

Corrigé de l'examen de la session de rattrapage 2024

I-Questions de cours :

1) Caractéristiques des matériaux ferromagnétiques doux et ferromagnétiques durs :

■ **Matériaux ferromagnétiques doux :** L'aimantation augmente rapidement avec le champ appliqué.

▪ Ils sont caractérisés par un cycle d'hystérésis étroit : les champs B_r et H_c sont faibles ($H_c < 1000$ A/m)

▪ Ils s'aimantent et se désaimantent très facilement.

Exemple : les alliages fer-silicium, fer-nickel et fer-cobalt, les ferrites douces et les alliages métalliques.

Utilisation : On les utilise pour réaliser des circuits magnétiques de machines (moteurs, transformateurs).

■ **Matériaux ferromagnétiques durs :**

▪ Ils sont caractérisés par un cycle d'hystérésis très large : les champs B_r et H_c sont très élevés,
 $0.2 < B_r < 1.3$ T et $50 < H_c < 1\ 500$ kA/m

▪ Ils s'aimantent et se désaimantent très difficilement.

Exemple : La magnétite (Fe_3O_4), les alliages d'aluminium (Al), de nickel (Ni), de cobalt (Co) de fer (Fe), de cuivre (Cu) et de titanate (Ti).

Utilisation : On les utilise pour fabriquer des aimants permanents.

2) ■ Expression de la densité volumique ω_{em} de l'énergie associée à une onde électromagnétique plane :

C'est la somme de la densité d'énergie électrique : $\omega_e = \frac{1}{2} \epsilon \cdot E^2 (M)$ où $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$

et la densité d'énergie magnétique : $\omega_m = \frac{1}{2} \frac{B^2 (M)}{\mu}$ où $\mu = \mu_0 \mu_r$

Soit : $\omega_{em} = \omega_e + \omega_m = \frac{1}{2} \epsilon \cdot E^2 (M) + \frac{1}{2} \frac{B^2 (M)}{\mu}$

■ **Dans tout milieu où se propage une onde électromagnétique plane, il y a équipartition de l'énergie électrique et de l'énergie magnétique $\omega_e = \omega_m$:**

Démonstration :

Considérons la relation de structure des ondes planes $E = v \cdot B$ où v est la vitesse de propagation de la

phase de l'onde, donnée par : $v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$.

Le carré de la relation de structure s'écrit donc : $E^2 = v^2 B^2 = \frac{B^2}{\mu\epsilon}$

D'où l'égalité des densités des énergies électrique et magnétique :

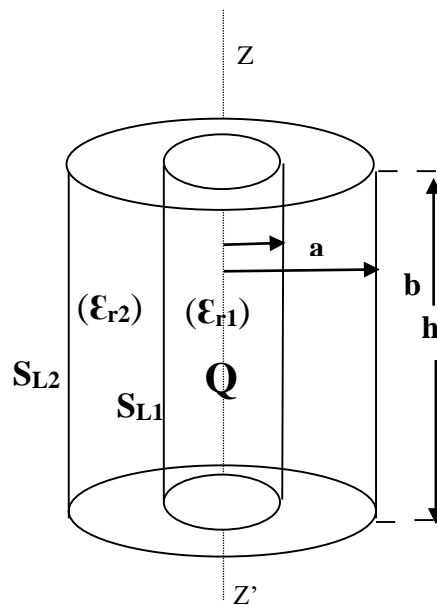
$$\omega_e = \frac{1}{2} \epsilon \cdot E^2 = \frac{1}{2} \epsilon \cdot v^2 B^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu\epsilon} = \omega_m$$

La densité d'énergie électromagnétique se réduit donc à : $\omega_{em} = 2\omega_e = 2\omega_m = \epsilon \cdot E^2 = \frac{B^2}{\mu\epsilon}$

II- Problème sur les milieux diélectriques

■ le milieu (MD1) développe une polarisation de la forme : $\vec{P}_1(M) = \frac{(\epsilon_{r1} - 1)Q}{2\pi\epsilon_{r1} h \cdot a^2} r \cdot \vec{e}_r$

■ le milieu (MD2) développe une polarisation de la forme : $\vec{P}_2(M) = \frac{(\epsilon_{r2} - 1)Q}{2\pi\epsilon_{r2} h \cdot r} \vec{e}_r$



1)

♦ Etude de la symétrie de la densité ρ de charge électrique

La distribution de charge réelle ρ possède deux types de plans de symétrie :

- Un plan vertical contenant l'axe $Z'Z$: plan contenant la base (\vec{e}_r, \vec{e}_z)
- Un plan horizontal perpendiculaire à l'axe $Z'Z$: plan contenant la base (\vec{e}_r, \vec{e}_z)

Rappelons que le champ électrique (ici \vec{E}_0 créé par cette distribution) est toujours tangent au plan de symétrie de la distribution de charge.

