Année Universitaire 2022-2023
Parcours MIP
Module P135

Examen de Mécanique des Solides

21/01/2023 - Durée de l'épreuve : 2h

<u>Exercice 1 :</u> (6 pts)

Le repérage d'un solide ou d'un système de solides dans un repère $R_0(O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ nécessite plus d'information. En effet, le positionnement d'un solide auquel on lie un repère $R(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ nécessite d'introduire les angles caractéristiques notés ψ, θ et φ. On introduira deux repères intermédiaires $R_1(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z_0})$ et $R_2(O, \vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$.

1) Préciser ces angles et leurs vitesses de rotation.
2) Définir l'orientation de ces angles par des schémas.
3) Écrire le vecteur de taux de rotation $\overrightarrow{\Omega}_{R/R_0}$, puis l'exprimer dans R_0 et R.
4) En utilisant le mouvement inverse, donner l'expression de $\overrightarrow{\Omega}_{R/R_0}$ dans R_0 et R.

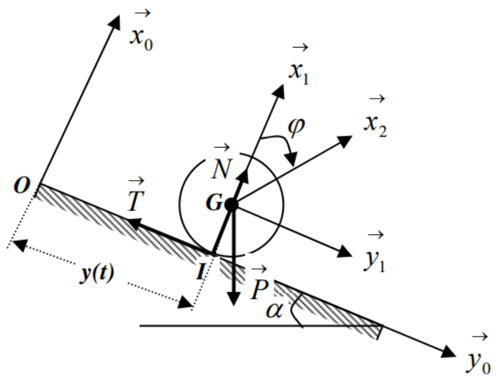
<u>Exercice 2 :</u> (4 pts)

On considère les vecteurs : $\overrightarrow{U} = \alpha\vec{z}$ et $\overrightarrow{V} = \beta\vec{x} + 3\vec{y}$, définis relativement à un repère orthonormé direct $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et liés respectivement aux points : $A(1, 1, \alpha)$ et $B(0, 2, 0)$ et où α et β sont des nombres réels.

1) Déterminer les éléments de réduction du torseur [T]=(A,$\overrightarrow{U}$)+(B,$\overrightarrow{V}$) associé au système des deux vecteurs au points O.
2) Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que [T] soit un glisseur ? Déterminer alors support.

Exercice 3 : (10 pts)

Un disque plein de rayon a, de masse m roule sans glisser sous l'effet de la gravitation sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Soit $R_0(O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$un repère fixe lié au plan incliné, $R_1(G, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$ lié au centre G du disque et $R_2(G, \vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_2})$ un repère en rotation par rapport à l'axe $\vec{z_2} = \vec{z_2}$ tel que $(\vec{x_1}, \vec{x_2})$=$(\vec{y_1}, \vec{y_2})$=φ.



A l'instant initial, le disque est immobile. La réaction au point de contact entre le disque et le plan incliné a deux composantes, l'une normale $\overrightarrow{N}$ au plan incliné, l'autre $\overrightarrow{T}$ tangentielle à ce dernier.

Le tenseur d'inertie du disque en son centre d'inertie **G** dans le repère R_2 est donné par :

$$I_{C/R_2} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 2A \end{bmatrix}$$ avec $A = \frac{Ma^2}{4}$; On prendra R_1 comme repère de projection.

1) Déterminer la vitesse $\overrightarrow{V}(G)$ et $\overrightarrow{a}(G)$ l'accélération du point **G** ;
2) Appliquer le théorème de la résultante dynamique au disque ;
3) Appliquer le théorème du moment dynamique au disque ;
4) Trouver une équation scalaire liant les paramètres cinématiques $\dot{y}$, $\dot{\theta}$ et et qui traduisent la condition de roulement sans glissement du disque sur le plan incliné ;
5) En déduire les expressions de N, T, $\ddot{y}$ et $\ddot{\varphi}$ en fonction de m, g, α et a ;
6) Déterminer l'énergie cinétique du disque en fonction de m, a, $\dot{y}$ et $\dot{\varphi}$;
7) Exprimer l'énergie cinétique du disque en fonction de m et $\dot{y}$ en tenant compte de la condition de roulement sans glissement ;
8) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique au disque, retrouver l'expression de l'accélération linéaire $\ddot{y}$.