers F.
$\rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E.

Exemples

Exemples

1. L'application nulle:

$$\theta : E \longrightarrow F$$
$$u \longmapsto 0_F$$

   est linéaire.

2. L'application identité :

$$\begin{aligned} id_E : \quad E &\longrightarrow E \\ u &\longmapsto u \end{aligned}$$

   est un automorphisme.

3.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y, 2x-y+z) \end{array}$$

est une application linéaire.
En effet : Soient $u=(x,y,z)$ et $v=(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$, et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f\left((x,y,z)+\left(x',y',z'\right)\right) = f\left(x+x', y+y', z+z'\right) \\ &= \left(\left(x+x'\right)-\left(y+y'\right), 2\left(x+x'\right)-\left(y+y'\right)+\left(z+z'\right)\right) \\ &= \left((x-y)+\left(x'-y'\right), (2x-y+z)+\left(2x'-y'+z'\right)\right) \\ &= (x-y, 2x-y+z)+\left(x'-y', 2x'-y'+z'\right) \\ &= f(x,y,z)+f\left(x',y',z'\right) \\ &= f(u)+f(v). \\ f(\alpha u) &= f(\alpha(x,y,z)) = f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) \\ &= (\alpha x-\alpha y, 2\alpha x-\alpha y+\alpha z) \\ &= \alpha(x-y, 2x-y+z) \\ &= \alpha f(u). \end{aligned}$$

4. L'application

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x+1$$

est non linéaire. En effet :

$$f(2x) = 2x+1 \neq 2f(x) = 2x+2.$$

5. $$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto \overline{z} \quad \text{le conjugué de z}$$

f est linéaire si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et non linéaire si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, (à savoir que $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$). En effet :
Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

- $f(z+z') = \overline{z+z'} = \bar{z} + \overline{z'} = f(z) + f(z')$.
- $f(\alpha z) = \overline{\alpha z} = \overline{\alpha}\bar{z} = \alpha \bar{z} = \alpha f(z)$ si et seulement si $\alpha \in \mathbb{R}$.

(Notons que si $\alpha \in i\mathbb{R}, f(\alpha z) = \bar{\alpha}\bar{z} \neq \alpha \bar{z} = \alpha f(z)$).

Proposition

Soient E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1. Si f et $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$, alors $f + g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$, où $(f+g)(u) = f(u) + g(u)$.
2. Si $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$, où $(\lambda f)(u) = \lambda f(u)$.
3. Si $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F, G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, G)$, où $(g \circ f)(u) = g(f(u))$.
4. Si $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et f est bijective, alors $f^{-1} \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F, E)$.

Corollaire

$(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Propriétés élémentaires

Mentionnons quelques propriétés élémentaires qui permettent de manipuler la notion d'application linéaire.

Proposition

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.

1. $\forall (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in E^n, \forall (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n, f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(u_i)$. Autrement dit, une application linéaire transforme toute combinaison linéaire d'éléments de E en une combinaison linéaire d'éléments de F.
2. $f(0_E) = 0_F$.
3. $f(-u) = -f(u), \forall u \in E$.
4. Si H est un sous espace vectoriel de E, alors $f(H)$ est un sous espace vectoriel de F.
5. Si K est un sous espace vectoriel de F, alors $f^{-1}(K)$ est un sous espace vectoriel de E.

Propriétés élémentaires

Remarque

Pour montrer qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est non linéaire, on montre l'une des propriétés suivantes:

1. $f(0_E) \neq 0_F$.
2. $\exists u \in E, \exists \alpha \in \mathbb{K}, \quad f(\alpha u) \neq \alpha f(u)$.
3. $\exists u, v \in E, f(u+v) \neq f(u) + f(v)$.

Exemples

1. $$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x-y, y, x+2) \end{array}$$

   $f(0,0) = (0,0,2) \neq (0,0,0)$, donc f est non linéaire.

2. $$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x, y^2) \end{array}$$

   - $f(0,0) = (0,0)$.
   - $f(-(1,1)) = f(-1,-1) = (-1,1) \neq -f(1,1) = -(1,1) = (-1,-1)$.
     Donc f est non linéaire.

3. $$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (xy, y+z, 0) \end{array}$$

   $$f(-(1,1,1)) = (1,-2,0) \neq -f(1,1,1) = (-1,-2,0).$$

   Donc f est non linéaire.

Sous espaces associés à une application linéaire

On définit l'image et le noyau d'une application linéaire f de E vers F.

Définition

- On appelle noyau de f, qu'on note $\operatorname{Ker} f$ le sous ensemble de E formé par les antécédents de 0_F.

$$\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E / f(x) = 0_F\}.$$

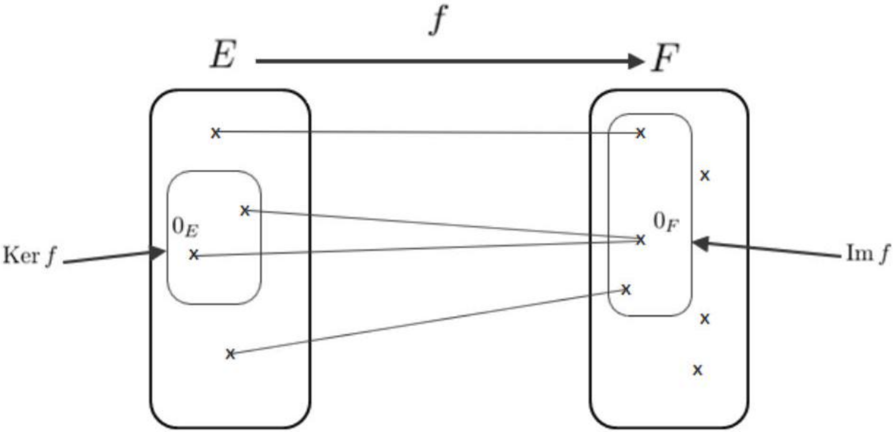
- On appelle Image de f, qu'on note $\operatorname{Im} f$ le sous ensemble de F formé par les images des vecteurs de E.

$$\operatorname{Im} f = \{f(x) / x \in E\} = f(E).$$

On écrit aussi:

$$\operatorname{Im} f = \{y \in F / \exists x \in E, \quad f(x) = y\}.$$

Sous espaces associés à une application linéaire



Sous espaces associés à une application linéaire

Proposition

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On a:

1. $\operatorname{Ker} f$ est un sous espace vectoriel de E.
2. $\operatorname{Im} f$ est un sous espace vectoriel de F.
3. $\operatorname{Ker} f = \{0_E\} \Longleftrightarrow f$ est injective.
4. $\operatorname{Im} f = F \Longleftrightarrow f$ est surjective.

Théorème du rang

Définition

On appelle le rang de f, qu'on note $\operatorname{rg} f$, la dimension du sous espace vectoriel $\operatorname{Im} f$.

$$\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f$$

Proposition

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Si $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ est une famille génératrice de E, alors $f(\mathcal{B}) = \{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ est une famille génératrice de $f(E) = \operatorname{Im} f$.