Etant donné que le champ \vec{E}_0 est tangent en même temps aux plans de symétrie (\vec{e}_r, \vec{e}_z) et (\vec{e}_r, \vec{e}_z) , il appartient donc à leur intersection qui est la droite de vecteur unitaire \vec{e}_r , d'où :

$$\vec{E}_0(M) = E_0(M) \cdot \vec{e}_r$$

♦ Etude de l'invariance de la distribution de charge ρ :

En tout point $M(r, \theta, z)$ la densité de charge $\rho(M)$ est définie par :

$$\rho(M) \begin{cases} = \rho & \text{si } r \leq a \\ = 0 & \text{si } r > a \end{cases}$$

Donc $\rho(M)$ ne dépend que de la coordonnée r du point M : $\rho(M) = \rho(r)$. Elle est donc invariante par rapport à θ et z . Il en est de même pour le champ $\vec{E}_0(M)$, soit :

$$\vec{E}_0(M) = \vec{E}_0(r)$$

En résumé on a :

$$\vec{E}_0(M) = E_0(r) \cdot \vec{e}_r$$

Le champ $\vec{E}_0(M)$ est radial (dirigé suivant la direction du vecteur radial \vec{e}_r de la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, et son module ne dépend que de la coordonnée r du point $M(r, \theta, z)$.

Et comme le milieu diélectrique est parfait alors le champ électrique dépolarisant $\vec{E}_d(M)$ (champ créé par le MD) est également de la même forme que $\vec{E}_0(M)$:

$$\vec{E}_d(M) = E_d(r) \cdot \vec{e}_r$$

Par suite le champ électrique total est tel que :

$$\vec{E}_{\text{tot}}(M) = E_0(r) \cdot \vec{e}_r + E_d(r) \cdot \vec{e}_r = E_{\text{tot}}(r) \cdot \vec{e}_r$$

Il en est de même pour l'induction électrique :

$$\vec{D}(M) = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}_{\text{tot}}(M) = \varepsilon_0 \varepsilon_r E_{\text{tot}}(r) \cdot \vec{e}_r = D(r) \cdot \vec{e}_r$$

2) a- Expressions des champs électriques $\vec{E}_{1,\text{tot}}(M)$ à l'intérieur du milieu MD1 et $\vec{E}_{2,\text{tot}}(M)$ à l'intérieur du milieu MD2 :

Les deux milieux étant parfaits, on utilise donc l'expression :

$$\vec{P}_i(M) = \varepsilon_0 (\varepsilon_{ri} - 1) \vec{E}_{i,\text{tot}}(M) \quad \text{où } i = 1, 2$$

■ à l'intérieur du milieu MD1 : $r \leq a$,
$$\vec{E}_{1,\text{tot}}(M) = \frac{\vec{P}_1(M)}{\varepsilon_0 (\varepsilon_{r1} - 1)} = \frac{Q \cdot r}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} h a^2} \vec{e}_r$$

■ à l'intérieur du milieu MD2 : $a \leq r \leq b$,
$$\vec{E}_{2,\text{tot}}(M) = \frac{\vec{P}_2(M)}{\varepsilon_0 (\varepsilon_{r2} - 1)} = \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} h r} \vec{e}_r$$

b- Expressions des champs d'induction électrique $\vec{D}_{1,\text{tot}}(M)$ et $\vec{D}_{2,\text{tot}}(M)$ correspondants :

$$\vec{D}_1(M) = \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \vec{E}_{1,\text{tot}}(M) = \frac{Q}{2\pi h a^2} r \cdot \vec{e}_r \quad ; \quad \vec{D}_2(M) = \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} \vec{E}_{2,\text{tot}}(M) = \frac{Q}{2\pi h r} \cdot \vec{e}_r$$

3) Densités de charge électrique de polarisation (charges fictives):

■ Densités volumiques de charge fictive :

◆ Dans le volume du milieu MD1:

$$\rho_{P1}(M) = -\text{div} \vec{P}_1(M) = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \cdot P_{1r}) = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{(\varepsilon_{r1} - 1) Q}{2\pi \varepsilon_{r1} h a^2} r^2 \right) = -\frac{(\varepsilon_{r1} - 1) Q}{\pi \varepsilon_{r1} h a^2}$$

◆ Dans le volume du milieu MD2:

$$\rho_{P2}(M) = -\text{div} \vec{P}_2(M) = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \cdot P_{2r}) = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{(\varepsilon_{r2} - 1) Q}{2\pi \varepsilon_{r2} h r} \right) = 0$$

■ Densités surfaciques de charge fictive :

◆ Au niveau de la surface latérale S_{L2} de rayon b (délimitant le milieu MD2):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{PS_{L2}} (M \in S_{L2}) = \vec{P}_2(M \in S_{L2}) \cdot \vec{n}_{ext}(M \in S_{L2}) \\ \vec{n}_{ext}(M \in S_{L2}) = \vec{e}_r \quad ; \quad r = b \\ \\ \sigma_{PS_{L2}} = \frac{(\epsilon_{r2} - 1)Q}{2\pi\epsilon_{r2}h.b} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r = \frac{(\epsilon_{r2} - 1)Q}{2\pi\epsilon_{r2}h.b} \end{array} \right.$$

