UNIVERSITE MOULAY ISMAIL
FACULTE DES SCIENCES DE MEKNES

Année universitaire 2016-2017

EXAMEN DE PHYSIQUE STATISTIQUE II

Session de Juin 2017, Durée 1h30

Questions de cours

1. Démontrer que, dans la limite thermodynamique ($N \to \infty$, $\Omega \to \infty$, à densité N/Ω fixée), et pour tout système macroscopique, l'ensemble canonique et l'ensemble grand canonique sont équivalents, pour la description de la physique. On comparera les énergies internes, les chaleurs spécifiques (à volume constant), les fluctuations d'énergie, l'entropie et les équations d'état, calculées dans le cadre de ces deux ensembles.

2. Démontrer la relation générale (pour tous les systèmes fluides) : $A = -P\Omega$, où A est le grand potentiel, P est la pression du fluide et Ω est son volume.

3. Démontrer la relation fondamentale :

$$P\Omega = 2U/3 \,.$$

pour les gaz de Fermi et de Bose sans interactions (à trois dimensions).

Que devient cette expression, pour un gaz de fermions ultra-relativistes, et pour un gaz photonique des corps noirs (pour cette question, on ne demande pas de faire de démonstrations) ? Conclure.

4. Comment varient la chaleur spécifique (à volume constant), C_V, et l'entropie, S, à basse température, c'est-à-dire en dessous de la température de Fermi T_F, pour un gaz fermionique ? Aucune démonstration n'est demandée.

5. Comment varient la chaleur spécifique (à volume constant), C_V, et l'entropie, S, à basse température, c'est-à-dire en dessous de la température de Bose T_B, pour un gaz bosonique, susceptible de subir une condensation de Bose-Einstein ? Aucune démonstration n'est demandée.

Problème : Densité d'état électronique dans un cristal et ses propriétés au zéro absolu.

Des électrons sont mobiles dans un cristal à une dimension, de longueur L et comportant N atomes équidistants. Il est supposé que chaque atome contribue par un seul électron libre, et que les N électrons (de spin 1/2) constituent un gaz fermionique, mais en interaction avec le réseau unidimensionnel. La distance entre deux atomes consécutifs est notée $a = L/N$. Dans l'approximation dite de "liaisons fortes", applicable au cas où les électrons restent fortement liés aux noyaux, l'on montre que la relation entre l'énergie, ϵ, et le nombre d'onde de l'électron, k, est donnée par :

$$\epsilon = w\cos(ka) \,, \qquad -\pi/a < k < \pi/a \quad (\textit{Première zone de Brillouin}) \,,$$

où l'amplitude w est positive.

On se placera dans tout ce qui suit au zéro absolu, c'est-à-dire à $T = 0\ K$, et on admettra que la densité d'état est donnée par :

$$D(\epsilon) = \frac{L}{\pi a} \frac{1}{\sqrt{w^2 - \epsilon^2}} \,, \qquad -w \le \epsilon \le w \,.$$

1. Tracer l'allure de cette densité d'état, en fonction de l'énergie ϵ.

2. En se servant de la relation précédente et en remplaçant le facteur de Fermi par sa valeur 1 (à $T = 0\ K$), démontrer que l'énergie de Fermi, ϵ_F, est donnée par :

$$\epsilon_F = w \,.$$

En déduire la température de Fermi, T_F.

On rappelle l'intégrale :

$$\int_b^c \frac{dx}{\sqrt{w^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{c}{w}\right) - \arcsin\left(\frac{b}{w}\right).$$

3. Déduire de la question précédente que le nombre d'onde de Fermi, k_F, est :

$$k_F = \pm\pi/2a$$

qui est bien dans la première zone de Brillouin.

4. Démontrer qu'au zéro absolu, l'énergie interne globale, U_F, est nulle, c'est-à-dire $U_F = 0$. En fait, de tel résultat semble raisonnable, du fait que les énergies individuelles oscillent, comme fonctions du nombre d'onde k.

5. Prouver qu'au zéro absolu, le grand potentiel global, A_F, est donné par :

$$A_F = -N\epsilon_F = -Nw \,.$$

En déduire, à cette température, l'expression de la pression du gaz électronique, P, résultat des chocs des électrons entre eux et contre les bords du cristal 0 et L. Conclure. ■