Théorème du rang

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Si la dimension de E est finie, alors on a :

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E.$$

Théorème du rang

Remarque

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire et soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1}^n$ une base de E. ($\dim E = n$).

- Si f est injective ($\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$), alors $f(\mathcal{B}) = \{f(e_i)\}_{i=1}^n$ est une base de $\operatorname{Im} f$.
- Si f n'est pas injective ($\operatorname{Ker} f \neq \{0_E\}$), alors $f(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$.

Corollaire (Théorème du rang avec $\dim E = \dim F < \infty$)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Si $\dim E = \dim F$, alors :

$$f \text{ est injective } \iff f \text{ est surjective } \iff f \text{ est bijective.}$$

Remarque: Ce résultat s'applique en particulier aux endomorphismes.

Exemples d'application

Exemples

1.
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y, x-y+z) \end{array}$$

une application linéaire.

- Cherchons Ker f =?
  Ker $f = \left\{X \in \mathbb{R}^3 / f(X) = 0_{\mathbb{R}^2}\right\}$.

$$\begin{aligned} X \in \operatorname{Ker} f &\Longleftrightarrow X = (x,y,z) \text{ et } f(x,y,z) = (0,0) \\ &\Longleftrightarrow X = (x,y,z) \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} x - y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{array} \right. \\ &\Longleftrightarrow X = (x,y,z) \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} x = y \\ z = 0. \end{array} \right. \end{aligned}$$

  Donc $X = (y,y,0) = y(1,1,0)$. Par suite $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\{(1,1,0)\}$.

La famille $\{(1,1,0)\}$ est formée par un seul vecteur non nul, donc elle est automatiquement libre, et par suite c'est une base de $\operatorname{Ker} f$. D'où $\dim \operatorname{Ker} f = \operatorname{card}\{(1,1,0)\} = 1$.
Remarquons que f est non injective puisque $\operatorname{Ker} f \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

- Cherchons $\operatorname{Im} f = ?$
  Utilisons le théorème du rang, puisqu'il indique la dimension de $\operatorname{Im} f$ avant de la déterminer, ce qui simplifie dans ce cas, la recherche de $\operatorname{Im} f$.
  On a $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 = 3$. Donc $\dim \operatorname{Im} f = 2$.
  Or $\operatorname{Im} f$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Par suite, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$. Et donc la base canonique $\{(1,0),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ sera aussi une base de $\operatorname{Im} f$.
  Remarquons que f est surjective puisque $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$.

Exemples d'application

2. Soit

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x, x+y, y) \end{array}$$

une application linéaire.

- Cherchons Ker $g = ?$
  Il est facile de voir que $\operatorname{Ker} g = \{(0,0)\}$. Remarquons que g est injective.
- Cherchons $\operatorname{Im} g = ?$
  D'après le thèorème du rang, on a:

$$\dim \operatorname{Ker} g + \dim \operatorname{Im} g = \dim \mathbb{R}^2 = 2.$$

Donc $\dim \operatorname{Im} g = 2$. Mais, puisque g est injective, alors on en déduit directement que l'image d'une base de $\mathbb{R}^2$ est une base de $\operatorname{Im} g$; soit $\{g(1,0), g(0,1)\} = \{(2,1,0), (0,1,1)\}$ cette base.
D'où $\operatorname{Im} g = \operatorname{Vect}\{(2,1,0),(0,1,1)\}$.

Calcul matriciel: Motivation

En général, pour résoudre un système (S) à plusieurs équations et à plusieurs indéterminées, on peut nous ramener à résoudre une seule équation (sera dite matricielle) de la forme $A \cdot X = B$. (où A et B seront deux matrices connues et X une matrice inconnue).

Exemple

$$(S) \quad : \quad \left\{ \begin{array}{rcc} x + y - 2z & = & 1 \\ 2x - y + 3z & = & 0 \\ x + \sqrt{2}y - z & = & 280 \end{array} \right. \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 280 \end{pmatrix}}_{B}$$

Les matrices sons des objets mathématiques que l'on rencontre très couramment en mathématiques, que ce soit en algèbre linéaire ou en géométrie.
Leurs intérêts sont notamment les nombreuses interprétations qu'on peut leur donner, outre le nombre de problèmes qu'elles permettent de résoudre.
N.B. Dans tout ce qui suit m et n sont deux entiers naturels non nuls.

Définitions

- Une matrice A est un tableau de nombres disposés en lignes et en colonnes. Elle est dite d'ordre (ou de type, ou de taille) (m, n) si elle est constituée de m lignes et n colonnes.

$$A = \left(\begin{array}{cc|c|cc} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \hline a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \hline \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right) \leftarrow L_i(A) = \text{la } i^{\text{ème}}\text{ligne de } A$$

$$\downarrow$$

$$C_j(A) = \text{la } j^{\text{ème}}\text{colonne de } A$$

- a_{ij} s'appelle le terme (ou le coefficient) de la matrice A.
- Le terme a_{ij} se trouve au croisement de $L_i(A)$ et $C_j(A)$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice d'ordre $(2, 3)$.

$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice d'ordre $(2, 2)$.

Définitions

- Deux matrices sont dites égales si elles ont le même ordre et les coefficients correspondants sont égaux. Ce qui équivant à dire:
  Si $A = (a_{ij})$ d'ordre (m, n) et $B = (b_{ij})$ d'ordre (p, q), alors

$$A = B \Longleftrightarrow (m, n) = (p, q) \text{ et } a_{ij} = b_{ij}, \forall i \in \{1, \ldots, m = p\}, \forall j \in \{1, \ldots, n = q\}$$

- Si $m = n$, alors A est dite carrée d'ordre n. (le nombre de lignes de A est égal à celui des colonnes).
  Dans ce cas :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

  - $\{a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}\}$ s'appelle la diagonale principale de A.
  - Les éléments a_{ii} s'appellent les éléments diagonaux de A.
  - Les éléments a_{ij} pour $i \neq j$, s'appellent les éléments hors diagonaux de A.
  - On appelle trace de A, qu'on note $\mathrm{tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii} =$ la somme de tous les éléments diagonaux de A.

Notations et exemples

Notations

- $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices de type (m, n) et à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n et à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Exemples

- $A = \begin{pmatrix} 2i & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}) \quad (B \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{C})$ aussi).

Matrices ligne et colonne

Définition

Une matrice ligne (ou uniligne) est une matrice de type $(1, n)$.

Exemples

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$.
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ (Attention, à ne pas confondre la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et le vecteur $(1, 0, 4)$ de $\mathbb{R}^3$).

Définition

Une matrice colonne (ou unicolonne) est une matrice de type $(m, 1)$.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire (supérieure/inférieure)

Définitions

- Une matrice triangulaire supérieure est une matrice carrée $U = (u_{ij}) / u_{ij} = 0 \quad \forall i > j$.

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix}$$

- Une matrice triangulaire inférieure est une matrice carrée $L = (l_{ij}) / l_{ij} = 0 \quad \forall i < j$.

