Chapitre 4:
Diagonalisation d'un endomorphisme
Algèbre-PC-S2

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences Meknès
Université Moulay Ismail

Année Universitaire 2023-2024

Plan

Vecteurs propres et valeurs propres

Définition

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et f un endomorphisme sur E non réduit au singleton $\{0_E\}$. On dit qu'un vecteur u de E est un vecteur propre de f si

- $u \neq 0_E$.
- $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(u) = \lambda u$.

λ est alors **unique** et s'appelle valeur propre associée au vecteur propre u.

Vecteurs propres et valeurs propres

Proposition

- Soit id_E l'application identité de E. Pour qu'un scalaire λ soit une valeur propre de f, il faut et il suffit que l'endomorphisme $(f - \lambda id_E)$ **ne soit pas injectif**.
- Soit la matrice M de f relativement à la base canonique $B_c = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ de E. Alors λ est valeur propre de f si et seulement si $det(M - \lambda I_n) = 0$.

Vecteurs propres et valeurs propres

Exemples

Soient $E = \mathbb{R}^2$, $B_c = \{e_1, e_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et f un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini dans B_c par: $f(e_1) = e_2$ et $f(e_2) = -e_1$.

$M = \mathcal{M}(f, B_c) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$.

$\det(M - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$.

λ est valeur propre de $f \Leftrightarrow \det(M - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 0$.

Alors on distingue deux cas:

Premier cas: Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on sait que $(\forall \lambda \in \mathbb{R})$, $\lambda^2 + 1 \neq 0$ donc $det(M - \lambda I_2) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda$ n'est pas une valeur propre de f. Donc f n'admet pas de valeurs propres dans $\mathbb{R}$.

Deuxième cas: Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = i$ ou $\lambda = -i$. D'où f admet deux valeurs propres complexes conjugués $\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$.

Vecteurs propres et valeurs propres

Remarques

- Une valeur propre associée à un vecteur propre de f peut-être **nulle**.
- Les valeurs propres d'un endomorphisme f dépendent essentiellement du corps $\mathbb{K}$.
- Un vecteur propre n'est pas unique. En effet: soit u un vecteur propore associé à une valeur propore λ et soit $v = \alpha u$ avec $\alpha \in \mathbb{K}^*$. Alors $f(u) = \lambda u$ et $f(v) = f(\alpha u) = \alpha f(u) = \alpha(\lambda u) = \lambda(\alpha u) = \lambda v$. D'où v est aussi un vecteur propre associé à λ.

Proposition

Soient $u_1, u_2, ..., u_r$ des vecteurs propres d'un endomorphisme f de E associés, respectivement, aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ distincts deux-à-deux ($\lambda_i \neq \lambda_j$ pour $i \neq j$), alors $\{u_1, u_2, ..., u_r\}$ est libre.

Vecteurs propres et valeurs propres

Définition

Soient f un endomorphisme de E et A la matrice de f relativement à la base canonique B de E. On appelle valeurs propres et vecteurs propres de la matrice A, les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme f associé à A.

Trace d'un endomorphisme

Définition

Soient f un endomorphisme de E et $A = \mathcal{M}(f, B)$ la matrice de f relativement à une base B de E.
Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On appelle la trace de f ou la trace de A, la somme des éléments diagonaux de A:

$$Tr(f) = Tr(A) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}.$$

La trace de A est indépendante de la base choisie.

Remarque

Deux matrices semblables A et B ont la même trace.

Polynôme caractérisitique

Définition

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n. On définit le polynôme caractéristique d'une matrice A comme suit:

$$P_A(X) = \det(A - XI_n)$$

Remarques

- $P_A(0) = \det(A)$.
- Si λ est une valeur propore de la matrice A, alors $P_A(\lambda) = 0$.
- Si $n = 2$, alors $P_A(X) = X^2 - Tr(A)X + \det(A)$.
- Si $n = 3$, alors $P_A(X) = -X^3 + Tr(A)X^2 - (A_{11} + A_{22} + A_{33})X + \det(A)$, avec A_{11}, A_{22} et A_{33} étant les cofacteurs de a_{11}, a_{22} et a_{33} respectivement.

