Examen de Mécanique des Solides

Session Janvier 2021 - Durée de l'épreuve : 1h 15 min

N.B. Les trois exercices sont indépendants.

Exercice 1 : (4 pts)

On considère les trois vecteurs : $\overrightarrow{V}_1 = -\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}$, $\overrightarrow{V}_2 = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{z}$, et $\overrightarrow{V}_3 = \alpha\overrightarrow{x} + \beta\overrightarrow{y} - 2\overrightarrow{z}$, définis relativement à un repère orthonormé direct $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et liés respectivement aux points : A($\frac{-1}{2}$, 1, 0) ; B(0, 0, $\frac{-1}{2}$) et C($\frac{-1}{2}$, 0, -1), α et β sont des nombres réels.

1) Déterminer les éléments de réduction du torseur [T] associé au système des trois vecteurs au point O.
2) Montrer que quel soient α et β le torseur [T].
3) Déterminer l'axe central du torseur [T].
4) Pour quelles valeurs de α et β le torseur [T] est-il nul ? Vérifier que pour ces valeurs les trois vecteurs $\overrightarrow{V}_1$, $\overrightarrow{V}_2$ et $\overrightarrow{V}_3$ sont coplanaires.

Exercice 2 : (4 pts)

Soit (S) un solide constitué par un cube de côté a et $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à (S). Par rapport à un repère $R_0(O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ de référence, le solide (S) est en mouvement de la manière suivante :

Si l'on désigne par A un sommet, et par AB, AC et AD les trois arrêts issues de A, alors :

— L'arrêt AB glisse sur le plan $(O, \vec{x_0}, \vec{y_0})$ de façon quelconque.

— Le cube tourne autour AB.

On défini le repère intermédiaire $R_1(A, \vec{x}, \vec{u}, \vec{z_0})$ par rapport A(x,y,0) dans R_0, $\vec{x}$ unitaire de $\overrightarrow{AB}$ et on pose $\psi = (\vec{x_0}, \vec{y_0})$ et $\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{AC})$

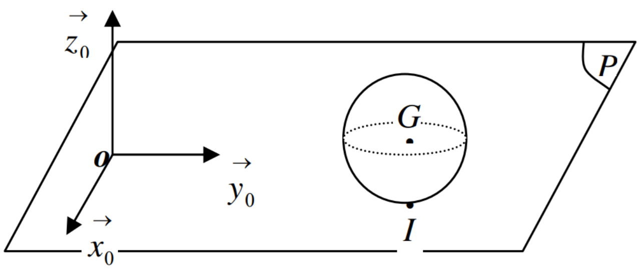
1) Déterminer $\overrightarrow{\Omega}_{S/R_0}$ dans R_1 puis dans R_0 et R

2) Calculer $\overrightarrow{V}_{B/R_0}$ et $\overrightarrow{V}_{C/R_0}$, les exprimer dans R_1.

3) Calculer $\overrightarrow{\Gamma}_{B/R_0}$ de deux manières différentes dans R_1.

<u>Exercice 3 :</u> (12 pts)

Une sphère (S) pleine et homogène, de centre G, de rayon a, roule sans glisser de manière quelconque sur un plan horizontal (P).
Soit $R_0(O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ un repère orthonormé fixe lié au plan tel que $\vec{z_0} \perp$ (P).



Soit $R(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère orthonormé direct, lié à la sphère tel que : $\overrightarrow{OG} = x\vec{x_0} + y\vec{y_0} + a\vec{z_0}$. L'orientation du repère R par rapport à R_0 se fait par les angles d'Euler classiques ψ, θ et φ. On prendra R_0 comme repère de projection.

1) Établir les figures planes de rotation de la sphère.

2) Donner l'expression de la vitesse de rotation instantanée de la sphère.

3) Déterminer la vitesse du point de contact de la sphère avec la plan fixe (P).

4) Écrire la condition de roulement sans glissement de la sphère sur le plan.

5) Calculer, par les éléments de réduction en G, les torseurs cinétique et dynamique de (S).

6) Quelle particularité présente le torseur cinétique ?

7) Calculer $2T(S/R_0)$.

8) Que devient les résultats précédents dans l'hypothèse où il y a non glissement en I ?

9) Quelle particularité présente le torseur cinétique ?