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & \cdots & l_{n(n-1)} & l_{nn} \end{pmatrix}$$

Matrice diagonale

Exemples

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- A et B sont triangulaires supérieures.
- C est triangulaire inférieure.

Définition

Une matrice diagonale est une matrice carrée $D = (d_{ij}) / d_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$.

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice unité et matrice nulle

Définitions

- La matrice unité est la matrice carrée notée I_n (ou simplement I) définie par :

$$I_n = (e_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(e_{ij} est dit le symbole de Kronecker).

- La matrice nulle est une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} / a_{ij} = 0 \quad \forall i, j$. On la note $0 \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

- $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont des matrices unités.
- $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ sont des matrices nulles.

Matrice symétrique/antisymétrique

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.
On appelle matrice transposée de A, qu'on note ${}^tA$ (ou A^T), la matrice d'ordre (n, m), obtenue en interchangeant - dans l'ordre- les lignes et les colonnes de A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}). \ {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}).$$

Définitions

- Une matrice carrée A est dite symétrique si ${}^tA = A$.
- Une matrice carrée A est dite antisymétrique si ${}^tA = -A$. (Dans ce cas, $a_{ii} = 0$).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & -4 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ est symétrique et } B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \text{ est antisymétrique.}$$

Opérations sur les matrices

Définition

On définit sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ deux lois de composition, l'une interne (l'addition $+$) et la seconde externe (.) comme suit:
$\forall A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), \forall \alpha \in \mathbb{K}$,

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \text{ et } \alpha \cdot A = (\alpha a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}).$$

Exemples

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } -2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -14 \\ 2 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Opérations sur les matrices

Propriétés

Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. On a :

1.
   - $A + B = B + A$.
   - $(A + B) + C = A + (B + C)$.
   - 0 est l'élément neutre pour l'addition ($A + 0 = A$).
   - Toute matrice $A = (a_{ij})_{i,j}$ admet un symétrique $-A = (-a_{ij})_{i,j}$, et on a $A + (-A) = 0$.
2.
   - $1.A = A$.
   - $\alpha.(\beta.A) = (\alpha\beta).A$.
   - $(\alpha + \beta).A = \alpha.A + \beta.A$.
   - $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$.

Proposition

$(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $m \times n$.

Exercice

Montrer que $\dim \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) = 2 \times 3 = 6$. En effet:

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_1} + a_{12} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_2} + a_{13} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_3} + a_{21} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_4}$$

$$+ a_{22} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_5} + a_{23} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_6}$$

Donc $\mathcal{B} = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. On vérifie facilement que $\mathcal{B}$ est libre. Par suite, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. D'où $\dim \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) = 6$. $\mathcal{B}$ est dite la base canonique de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

Opérations sur les matrices

Propriétés

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

1. ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$.
2. ${}^t\left({}^tA\right) = A$.
3. ${}^t(\alpha \cdot A) = \alpha \cdot ({}^tA)$.

Produit de deux matrices de type L.C

Soient $L = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ une matrice ligne et $C = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ une matrice colonne.

Le produit $L \cdot C = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

Remarque

Le produit $L \cdot C$ n'est possible que si L et C contiennent le même nombre d'éléments.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \times 2 + (-1) \times (-3) + 0 \times \sqrt{2} + (-8) \times 0 = 5$$

Produit de deux matrices

Soient

$$A = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

Le produit matriciel $A \cdot B$, étant de type $L \cdot C$, on considère les lignes L_1 et L_2 de A, et les colonnes C_1, C_2 et C_3 de B.

Et pour que le produit des lignes L_i et des colonnes C_j soit possible, il faut que le nombre d'éléments de L_i soit égal à celui de C_j. Ce qui veut dire que le nombre de colonnes de A soit le même que celui des lignes de B. Donc, si A est de type (m, n), B doit être de type (n, q). Par suite:

$$A.B = \underset{(2,\boxed{3})}{\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}} \underset{(\boxed{3},3)}{\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \end{array}} = \begin{pmatrix} L_1C_1 & L_1C_2 & L_1C_3 \\ L_2C_1 & L_2C_2 & L_2C_3 \end{pmatrix} = \underset{(2,3)}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}}$$

$$\underset{(3,\boxed{2})}{\begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \underset{(\boxed{2},1)}{\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}} = \underset{(3,1)}{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ i+1 \end{pmatrix}}$$

Produit de deux matrices

Généralisation

Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

- Si $n \neq p$, alors le produit $A \cdot B$ est impossible.
- Si $n = p$, alors $A \cdot B \in \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{K})$ et $A \cdot B = (\alpha_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq q}}$ telle que :

  $\alpha_{ij} = L_i(A) \cdot C_j(B)$

Propriétés

Soient A, B, C trois matrices et $\alpha \in \mathbb{K}$. Quand le produit matriciel est possible, on a:

- $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.
- $(\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B) = \alpha \cdot (A \cdot B)$.
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.
- $A \cdot I_n = A$.
- ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$.
- En général, $A \cdot B \neq B \cdot A$.
- Le produit de deux matrices non nuls peut être nul. (Autrement dit, $A \cdot B = 0 \not\Rightarrow A = 0$ ou $B = 0$).

Exemple

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow A \cdot B \neq B \cdot A$.

$\rightarrow A \neq 0, B \neq 0$, et pourtant $A \cdot B = 0$.

Matrices inversibles

Définition

- Une matrice A d'ordre n est dite inversible à droite, s'il existe une matrice B d'ordre n telle que $A \cdot B = I_n$.
- Une matrice A d'ordre n est dite inversible à gauche, s'il existe une matrice B d'ordre n telle que $B \cdot A = I_n$.
- Une matrice A d'ordre n est dite inversible (ou régulière), s'il existe une matrice B d'ordre n telle que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$.
- B est dite la matrice inverse de A et est notée A^{-1}.
  - Si la matrice inverse existe, alors elle est unique.
  - Une matrice non inversible est dite singulière.

Matrices inversibles

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a:
A est inversible $\Longleftrightarrow$ A est inversible à gauche $\Longleftrightarrow$ A est inversible à droite.

Remarque

Grâce au Théorème ci-dessus, pour montrer qu'une matrice A est inversible, il suffit de montrer que: $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / A \cdot B = I_n$ (ou $B \cdot A = I_n$).

Inverse d'une matrice: Méthode de Gauss

La méthode de Gauss pour inverser une matrice A consiste à faire des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A jusqu'à la transformer en la matrice identité I. On fait simultanément les mêmes opérations élémentaires en partant de la matrice I. On aboutit alors à une matrice qui est A^{-1}.
En pratique, on fait les deux opérations en même temps en adoptant la disposition suivante: à côté de la matrice A que l'on veut inverser, on rajoute la matrice identité pour former un tableau $(A \mid I)$. Sur les lignes de cette matrice augmentée, on effectue des opérations élémentaires jusqu'à obtenir le tableau $(I \mid B)$. Et alors $B = A^{-1}$.
Ces opérations élémentaires sur les lignes sont:

1. $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$: on peut multiplier une ligne par un réel non nul (ou un élément de $\mathbb{K} \setminus \{0\}$).
2. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (et $j \neq i$): on peut ajouter à la ligne L_i un multiple d'une autre ligne L_j.
3. $L_i \leftrightarrow L_j$: on peut échanger deux lignes.

