Examen de Mécanique des Solides

Session Normale 03/01/2019 - Durée de l'épreuve : 2h

N.B. Les trois exercices sont indépendants.

Exercice 1 : (5 pts)

Pour passer d'un repère $R(O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ absolu à un repère $R_S(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ lié au solide S.

1) Mettre en évidence les angles d'Euler sur une figure claire (on introduira deux repères intermédiaires $R_1(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z_0})$ et $R_2(O, \vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$).
2) Définir l'orientation de ces angles et préciser la signification de chacun des angles.
3) Donner la vitesse de rotation instantanée $\overrightarrow{\Omega}_{R_S/R}$.
4) Exprimer $\overrightarrow{\Omega}_{R_S/R}$ dans les bases liées $R_2(O, \vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$ et $R_S(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Exercice 2 : (5 pts)

Dans un repère orthonormé direct $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, on considère les trois vecteurs :

$\overrightarrow{V}_1 = \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}$, $\overrightarrow{V}_2 = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{z}$, et $\overrightarrow{V}_3 = \alpha\overrightarrow{x} + \beta\overrightarrow{y} - 2\overrightarrow{z}$, d'origine respectifs : $A_1(\frac{-1}{2}, 1, 0)$; $A_2(0, 0, \frac{-1}{2})$ et $A_3(\frac{-1}{2}, 0, -1)$, α et β sont des nombres réels.

1) Déterminer les éléments de réduction du torseur [T] associé au système des trois vecteurs au point O.
2) Déterminer la nature du torseur [T].
3) Trouver l'axe central du torseur [T].
4) Pour quelles valeurs de α et β le torseur [T] est-il nul.
5) Quelle propriété vérifie les vecteurs $\overrightarrow{V}_1$, $\overrightarrow{V}_2$ et $\overrightarrow{V}_3$?

Exercice 3 : (5 pts)

Soit un rectangle homogène de masse m, d'épaisseur négligeable et de côtés a et b (voir figure 1)

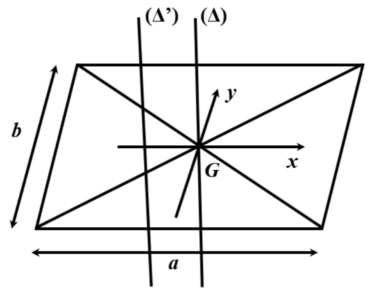

Figure 1

1) Calculer le moment d'inertie J de ce rectangle par rapport à son axe de symétrie Δ.
   Δ est l'axe passant par le centre du rectangle perpendiculaire au plan du rectangle.
2) Énoncer (sans le démontrer) le théorème de Huygens pour le moment d'inertie d'un solide indéformable.
3) En déduire le moment d'inertie J' du rectangle par rapport à l'axe Δ' perpendiculaire au plan du rectangle et passant par le milieu I d'un de ses côtés de longueur a.

Problème : (5 pts)

Une bille sphérique homogène, de masse m et de rayon b, roule sans glisser à l'intérieur d'un bol sphérique fixe de rayon R, ($R > b$). La position du centre C de la bille est repérée par l'angle θ (voir figure 2).

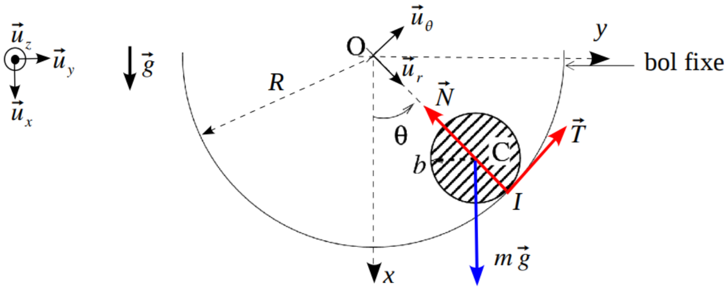

Figure 2

On suppose que le centre de la bille reste toujours dans le même plan (plan de la figure) et que la bille tourne toujours autour d'un axe dont la direction est perpendiculaire au plan de la figure. La bille reste toujours en contact avec le bol. Le moment d'inertie de la bille par rapport à un axe passant par son centre est $J = \frac{2mr^2}{5}$. La force de contact du bol sur la bille est schématisée par le glisseur $(I, \overrightarrow{R} = \overrightarrow{N} + \overrightarrow{T})$.

1) **Torseur cinématique :**

   (a) Déterminer la vitesse $\overrightarrow{V}(C)_{/R}$

   (b) Déterminer le vecteur instantané de rotation $\overrightarrow{\Omega}$ de la bille en fonction de θ, r et R.

   (c) En déduire le torseur cinématique de la bille au point C.

2) **Etude par le Principe Fondamental de la Dynamique :**

   (a) En utilisant le théorème de moment cinétique, trouver une relation entre la force de frottement du bol sur la bille et l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$.

   (b) En utilisant le principe fondamental de la dynamique, déterminer l'équation différentielle du mouvement de la bille (l'équation différentielle dont $\theta(t)$ est solution, t est le temps).

   (c) En supposant que l'angle θ reste petit, en déduire la période des oscillations de la bille.

3) **Etude par l'énergie :**

   (a) Déterminer l'énergie cinétique de la bille en fonction de $\dot{\theta}$ et des données du problème.

   (b) Retrouver l'équation différentielle du mouvement de la bille par un théorème d'énergie.