UNIVERSITE MOULAY ISMAIL
FACULTE DES SCIENCES DE MEKNES

Année universitaire 2016-2017

EXAMEN DE PHYSIQUE STATISTIQUE II

Session de rattrapage, 2017, Durée 1h30

Questions de cours : Quelques propriétés thermiques de l'hélium liquide.

1. Tracer les diagrammes de phase de l'hélium 4 et de l'hélium 3, séparément.

2. A partir de quelle valeur de la pression, l'hélium se solidifie-t-il ?

3. Rappeler les variations de la chaleur spécifique de l'hélium 4 et de l'hélium 3, à très basse température.

4. L'hélium 4 subit naturellement une condensation de Bose-Einstein, mais quel est le mécanisme qui fait que l'hélium 3 pourrait, aussi, subir le même phénomène, à très basse température ?

5. Comparer la température de Fermi de l'hélium 3 à celle d'un gaz électronique. Justifier votre réponse.

Problème : Quelques aspects thermiques de la condensation de Bose-Einstein.

On considère un gaz bosonique quelconque, susceptible de subir une condensation de Bose-Einstein, à une température caractéristique, T_B, appelée *température de Bose*, celle annulant le potentiel chimique, c'est-à-dire $\mu(T_B) = 0$.

On désignera par $N_{\epsilon=0}$, le nombre de particules d'énergie $\epsilon = 0$ se trouvant dans le condensat de Bose-Einstein, et par $N_{\epsilon>0}$, le nombre de particules d'énergie $\epsilon > 0$ dans la phase dispersée. On notera la relation évidente : $N = N_{\epsilon=0} + N_{\epsilon>0}$, où N est le nombre total de particules dans le gaz bosonique.

On rappelle l'intégrale :

$$\int_0^\infty \frac{z^{x-1}dz}{e^z-1} = \Gamma(x)\zeta(x) \, , \qquad\qquad (x > 1) \, .$$

Ici, $\Gamma(x)$ est la *fonction gamma d'Euler*, et $\zeta(x)$ est la *fonction zêta de Riemann*. On ne remplacera pas ces fonctions par leurs valeurs numériques, dans la suite du problème.

1. Démontrer que la densité d'état du gaz bosonique considéré est : $D(\epsilon) = C\Omega\epsilon^{1/2}$, où Ω est son volume et C est une constante dépendant de la masse des particules, m, et de la constante de Planck, h, et du facteur gyromagnétique, g.

2. Exprimer la température de Bose, T_B, en fonction de la densité du gaz bosonique, N/Ω, de la constante C et des valeurs $\Gamma(3/2)$ et $\zeta(3/2)$.

3. Démontrer que le nombre de bosons d'énergie $\epsilon > 0$ (avec $\mu = 0$) obéit à la loi d'échelle :

$$N_{\epsilon>0} = N(T/T_B)^{3/2} \,, \qquad\qquad (T < T_B) \,.$$

4. En déduire le nombre de bosons dans le condensat de Bose-Einstein, $N_{\epsilon=0}$. Représenter son allure, en fonction de la température T.

5. Démontrer que l'énergie interne, U, du gaz bosonique obéit à la loi d'échelle :

$$\frac{U}{Nk_BT_B} = \lambda(T/T_B)^{5/2} \,, \qquad\qquad (T < T_B) \,,$$

où λ est une constante universelle à déterminer, qui ne dépend que des valeurs $\Gamma(3/2)$ et $\zeta(3/2)$, et $\Gamma(5/2)$ et $\zeta(5/2)$.

6. En déduire que la chaleur spécifique du gaz bosonique, C_V, et son entropie, S, sont données par :

$$C_V = \frac{5U}{2T} \,, \qquad\qquad S = \frac{5U}{3T} \,.$$

7. Exprimer la pression du gaz bosonique, P, en fonction de la température T ($T < T_B$). Interpréter le résultat obtenu. ■