Remarque: Tout ce que vous faites sur la partie gauche de la matrice augmentée, vous devez aussi le faire sur la partie droite.

Exemple: méthode de Gauss

Calculons l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Voici la matrice augmentée:

$$(A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}.$$

On applique la méthode de Gauss pour faire apparaître des 0 sur la première colonne, d'abord sur la deuxième ligne par l'opération élémentaire $L_2 \longleftarrow L_2 - 4L_1$ qui conduit à la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_2 \longleftarrow L_2 - 4L_1$$

Puis un 0 sur la première colonne, à la troisième ligne, avec $L_3 \longleftarrow L_3 + L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_3 \longleftarrow L_3 + L_1$$

On multiplie la ligne L_2 par $-\frac{1}{8}$ afin qu'elle commence par 1

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_2 \longleftarrow -\frac{1}{8} L_2$$

On continue afin de faire apparaître des 0 partout sous la diagonale en faisant l'opération $L_3 \longleftarrow L_3 - 4L_2$, et on multiplie la nouvelle ligne L_3 par 2. Ce qui termine la première partie de la méthode de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad L_3 \longleftarrow 2L_3$$

Il ne reste plus qu'à remonter pour faire apparaître des 0 au-dessus de la diagonale

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad L_2 \longleftarrow L_2 - \frac{5}{8}L_3$$

puis

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad L_1 \longleftarrow L_1 - 2L_2 - L_3$$

Ainsi l'inverse de A est la matrice obtenue à droite et après avoir factorisé tous les coefficients par $\frac{1}{4}$, on obtient

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 7 & -3 & -5 \\ -8 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Une simple vérification implique que $AA^{-1} = I_3$.

Cas particulier (matrice orthogonale)

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est dite orthogonale si $A \cdot {}^tA = {}^tA \cdot A = I_n$.

Remarque

Toute matrice orthogonale A est inversible, et $A^{-1} = {}^tA$.

Exemple

1. Soient A, B et $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / 4AB - 8AC + 3I = 0$.
   Montrons que A est inversible. On a:

$$\begin{aligned} 4AB - 8AC = -3I &\Longleftrightarrow -\frac{4}{3}AB + \frac{8}{3}AC = I \\ &\Longleftrightarrow A\left(-\frac{4}{3}B + \frac{8}{3}C\right) = I. \end{aligned}$$

   Donc A est inversible et son inverse $A^{-1} = -\frac{4}{3}B + \frac{8}{3}C$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Montrons que $A^2 = 2A - I$. En effet :

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.
- $2A - I = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

On a bien $A^2 = 2A - I$.

b) Montrons que A est inversible et calculons A^{-1}.

- On a :

$$A^2 = 2A - I \Longleftrightarrow A^2 - 2A = -I \Longleftrightarrow -A^2 + 2A = I$$
$$\Longleftrightarrow A(-A + 2I) = I.$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = -A + 2I$.

- $A^{-1} = -\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Puissances positives d'une matrice

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / A \neq 0$ et soit $p \in \mathbb{N}^*$.
$A^0 = I_n$.
$A^2 = A \cdot A$.
$A^3 = A \cdot A \cdot A = A^2 \cdot A = A \cdot A^2$.
$\vdots$
$A^p = A \cdot A \ldots A$, p fois.

Propriétés

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $p, q \in \mathbb{N}$. On a:

1. $A^p \cdot A^q = A^{p+q}$.
2. $(A^p)^q = A^{pq}$.

Exemple

Soit $D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$ une matrice carrée diagonale.

Soit $p \in \mathbb{N}$. On peut montrer par récurrence sur p que:

$$D^p = \begin{pmatrix} d_{11}^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}^p & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn}^p \end{pmatrix}.$$

En effet:

- $p = 0$, on a $D^0 = I_n = \begin{pmatrix} d_{11}^0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}^0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn}^0 \end{pmatrix}$.

Puissances positives d'une matrice

$$D^{p+1} = D^p \cdot D = \begin{pmatrix} d_{11}^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}^p & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn}^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} d_{11}^{p+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}^{p+1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn}^{p+1} \end{pmatrix}$$

Formule de binôme de Newton

- Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / A \cdot B = B \cdot A$. Alors,

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k A^k B^{p-k} \quad \text{où } C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!}.$$

- Si $B = I$. On a toujours $A \cdot I = A = I \cdot A$. Par suite :

$$(A+I)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k A^k$$

Cas particulier: $p = 2$

$$\blacksquare (A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A \cdot A + A \cdot B + B \cdot A + B \cdot B.$$

$$= A^2 + \underbrace{A \cdot B + B \cdot A}_{} + B^2$$

$$= A^2 + 2A \cdot B + B^2 \quad \text{si } A \cdot B = B \cdot A.$$

$$\blacksquare (A+B)(A-B) = A \cdot A \underbrace{- A \cdot B + B \cdot A}_{} - B \cdot B.$$

$$= A^2 + 0 - B^2 \quad \text{si } A \cdot B = B \cdot A.$$

$$= A^2 - B^2.$$

Formule de binôme de Newton

Exemple

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On voit que :

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq (A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrices idempotente et nilpotente

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est dite idempotente si $A^2 = A$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que A est idempotente. Montrons que $I_n - A$ est aussi idempotente. En effet:

$$\begin{aligned}(I_n - A)^2 &= I_n^2 - 2I_nA + A^2 \quad (\text{ puisque } I_n \cdot A = A \cdot I_n)\\ &= I_n - 2A + A\\ &= I_n - A.\end{aligned}$$

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
A est dite nilpotente si $\exists p \in \mathbb{N}^* / A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$. p est dit le degré de nilpotence de A.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ est nilpotente de degré 2. } \left(\text{car } A^2 = 0\right)$$

Matrices semblables

Définitions

- Soient $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.
  A et B sont dites équivalentes s'il existe deux matrices inversibles $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K}) / B = Q^{-1} \cdot A \cdot P$.
- Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
  A et B sont dites semblables s'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / B = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Remarque

- L'intérêt de la notion de matrices semblables, c'est qu'on peut calculer les puissances de B si celles de A sont faciles à calculer (par exemple si A est diagonale). On obtient:

$$B^k = P^{-1} A \underbrace{P \cdot P^{-1}}_{\substack{=\\ I_n}} A \underbrace{P}_{\substack{=\\ I_n}} \cdots \underbrace{P^{-1}}_{\substack{=\\ I_n}} \cdot A \cdot P = P^{-1} \cdot \underbrace{A \ldots A}_{k \text{ fois}} \cdot P = P^{-1} \cdot A^k \cdot P.$$

Puissances négatives d'une matrice inversible

Définition

Soit A une matrice inversible. $A^{-p} = \left(A^{-1}\right)^{p}, \forall p \in \mathbb{N}$.

