Université Moulay Ismail
Faculté des Sciences Meknès
Département de Mathématiques et Informatique

Année universitaire: 2019-2020
Filière: SMA S6
Module: Prob et Proc Stoch
Prof: Boumour Souhail

TD 4

Exercice 1

Soient X et Y deux v.a à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi conjointe de X et Y est donnée par:

$$P(X=j, Y=k) = \frac{a}{j!k!}.$$

1) Déterminer la valeur du réel a.
2) Déterminer les lois marginales de X et Y et leurs nom.
3) Les v.a X et Y sont elles indépendantes?
4) Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Exercice 2

Soient $X_1, ..., X_n$ des v.a i.i.d de loi $\mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0,1[$ et soit $S_n = X_1 + ... + X_n$ leur somme.

1) Pour $s \in [0, n]$, donner la loi conditionnelle de X_1 sachant $(S_n = s)$.
2) Calculer $E(X_1 | S_n = s)$ et en déduire $E(X_1 | S_n)$.

Exercice 3

On considère le couple de v.a (X, Y) de fonction de densité conjointe:

$$\begin{cases} f_{(X,Y)}(x,y) = ce^{-b(x+y)}, & 0 < x < y < +\infty, \\ f_{(X,Y)}(x,y) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Déterminer une relation entre b et c.

Dans la suite, on pose: $c = 2$ et $b = 1$.

2) Déterminer les densités marginales de X et Y.
3) Montrer que X et Y ne sont pas indépendants.
4) Déterminer la densité conditionnelle de $f_{(Y|X=x)}$.
5) Calculer $E(Y|X=x)$ et en déduire $E(Y|X)$.

Exercice 4

Soient X et Y deux v.a i.i.d suivant la loi de Pareto de paramètre 2, c-à-d: qui possèdent la densité: $f(x) = \frac{1_{(x>1)}}{x^2}$. On pose:

$$(Z, W) = \left(ln(X), 1 + \frac{ln(Y)}{ln(X)} \right).$$

1) En utilisant le produit de convolution, déterminer la densité de $T = X + Y$.
2) En utilisant la méthode de la fonction muette, déterminer la loi de (Z, W).
3) Les v.a Z et W sont-elles indépendantes?

4) Quelle est la loi de W?

5) Quelle est la loi de Z?

6) Calculer $f_{(W|Z=z)}$, $E(W|Z=z)$ et en déduire $E(W|Z)$.

7) Calculer $f_{(Z|W=w)}$, $E(Z|W=w)$ et en déduire $E(Z|W)$.

8) Calculer par deux méthodes $E\left(\frac{2}{W}\right)$.

9) Calculer par deux méthodes $E\left(1+\frac{1}{Z}\right)$ et en déduire $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-z}}{z}dz$.

Exercice 5

Soit R de loi exponentielle de paramètre $1/2$ et Θ de loi uniforme sur $[0,2\pi]$ indépendante de R. On pose: $X=\sqrt{R}\cos(\Theta)$ et $Y=\sqrt{R}\sin(\Theta)$.

1) Utiliser la méthode de la fonction muette pour déterminer la densité du couple (X,Y).

2) En déduire que X et Y sont indépendants et de même loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 6(Facultatif)

Soit (X,Y) un vecteur aléatoire gaussien dans $\mathbb{R}^2$ centré et de matrice de variances-covariances l'identité I_2. On pose:

$$Z=\frac{X+Y}{2}, \qquad Q=\frac{X-Y}{2}, \qquad U=\frac{(X-Z)^2}{2}+\frac{(Y-Z)^2}{2}.$$

1) Déterminer la loi de Z et Q.

2) Calculer la matrice de variances-covariances du couple (Z,Q).

3) Z et Q sont-elles indépendantes?

4) Calculer $E(U)$.

5) Montrer que Z et U sont indépendantes, (utiliser la méthode de la fonction muette).

6) En déduire la loi de U.

Exercice 7

Considérons la matrice : $\Gamma=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

1. Montrer qu'il existe un vecteur $X={}^t(X_1,X_2,X_3)$ de moyenne $m={}^t(0,1,1)$ et de matrice de covariance Γ.
2. Préciser les relations d'indépendance entre les coordonnées de X.
3. Posons : $Y_1=X_1+X_3$, $\quad Y_2=\alpha X_1+2X_2+\beta X_3 \quad$ et $\quad Y_3=-X_1-X_2+X_3$.
   (a) Montrer que $Y={}^t(Y_1,Y_2,Y_3)$ est un vecteur gaussien dont on donnera les paramètres.
   (b) Les variables aléatoires Y_1,Y_2 et Y_3 sont-elles mutuellement indépendantes ?
   (c) Pour quelles valeurs de (α,β), les variables Y_2 et Y_3 sont-elles indépendantes ?