Polynôme caractéristique

Théorème

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{K}$,
$B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E, f un endomorphisme de E et
$A = \mathcal{M}(f, B)$ la matrice de f dans la base B.

- Le polynôme
  $P_A(X) = det(A - XI_n) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} Tr(A) X^{n-1} + ... + det(A)$
  ne dépend pas de la base choisie, on dit que $P_A(X)$ est **le polynôme caractéristique** de l'endomorphisme f ou de la matrice associée A.
- Les valeurs propres de f (ou de A) sont les racines de son polynôme caractéristique.

Remarques

Soient A et B deux matrices semblables, alors: $\det(A) = \det(B)$,
$Tr(A) = Tr(B)$ et $P_A(X) = P_B(X)$.

Polynôme caractéristique

Exemple

Le polynôme caractéristique de la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ est

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \det(A - XI_2) = \begin{vmatrix} -2-X & -6 \\ 4 & 9-X \end{vmatrix} \\ &= X^2 - tr(A)X + \det(A), \end{aligned}$$

où $tr(A) = -2+9 = 7$ et $\det(A) = \begin{vmatrix} -2 & -6 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = -18+24 = 6.$

D'où $P_A(X) = X^2 - 7X + 6 = (X-1)(X-6).$

Donc les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 6.$

Polynôme caractéristique

Théorème de Cayley

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{R}$,
$B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E, f un endomorphisme de E, A la matrice de f dans la base B et $P_A(X)$ le polynôme caractéristique de f (ou de A), alors

$$P_A(A) = O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$$

Exemple

On considère la matrice de l'exemple précédent $A = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$.

On a $P_A(X) = (X - 1)(X - 6)$.
Alors

$$\begin{aligned} P_A(A) &= (A - I_2)(A - 6I_2) \\ &= \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & -6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Multiplicité

Définition

Soit λ une valeur propre de f (ou de A). On appelle l'ordre de multiplicité α de λ, son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique $P_A(X)$.

Rappel

$$\begin{aligned} & \lambda \text{ valeur propre de } f \text{ (ou de } A\text{) d'ordre } \alpha \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda \text{ racine de } P_A(X) \text{ d'ordre } \alpha \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} \exists Q \in K[X] / \ P_A(X) = (X-\lambda)^\alpha Q(X) \\ Q(\lambda) \neq 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} P_A(\lambda) = P'_A(\lambda) = \cdots = P_A^{(\alpha-1)}(\lambda) = 0 \\ P_A^{(\alpha)}(\lambda) \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Sous espace propres

Définition

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{K}$,
$B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E, f un endormorphisme de E, A la matrice de f par rapport à la base B et λ une valeur propre de f (ou A) de multiplicité α. On appelle le sous espace propre associé à λ, l'ensemble E_λ défini par:

$$E_\lambda = \{u \in E \mid f(u) = \lambda u\} = Ker(f - \lambda id_E)$$

Sous espaces propres

Propriétés

- E_λ est un sous espace vectoriel de E.
- E_λ est la réunion de $\{0_E\}$ et l'ensemble des vecteurs propres associés à λ.
- $1 \leq dim(E_\lambda) \leq \alpha$.

Sous espaces propres

Exemple

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \mathcal{M}(f, B)$

$P_A(X) = -(X-1)^2(X-2)$.
A admet deux valeurs propres $\lambda_1 = 1$ qui est double et $\lambda_2 = 2$ qui est simple.
Soient $E_1 = Ker(f - Id_E)$ le sous-espace propore associé à $\lambda_1 = 1$ et $E_2 = Ker(f - 2Id_E)$ le sous-espace propre associé à $\lambda_2 = 2$.

$$
\begin{aligned}
u = (x, y, z) \in E_1 \quad & \Rightarrow \quad u \in Ker(f - Id_E) \\
& \Rightarrow \quad (f - Id_E)(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
& \Rightarrow \quad (A - I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 6 & 3 & -4 \\ -6 & -3 & 5 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} 6x + 3y - 4z = 0 & (1) \\ -6x - 3y + 5z = 0 & (2) \\ 4x + 2y - 2z = 0 & (3) \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