Proposition

Soient A et B deux matrices inversibles de même ordre. On a :

1. $A \cdot B$ est une matrice inversible et $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
2. $\left({}^{t}A\right)^{-1} = {}^{t}\left(A^{-1}\right)$.

Démonstration

1. On a :

$$\begin{aligned}(A \cdot B) \cdot \left(B^{-1} \cdot A^{-1}\right) = A \cdot B \cdot B^{-1} \cdot A^{-1} = A \cdot \left(B \cdot B^{-1}\right) \cdot A^{-1} &= A \cdot I_n \cdot A^{-1} \\ = A \cdot A^{-1} = I_n.\end{aligned}$$

2. On a : $\left({}^{t}A\right) \cdot {}^{t}\left(A^{-1}\right) = {}^{t}\left(A^{-1} \cdot A\right) = {}^{t}I_n = I_n$.

Remarque

- Attention! on ne peut pas simplifier par une matrice. ($A \cdot B = A \cdot C \not\Rightarrow B = C$).
- Mais si A est inversible, alors : $A \cdot B = A \cdot C \Rightarrow B = C$. En effet :
  $A \cdot B = A \cdot C \Rightarrow \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{= I_n} \cdot B = \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{= I_n} \cdot C \Leftrightarrow I_n \cdot B = I_n \cdot C \Leftrightarrow B = C$.

Exemple

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A \cdot C.$$

Pourtant $B \neq C$.

Matrice d'une application linéaire

Dans tout ce qui suit, E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions n et p, respectivement, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{C} = (u_1, \ldots, u_p)$ une base de F.

- Soit
$$f: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i & \longmapsto & f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i). \end{array}$$
une application linéaire.
L'application f est entièrement déterminée par la donnée de l'image d'une base $(f(e_i))_{i=1}^{n}$.
- $e_1 \in E$ et $f(e_1) \in F$, donc $f(e_1) = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \cdots + a_{p1}u_p$.
$e_2 \in E$ et $f(e_2) \in F$, donc $f(e_2) = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{p2}u_p$.
$\vdots$
$e_n \in E$ et $f(e_n) \in F$, donc $f(e_n) = a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \cdots + a_{pn}u_p$.

Définition

On appelle matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, la matrice:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_n) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \mathcal{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C}) = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow u_1 \\ \leftarrow u_2 \\ \vdots \\ \leftarrow u_p \end{array} \end{array}$$

Matrice d'une application linéaire

Notation: Si $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ est notée $\mathcal{M}(f, \mathcal{B})$.

Remarque

1. Attention à l'ordre dans l'écriture de $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})$.
2. Attention: la matrice dépend des bases choisies dans E et F.

Exemples

1. Soit

$$\begin{array}{rccc} \theta : & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & 0_F \end{array}$$

l'application nulle.

$$\mathcal{M}(\theta, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = O_{pn} \quad \text{la matrice nulle}$$

2. Soit

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{id}_E : & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

l'application identité et soit $\mathcal{B}$ une base de E.

$$\mathcal{M}\left(id_E, \mathcal{B}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

3. Soit

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y, z) & \longmapsto & (x+y, y+z) \end{array}.$$

Soient $\mathcal{B} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ et $\mathcal{B}' = ((2,0,0),(0,-1,0),(0,0,3))$ deux bases de $\mathbb{R}^3$. Et soient $\mathcal{C} = ((1,0),(0,1))$ et $\mathcal{C}' = ((2,0),(0,-3))$ deux bases de $\mathbb{R}^2$.

- $$\begin{array}{cccc} & f(1,0,0) & f(0,1,0) & f(0,0,1) & \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \mathcal{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C}) = & \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right. & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} & \left.\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \leftarrow (1,0) \\ \leftarrow (0,1) \end{array} \end{array}$$

  car

  $$\left\{\begin{array}{l} f(1,0,0) = (1,0) = \mathbf{1}(1,0) + \mathbf{0}(0,1) \\ f(0,1,0) = (1,1) = \mathbf{1}(1,0) + \mathbf{1}(0,1) \\ f(0,0,1) = (0,1) = \mathbf{0}(1,0) + \mathbf{1}(0,1)). \end{array}\right.$$

- $$\begin{array}{cccc} & f(2,0,0) & f(0,-1,0) & f(0,0,3) & \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \mathcal{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{C}) = & \left(\begin{array}{c} 2 \\ 0 \end{array}\right. & \begin{array}{c} -1 \\ -1 \end{array} & \left.\begin{array}{c} 0 \\ 3 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \leftarrow (1,0) \\ \leftarrow (0,1) \end{array} \end{array}$$

  car

  $$\left\{\begin{array}{l} f(2,0,0) = (2,0) = \mathbf{2}(1,0) + \mathbf{0}(0,1) \\ f(0,-1,0) = (-1,-1) = -\mathbf{1}(1,0) + -\mathbf{1}(0,1) \\ f(0,0,3) = (0,3) = \mathbf{0}(1,0) + \mathbf{3}(0,1). \end{array}\right.$$

- $$\mathcal{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C}') = \begin{array}{cccc} f(1,0,0) & f(0,1,0) & f(0,0,1) & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \end{array}$$
  $$\mathcal{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C}') = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow (2,0) \\ \leftarrow (0,-3) \end{array}$$

  car
  $$\begin{cases} f(1,0,0) = (1,0) = \frac{1}{2}(2,0) + \mathbf{0}(0,-3) \\ f(0,1,0) = (1,1) = \frac{1}{2}(2,0) - \frac{1}{3}(0,-3) \\ f(0,0,1) = (0,1) = \mathbf{0}(2,0) - \frac{1}{3}(0,-3). \end{cases}$$

  Il est clair que $\mathcal{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C}) \neq \mathcal{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{C}) \neq \mathcal{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C}')$.

Liens avec le calcul matriciel

Proposition

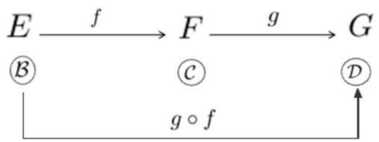
Soient f et $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a:

- $\mathcal{M}(f+g,\mathcal{B},\mathcal{C}) = \mathcal{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C}) + \mathcal{M}(g,\mathcal{B},\mathcal{C})$.
- $\mathcal{M}(\lambda f,\mathcal{B},\mathcal{C}) = \lambda\mathcal{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C})$
  (puisque $(f+g)(e_i) = f(e_i) + g(e_i)$ et $(\lambda f)(e_i) = \lambda f(e_i), \forall e_i \in \mathcal{B}$).