♦ Au niveau de la surface latérale S_{L1} de rayon a (surface commune délimitant les milieux MD1 et MD2):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{PS_{L1}} (M \in S_{L1}) = \vec{P}_1(M \in S_{L1}) \cdot \vec{e}_r + \vec{P}_2(M \in S_{L1}) \cdot (-\vec{e}_r) \\ \vec{n}_{ext}(M \in S_{L1}) = \vec{e}_r \text{ pour MD1 et } -\vec{e}_r \text{ pour MD2} \quad ; \quad r = a \\ \\ \sigma_{PS_{L1}} = \frac{(\epsilon_{r1} - 1)Q}{2\pi\epsilon_{r1}h.a} - \frac{(\epsilon_{r2} - 1)Q}{2\pi\epsilon_{r2}h.a} = \frac{Q}{2\pi h.a} \left(\frac{(\epsilon_{r1} - 1)}{\epsilon_{r1}} - \frac{(\epsilon_{r2} - 1)}{\epsilon_{r2}} \right) \end{array} \right.$$

4) a- Expressions des charges de polarisation :

■ Charge volumique dans le MD1 : $Q_{V1}^P = \iiint_{V1} \rho_{P1} dV1 = -\frac{(\epsilon_{r1} - 1)Q}{\pi\epsilon_{r1}h.a^2} \cdot \pi a^2 h = -\frac{(\epsilon_{r1} - 1)Q}{\epsilon_{r1}}$

■ Charge fictive volumique dans le MD1 : $Q_{V2}^P = \iiint_{V2} \rho_{P2} dV2 = 0$ car $\rho_{P2} = 0$

■ Charge fictive surfacique au niveau de S_{L1} :

$$\begin{aligned} Q_{PS_{L1}} &= \iint_{S1} \sigma_{PS_{L1}} dS_{L1} = \sigma_{PS_{L1}} \cdot S_{L1} = \frac{Q}{2\pi h.a} \left(\frac{(\epsilon_{r1} - 1)}{\epsilon_{r1}} - \frac{(\epsilon_{r2} - 1)}{\epsilon_{r2}} \right) 2\pi a h \\ &= \left(\frac{(\epsilon_{r1} - 1)}{\epsilon_{r1}} - \frac{(\epsilon_{r2} - 1)}{\epsilon_{r2}} \right) Q \end{aligned}$$

■ Charge fictive surfacique au niveau de S_{L2} :

$$Q_{PS_{L2}} = \iint_{S2} \sigma_{PS_{L2}} dS_{L2} = \sigma_{PS_{L2}} \cdot S_{L2} = \frac{(\epsilon_{r2} - 1)Q}{2\pi\epsilon_{r2}h.b} \cdot 2\pi b h = \frac{(\epsilon_{r2} - 1)Q}{\epsilon_{r2}}$$

b- La charge totale fictive de de polarisation est toujours nulle, soit :

$$Q_{V1}^P + Q_{V2}^P + Q_{PS_{L1}} + Q_{PS_{L2}} = -\frac{(\epsilon_{r1} - 1)Q}{\epsilon_{r1}} + 0 + \left(\frac{(\epsilon_{r1} - 1)}{\epsilon_{r1}} - \frac{(\epsilon_{r2} - 1)}{\epsilon_{r2}} \right) Q + \frac{(\epsilon_{r2} - 1)Q}{\epsilon_{r2}} = 0$$

5) a- Densités volumiques d'énergie électrostatique :

♦ Densité d'énergie emmagasinée dans le MD1 :

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_{r1} E_1^2(M) = \frac{Q^2 \cdot r^2}{8\pi^2 \epsilon_0 \epsilon_{r1} h^2 \cdot a^4}$$

♦ Densité d'énergie emmagasinée dans le MD2 :

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_{r2} E_2^2(M) = \frac{Q^2}{8\pi^2 \epsilon_0 \epsilon_{r2} h^2 r^2}$$

b- Energies électrostatiques W_1 et W_2 emmagasinées dans les deux milieux :

Rappel : L'élément de volume en coordonnées cylindriques s'écrit : $dV = r dr \cdot d\theta \cdot dz$

♦ Energie électrostatique emmagasinée dans le MD1 :

$$W_1 = \iiint_{V_1} \omega_1 dV_1 = \frac{Q^2}{8\pi^2 \epsilon_0 \epsilon_{r1} h^2 a^4} \int_0^a r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = \frac{Q^2}{16\pi \epsilon_0 \epsilon_{r1} h}$$

♦ Energie électrostatique emmagasinée dans le MD2 :

$$W_2 = \iiint_{V_2} \omega_2 dV_2 = \frac{Q^2}{8\pi^2 \epsilon_0 \epsilon_{r2} h^2 a^2} \int_a^b \frac{dr}{r} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = \frac{Q^2}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_{r2} h} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

=====