$(1) + (2) \Rightarrow z = 0 \Rightarrow 2x + y = 0 \Rightarrow y = -2x.$

Sous espaces propres

D'où $u=(x,-2x,0)=x(1,-2,0)=xu_1$.
D'où $E_1 = Vect\left\{u_1=(1,-2,0)\right\}$.
$u_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \{u_1\}$ est libre, d'où $B_1=\{u_1\}$ est une base de E_1 et $\dim E_1 = 1$.

$$\begin{array}{rcc}
u=(x,y,z)\in E_2 & \Rightarrow & u\in Ker(f-2Id_E) \\
 & \Rightarrow & (f-2Id_E)(u)=0_{\mathbb{R}^3} \\
 & \Rightarrow & (A-2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 & \Rightarrow & \begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ -6 & -4 & 5 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 & \Rightarrow & \left\{\begin{array}{ll} 5x+3y-4z=0 & (1) \\ -6x-4y+5z=0 & (2) \\ 4x+2y-3z=0 & (3) \end{array}\right.
\end{array}$$

$(1)+(2) \Rightarrow -x-y+z=0 \Rightarrow z=x+y$.
$(3) \Rightarrow 4x+2y-3x-3y=0 \Rightarrow x=y \Rightarrow z=2x$.
D'où $u=(x,x,2x)=x(1,1,2)=xu_2$.
D'où $E_2 = Vect\left\{u_2=(1,1,2)\right\}$.
$u_2 \neq 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \{u_2\}$ est libre, donc $B_2=\{u_2\}$ est une base de E_2 et $\dim E_2 = 1$.

Diagonalisation d'un endomorphisme

Définitions

1. On dit qu'un endomorphisme f de E est diagonalisable s'il existe une base de E par rapport à laquelle la matrice de f est diagonale.
2. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Proposition

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{K}$ et f un endomorphisme de E. Alors f est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E, formée de vecteurs propres de f.

Théorème

Soit $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$. Pour que f soit diagonalisable il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites:

1. Le polynôme caractéristique $P_f(X)$ a ses racines dans $\mathbb{K}$.

$$P_f(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}, \; avec \; \alpha_1 + ... + \alpha_r = n$$

2. Pour toute valeur propre λ_i de f, la dimension du sous espace propre E_{λ_i} associé à λ_i est égale à l'ordre de multiplicité α_i de λ_i.

$$dim(E_{\lambda_i}) = \alpha_i = ord(\lambda_i), \; \forall i = 1, 2, ..., r$$

Exemple:

On considère $A = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} = M(f, B_{\mathbb{R}^2})$

$P_A(X) = (X-1)(X-6)$

Donc les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 6$.

Alors $E_1 = Ker(f - id_{\mathbb{R}^2}) = vect\{(-2,1)\}$, d'où $dim(E_1) = 1$ car $\{(-2,1)\}$ est libre et $E_2 = Ker(f - 6id_{\mathbb{R}^2}) = vect\{(3,-4)\}$ d'où $dim(E_2) = 1$ car $\{(3,-4)\}$ est libre.

Par conséquent: f est diagonalisable , donc il existe une base B' de $\mathbb{R}^2$ telle que la matrice de f dans B' est diagonale.

On a $u_1 = (-2,1)$ est vecteur propre de f associé à $\lambda_1 = 1$, donc $f(u_1) = u_1$ et $u_2 = (3,-4)$ est vecteur propre de f associé à $\lambda_2 = 6$ alors $f(u_2) = 6u_2$.

D'où:

$$D = M(f, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Remarque

Si l'endomorphisme f de E est diagonalisable, alors E est somme directe des sous-espaces propres de f.

Exemple

Dans l'exemple précédent on a $\{u_1, u_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et on sait que $\{u_1\} \cap \{u_2\} = \emptyset$.
Alors $E_1 \bigoplus E_2 = \mathbb{R}^2$.

Corollaire

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n sur $\mathbb{K}$, si f admet n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$, alors f est diagonalisable.