Proposition

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de bases respectives $\mathcal{B},\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.
Si $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ sont deux applications linéaires, alors

$$\mathcal{M}(g\circ f,\mathcal{B},\mathcal{D}) = \mathcal{M}(g,\mathcal{C},\mathcal{D}) \times \mathcal{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C})$$



Corollaire

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire telle que $\dim E = \dim F$. On a:

$$f \text{ est bijective } \iff \mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \text{ est inversible.}$$

Et dans ce cas: $\quad (\mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}))^{-1} = \mathcal{M}\left(f^{-1}, \mathcal{C}, \mathcal{B}\right).$

Démonstration

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] & F \arrow[r, "f^{-1}"] & E \\
\mathcal{B} \arrow[rr, bend right, "f^{-1} \circ f = id_E"'] & \mathcal{C} & \mathcal{B}
\end{tikzcd}$$

Le résultat découle du fait que:

$$I_n = \mathcal{M}\left(id_E, \mathcal{B}\right) = \mathcal{M}\left(f^{-1} \circ f, \mathcal{B}\right) = \mathcal{M}\left(f^{-1}, \mathcal{C}, \mathcal{B}\right) \times \mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})$$

Ecriture matricielle

Soit

$$f : \quad E \longrightarrow F$$
$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \longmapsto f(x) = y = \sum_{i=1}^{p} y_i u_i .$$

une application linéaire.
Cette écriture vectorielle peut être traduite en une écriture matricielle comme suit:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \cdot X = Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} ; \text{ où}$$

X est la matrice d'ordre $(n, 1)$ formée par les coordonnées du vecteur x dans la base $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1}^{n}$ de E, et Y est la matrice d'ordre $(p, 1)$ formée par les coordonnées du vecteur $y = f(x)$ dans la base $\mathcal{C} = (u_i)_{i=1}^{p}$ de F. Et on a bien :

$$\begin{array}{ccl} f(x) = y & : & \text{Ecriture vectorielle} \\ \mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})X = Y & : & \text{Ecriture matricielle.} \end{array}$$

En effet: $\forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad f(e_i) = \sum_{j=1}^{p} a_{ji} u_j, \quad$ où $a_{ji} \in \mathbb{K}$.
On a donc;

$$y = f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \cdots + x_n f(e_n)$$

$$= x_1 (a_{11} u_1 + a_{21} u_2 + \cdots + a_{p1} u_p) + x_2 (a_{12} u_1 + a_{22} u_2 + \cdots + a_{p2} u_p) + \cdots$$

$$+ x_1 (a_{1n} u_1 + a_{2n} u_2 + \cdots + a_{pn} u_p)$$

$$= \underbrace{(x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \cdots + x_n a_{1n})}_{= y_1} u_1 + \underbrace{(x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \cdots + x_n a_{2n})}_{= y_2} u_2 + \cdots$$

$$+ \underbrace{(x_1 a_{p1} + x_2 a_{p2} + \cdots + x_n a_{pn})}_{= y_p} u_p.$$

Donc,

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \cdots + x_n a_{1n} \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \cdots + x_n a_{2n} \\ \vdots \\ x_1 a_{p1} + x_2 a_{p2} + \cdots + x_n a_{pn} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pn} \end{pmatrix}}_{= \mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{= X}$$

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application linéaire, dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ est:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Soit $x = (2,1,4)$, cherchons $y = f(x) =?$

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad Y = A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

  Par suite $f(2,1,4) = (15,7)$.

- En général, on peut trouver l'expression de f:
  Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. $y = f(x) =?$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad Y = A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 3x_3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}.$$

  Par suite: $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & (x_1 + x_2 + 3x_3, -x_1 + x_2 + 2x_3). \end{array}$

Matrice de passage

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E.
$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, e'_i = \alpha_{1i}e_1 + \alpha_{2i}e_2 + \cdots + \alpha_{ni}e_n = \sum_{j=1}^n \alpha_{ji}e_j$.
Considérons l'application linéaire $id_E : \underset{\mathcal{B}'}{E} \longrightarrow \underset{\mathcal{B}}{E}$.

Dans ce cas;

$$\mathcal{M}(id_E, \mathcal{B}', \mathcal{B}) = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} id_E(e'_1) & \cdots & id_E(e'_n) \\ \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} & \cdots & \\ \vdots & & \vdots \\ & \cdots & \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \leftarrow e_1 \\ \vdots \\ \leftarrow e_n \end{array} \end{array}$$

$$= \begin{array}{c c} \begin{array}{cccc} e'_1 & e'_2 & & e'_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \\ \\ \leftarrow e_n \end{array} \end{array},$$

c'est ce qu'on appelle la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et qu'on note $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ ou $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

Retenons donc la définition suivante:

Définition

On appelle matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, la matrice $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = (\alpha_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

Proposition

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est une matrice inversible, et son inverse est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

Démonstration
Soit

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "id_E"] \arrow[rr, bend left, "id_E"] & E \arrow[r, "id_E"] & E \\ \mathcal{B}' & \mathcal{B} & \mathcal{B}' \end{tikzcd}$$

On a:

$$\begin{aligned} I_n = \mathcal{M}\left(id_E, \mathcal{B}'\right) &= \mathcal{M}\left(id_E \circ id_E, \mathcal{B}'\right) \\ &= \mathcal{M}\left(id_E, \mathcal{B}, \mathcal{B}'\right) \cdot \mathcal{M}\left(id_E, \mathcal{B}', \mathcal{B}\right) \\ &= P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} \cdot P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}. \end{aligned}$$

Il en découle que $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ est inversible et $\left(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$.

Exemple

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ une autre base de $\mathbb{R}^2$ où

$$\begin{cases} e'_1 = 2e_1 + 3e_2 \\ e'_2 = e_1 + e_2 \end{cases}$$

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} e'_1 & e'_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \end{array} .$$

$$P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} e_1 & e_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow e'_1 \\ \leftarrow e'_2 \end{array} = (P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Par suite,

$$\begin{cases} e_1 = -e'_1 + 3e'_2 \\ e_2 = e'_1 - 2e'_2 \end{cases}$$

Changement de coordonnées d'un vecteur

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.
Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases de E, et $x \in E$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i$.

On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ deux matrices représentant les coordonnées du vecteur x dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

On a alors, $X = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} \cdot X'$ et $X' = P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}} \cdot X = (P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'})^{-1} \cdot X$.

Exemple

Dans l'exemple précédent, soit $x = (3, 5) \in \mathbb{R}^2$.

$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.

$X' = \begin{pmatrix} ? \\ ? \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}'$.

On a $X' = P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}} \cdot X = (P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'})^{-1} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Action d'un changement de bases sur la matrice d'une application linéaire

Rappel

- Deux matrices A et A' carrées d'ordre n sont dites semblables s'il existe une matrice carrée P inversible d'ordre n telle que $A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$ (ou $A = P^{-1} \cdot A' \cdot P$).
- En général, deux matrices A et A' d'ordre (m, n) sont dites équivalentes s'il existe deux matrices carrées P et Q inversibles, d'ordres respectifs m et n telles que $A' = Q^{-1} \cdot A \cdot P$.

Théorème

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $E, \mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F, P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et Q la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$. $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire, $A = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ et $A' = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{C}')$. On a:

$$A' = Q^{-1} \cdot A \cdot P \quad \left(A \text{ et } A' \text{ sont équivalentes } \right).$$

Le théorème précédent se résume dans le schéma suivant:

$$
\begin{tikzcd}
f : \underset{\mathcal{B}}{E} \arrow[r, "A=\mathcal{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{C})"] & \underset{\mathcal{C}}{F} \arrow[d, shift left, "Q^{-1}"] \\
\underset{\mathcal{B}'}{E} \arrow[u, "P"] \arrow[r, dashed, "A'=\mathcal{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{C}')"] & \underset{\mathcal{C}'}{F} \arrow[u, shift left, "Q"]
\end{tikzcd}
$$

Démonstration

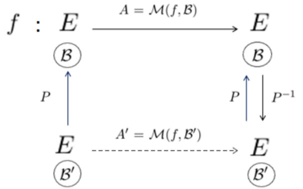
$$
\begin{tikzcd}
\underset{\mathcal{B}}{E} \arrow[r, "f"] & \underset{\mathcal{C}}{F} \arrow[d, "id_F"] \\
\underset{\mathcal{B}'}{E} \arrow[u, "id_E"] \arrow[r, dashed, "f"] & \underset{\mathcal{C}'}{F}
\end{tikzcd}
$$

On a $f = id_F \circ f \circ id_E$, donc

$$
\begin{aligned}
A' &= \mathcal{M}\left(f, \mathcal{B}', \mathcal{C}'\right) = \mathcal{M}\left(id_F \circ f \circ id_E, \mathcal{B}', \mathcal{C}'\right) \\
&= \mathcal{M}\left(id_F, \mathcal{C}, \mathcal{C}'\right) \cdot \mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \cdot \mathcal{M}\left(id_E, \mathcal{B}', \mathcal{B}\right) \\
&= \left[\mathcal{M}\left(id_F, \mathcal{C}', \mathcal{C}\right)\right]^{-1} \cdot A \cdot P \\
&= Q^{-1} \cdot A \cdot P.
\end{aligned}
$$

Corollaire

Soient $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Soit $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$.



On a $A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$.
A et A' sont dites semblables.

Déterminant d'une matrice

L'objet de cette partie est d'étudier l'application notée det;

$$\begin{array}{rlll} \det : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & A & \longmapsto & \det A := |A| \end{array}$$

où $\mathbb{K}$ est un corps commutatif ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Cette application ne s'annule que lorsque la matrice A est non inversible. Ainsi, on a :

$$\det A \neq 0 \Longleftrightarrow A \text{ est inversible.}$$

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 1

Soit $A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$; $A = (a)$. Alors $\det A = |a| = a$.
Exemple $A = (-7)$; $\det A = |-7| = -7$.
Attention: La notation du déterminant n'a rien à voir avec la valeur absolue.

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$; $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Ainsi, det A est le produit des éléments de la diagonale principale moins celui des éléments de la diagonale non principale.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2 \neq 0.$$

Donc A est inversible.

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$; $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Méthode de Sarrus (vraie uniquement pour l'ordre 3)

$$\det A = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$$= (\, a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\,) - (\, a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}\,).$$

Ainsi, pour calculer $\det A$, on recopie les deux premières colonnes, et on calcule la somme des produits des éléments des trois diagonales principales moins la somme des produits des éléments des trois diagonales non principales.

Remarque: On peut procéder de la même manière en recopiant les deux premières lignes.

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right.$$

$$= \Big(3 \times 0 \times 1 + (-1) \times (-2) \times 1 + 1 \times 1 \times 2\Big) - \Big(1 \times 0 \times 1 + 2 \times (-2) \times 3 + 1 \times 1 \times (-1)\Big)$$

$$= 4 - (-13) = 17 \neq 0.$$

Donc A est inversible.

Méthode des cofacteurs

On développe le calcul par rapport à une ligne ou une colonne quelconque.

- Soit par exemple la $1^{\text{ère}}$ ligne.

$$\det A = \begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Exemple

$$\begin{vmatrix} \boxed{3} & \boxed{-1} & \boxed{1} \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = +3 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 17.$$

- Soit par exemple la 2ème colonne.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Exemple

$$\begin{vmatrix} 3 & \boxed{-1} & 1 \\ 1 & \boxed{0} & -2 \\ 1 & \boxed{2} & 1 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 17$$

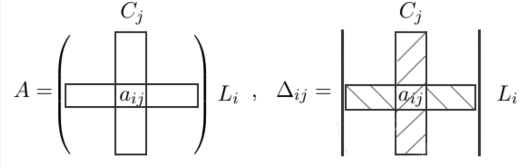
Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n

La méthode des cofacteurs est une méthode générale valable pour tout ordre n. Enonçons d'abord quelques définitions utiles pour décrire cette méthode.

Définition

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On appelle mineur de l'élément a_{ij} qu'on note Δ_{ij}, le déterminant de la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant la ligne L_i et la colonne C_j.



- On appelle cofacteur de a_{ij}, le scalaire $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$. Ainsi $\det A = \sum_{a_{ij}\in V} a_{ij}A_{ij}$ où V désigne une ligne ou une colonne choisie.

Exemple ($V = L_i$)

$$\det A = (-1)^{i+1}a_{i1}\Delta_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n}a_{in}\Delta_{in} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\Delta_{ij}$$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

Développons le calcul suivant la $1^{\text{ère}}$ colonne.

$$\det A = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 8 & 5 & 3 \\ \boxed{0} & 4 & 2 & 2 \\ \boxed{2} & 0 & 4 & 0 \\ \boxed{3} & 2 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 8 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 8 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 8 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Développons le calcul suivant la 3$^{\text{ème}}$ ligne.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ \boxed{2} & \boxed{0} & \boxed{4} & \boxed{0} \\ 3 & 2 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 8 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

Remarques

1. Le meilleur choix de la ligne (ou la colonne) par rapport à laquelle sera développé le calcul, est celui qui contient le maximum de chiffres 0. Il est donc commode de créer des zéros dans ce déterminant sans lui changer sa valeur.

2. On ne change pas la valeur d'un déterminant en ajoutant à une ligne (respectivement une colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (respectivement colonnes). Autrement dit: les seuls opérations qui ne changent pas la valeur d'un déterminant sont:

$$\begin{cases} C_i \longrightarrow C_i + \sum_{j\neq i} \alpha_j C_j \\ L_i \longrightarrow L_i + \sum_{j\neq i} \alpha_j L_j \end{cases} \quad \text{en particulier} \quad \begin{cases} C_i \longrightarrow C_i + \alpha C_j & j \neq i \\ L_i \longrightarrow L_i + \alpha L_j & j \neq i \end{cases}$$

On en déduit le résultat suivant:

- Si deux lignes ou deux colonnes de A sont proportionnels, (à fortiori égales), alors $\det A$ est nul. (i.e: Si $C_i = \alpha C_j$ ou $L_i = \alpha L_j$ pour $i \neq j$, alors $\det A = 0$).
- Un déterminant change de signe si on permute deux lignes ou deux colonnes.

Exemple

$$\begin{array}{l} L_1 \to \\ L_2 \to \\ L_3 \to \\ L_4 \to \end{array}\begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 8 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{r} \\ L_2 - 2L_1 \to \\ L_3 + L_1 \to \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -3 & 3 & \boxed{1} \\ 6 & 1 & 7 \\ 5 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \overset{C_1+C_2}{\downarrow} & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 7 \\ 13 & 8 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \overset{C_2-3C_3}{\downarrow} & \end{array} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 7 & -20 & 7 \\ 13 & 5 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= 1\begin{vmatrix} 7 & -20 \\ 13 & 5 \end{vmatrix} = 35 + 260 = 295.$$

Notons que:

- L'opération $L_2 - 2L_1$ n'est vraie qu'au niveau de L_2.
- L'opération $C_1 + C_2$ est vraie au niveau de C_1 ou C_2.
- L'opération $2C_1 - C_4$ change la valeur du déterminant.
- L'opération $2C_2 + C_3$ est vraie au niveau de C_3.

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n

Propriétés

1. $\det O = 0$.
2. $\det I_n = 1$.
3. Si $A = (a_{ij})$ est diagonale, alors $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.
4. Si $A = (a_{ij})$ est triangulaire, alors $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.
5. $\det({}^tA) = \det A$.
6. $\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$.
7. Si A est inversible, alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.
8. $\det(C_1, \ldots, C_{i-1}, \alpha C_i, C_{i+1}, \ldots, C_n) = \det(L_1, \ldots, L_{j-1}, \alpha L_j, L_{j+1}, \ldots, L_n) = \alpha \det(C_1, \ldots, C_n) = \alpha \det A$, où $C_1, C_2, \ldots, C_n$ désignent les colonnes de A et $L_1, L_2, \ldots, L_n$ désignent les lignes de A.
9. $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$.
10. Si $A = \begin{pmatrix} \boxed{M} & N \\ O & \boxed{P} \end{pmatrix}$ ou $A = \begin{pmatrix} \boxed{M} & O \\ N & \boxed{P} \end{pmatrix}$ où M et P sont deux matrices carrées et O la matrice nulle (A est dite dans ce cas triangulaire par blocs) alors $\det A = \det M \cdot \det P$.

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n

Exemple

1) $A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 9 & 8 \\ 7 & 9 \\ 6 & 5 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$; $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

2) $B = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{matrix}} & \begin{matrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$; $\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$.

Exemple

- $$\begin{array}{c} \begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 7 & \boxed{1} & 5 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{matrix} (C_1 - 7C_2) & C_2 & (C_3 - 5C_2) & (C_4 - 3C_2) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ -16 & 2 & -6 & -6 \\ -22 & 3 & -8 & -8 \end{vmatrix} \end{array} = -1 \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -16 & -6 & -6 \\ -22 & -8 & -8 \end{vmatrix}$$
$$= 0 \quad (car\ C_2 = C_3).$$

- $$\begin{vmatrix} -2 & 6 & 4 \\ -4 & 9 & 32 \\ -6 & 18 & 15 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 9 & 32 \\ 3 & 18 & 15 \end{vmatrix} = -2 \times 3 \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 9 & 32 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= -2 \times 3 \times 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 32 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -18 \begin{array}{c} \begin{matrix} C_1 & C_2 - 2C_1 & \\ \downarrow & \downarrow & \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & \boxed{0} & 4 \\ 2 & \boxed{-1} & 32 \\ 1 & \boxed{0} & 5 \end{vmatrix} \end{array}$$
$$= (-18)(-1) \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 18(5-4) = 18.$$

Applications: Inversion d'une matrice par la méthode des cofacteurs

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On cherche A^{-1}?
La démarche à suivre se résume dans les étapes suivantes :

- Vérifier que $\det A \neq 0$ (donc A sera inversible).
- Déterminer la comatrice de A, notée $\operatorname{com} A$, la matrice carrée d'ordre n obtenue en remplaçant chaque terme de A par son cofacteur.
- Ecrire la transposée de $\operatorname{com} A$: ${}^t(\operatorname{com} A)$.
- Conclure selon la formule: $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^t(\operatorname{com} A)$.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- $\det A = 3 \neq 0$, donc A est inversible.

$$\begin{aligned}
\operatorname{com} A &= \begin{pmatrix} \operatorname{cof}(1) & \operatorname{cof}(2) & \operatorname{cof}(-1) \\ \operatorname{cof}(2) & \operatorname{cof}(3) & \operatorname{cof}(1) \\ \operatorname{cof}(1) & \operatorname{cof}(0) & \operatorname{cof}(2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -4 & 3 & 2 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

- ${}^t\operatorname{com} A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 5 \\ -3 & 3 & -3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et donc $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & -4 & 5 \\ -3 & 3 & -3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Définition

On appelle rang d'un système S de vecteurs d'un espace vectoriel E, la dimension du sous-espace vectoriel F, supposé de dimension finie, engendré par ce système de vecteurs. On le note $\mathrm{rg}(S)$.

Remarque

Ainsi le rang d'un système fini de vecteurs est le nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants extraits de S.

Applications: Rang d'une matrice

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.
Le rang de A, noté $rg(A)$, est le rang du système des vecteurs colonnes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ de A. ($C_i \in \mathbb{K}^m$).

Remarque

$rg(A)$ est égal aussi au rang du système des vecteurs lignes $L_1, L_2, \ldots, L_m$ de A (puisque $\det({}^tA) = \det A$).

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.
Le rang de A est l'ordre du plus grand déterminant non nul extrait de A.

Applications: Rang d'une matrice

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

- $\operatorname{rg} A = 0 \iff A = 0$.
- $\operatorname{rg} A \leq \min(m, n)$.
- $\operatorname{rg}({}^t A) = \operatorname{rg} A$.
- Si A est carrée $(m = n)$, alors:

$$\text{A est inversible } \iff \det A \neq 0 \iff \operatorname{rg} A = n.$$

Applications: Rang d'une matrice

Exemple

1. $$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   $\det A = 17 \neq 0$, donc $\operatorname{rg} A = 3$. On en déduit que les systèmes $S = (C_1, C_2, C_3)$ et $S' = (L_1, L_2, L_3)$ sont libres dans $\mathbb{R}^3$, où $C_1 = (3, 1, 1)$, $C_2 = (-1, 0, 2)$, $C_3 = (1, -2, 1)$, $L_1 = (3, -1, 1)$, $L_2 = (1, 0, -2)$ et $L_3 = (1, 2, 1)$.

2. $$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

   $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, donc $\operatorname{rg} B = 2$.
   On en déduit que le système $S = (L_1, L_2)$ est libre dans $\mathbb{R}^3$, tandis que $S' = (C_1, C_2, C_3)$ est lié dans $\mathbb{R}^2$, où $L_1 = (1, 2, 1)$, $L_2 = (2, 4, 1)$, $C_1 = (1, 2)$, $C_2 = (2, 4)$, $C_3 = (1, 1)$.

Applications: Rang d'une matrice

3.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R}). \quad \operatorname{rg} E \leq 3.$$

- $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0.$
- $\begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 18 \neq 0.$ Donc $\operatorname{rg} E = 3.$
- On en déduit que le système de colonnes $S = (C_1, C_2, C_3)$ est libre dans $\mathbb{R}^4$ et que le système $S' = (L_1, L_2, L_3, L_4)$ est lié dans $\mathbb{R}^3$.