UNIVERSITE MOULAY ISMAIL
FACULTE DES SCIENCES DE MEKNES

Année universitaire 2018-2019

EXAMEN DE PHYSIQUE STATISTIQUE II

Session de rattrapage, 2019, Durée 1h30

Questions courtes : *8 points.*

1. On considère un gaz de Bose ou de Fermi contenant N particules relativistes, qui sont enfermées dans une boîte de volume Ω_d. L'on désigne par ϵ et p, l'énergie et l'impulsion individuelles d'une particule. On notera le facteur gyromagnétique par $g = 2s + 1$, où s est le spin commun des particules. Démontrer que la densité d'état, $D(\epsilon)$, est donnée, à toute dimension d'espace d, par :

$$D(\epsilon) = g\frac{\Omega_d}{h^d c^d}\omega_d \epsilon(\epsilon^2 - m^2c^4)^{\frac{d}{2}-1}\,, \qquad \epsilon \geq mc^2\ .$$

Ici, $\omega_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ représente l'intégrale sur les $d-1$ variables angulaires ou encore l'aire d'une hypersphère de *rayon unité* et plongée dans l'espace Euclidien de dimension d.

2. On considère un gaz parfait à N particules quantiques (sans spin) enfermé dans une boîte hypercubique de volume $\Omega = L^d$. Prouver, par application des principes de la Physique Statistique, que les déformations des niveaux d'énergie, $\{dE_n\}$, sont données par :

$$dE_n = -\frac{2}{d} \times \left(\frac{E_n}{\Omega}\right) d\Omega\,, \qquad n \in \boldsymbol{N}^*\ .$$

Discuter dans quel sens se font les déformations, en tenant compte du signe de la variation de volume, $d\Omega$.

Problème : *12 points.*

On considère un gaz bosonique quelconque, enfermé dans une enceinte de volume Ω_d et qui est susceptible de subir une condensation de Bose-Einstein (CBE), à une température caractéristique, T_B, appelée *température de Bose*, celle annulant le potentiel chimique, c'est-à-dire $\mu(T_B) = 0$. Pour faire une étude globale de tous les gaz susceptibles de subir une CBE, l'on suppose que la loi de dispersion des énergies individuelles des particules est donnée par :

$$\epsilon(p) = \alpha c p^{\sigma}\,, \qquad p = \|\vec{p}\|\ .$$

Ici, $p = \|\vec{p}\|$ est le module de l'impulsion de ces particules, et α et σ sont des *constantes réelles positives*.

1. Démontrer que la densité d'état associée est donnée par :

$$D(\epsilon) = g \frac{\Omega_d}{h^d c^d} \omega_d \frac{\epsilon^{\frac{d}{\sigma}-1}}{\sigma \alpha^{d/\sigma}} , \qquad \epsilon > 0 ,$$

avec la notation : $\omega_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$. Ici, $g = 2s + 1$ désigne le facteur gyromagnétique. Pour quelles valeurs des constantes α et σ retrouvera-t-on la loi de dispersion usuelle, où $\epsilon(p)$ s'identifie à l'énergie cinétique ?

2. Montrer que le gaz bosonique ne peut subir une CBE que si la condition $\sigma < d$ est satisfaite. *Comme indication*, l'on considérera l'intégrale donnant formellement le nombre de particules, N, à la température T_B et avec $\mu = 0$, et l'on discutera la condition de sa convergence.

3. Exprimer la température de Bose, T_B, en fonction de la densité moyenne des particules, N/Ω_d. On rappelle l'intégrale :

$$\int_0^\infty \frac{z^{x-1} dz}{e^z - 1} = \Gamma(x)\zeta(x) , \qquad x > 1 .$$

Ici, $\Gamma(x)$ est la *fonction gamma d'Euler* et $\zeta(x)$ est la *fonction zêta de Riemann*. On ne remplacera pas ces fonctions par leurs valeurs numériques, dans la suite du problème.

4. On désignera par $N_{\epsilon=0}$, le nombre de particules d'énergie $\epsilon = 0$ se trouvant dans le condensat de Bose-Einstein, et par $N_{\epsilon>0}$, le nombre de particules d'énergie $\epsilon > 0$ dans la phase dispersée. Démontrer que le nombre de bosons d'énergie $\epsilon > 0$ (avec $\mu = 0$) obéit à la loi d'échelle :

$$N_{\epsilon>0} = N \left(\frac{T}{T_B}\right)^{d/\sigma} , \qquad T < T_B .$$

En déduire le nombre de bosons dans le condensat de Bose-Einstein, $N_{\epsilon=0}$.

6. Démontrer que l'énergie interne, U, du gaz bosonique obéit à la loi d'échelle :

$$\frac{U}{N k_B T_B} = \frac{d}{\sigma} \frac{\zeta\left(\frac{d}{\sigma}+1\right)}{\zeta\left(\frac{d}{\sigma}\right)} \left(\frac{T}{T_B}\right)^{\frac{d}{\sigma}+1} , \qquad T < T_B .$$

7. Prouver la relation suivante entre le grand potentiel et l'énergie interne :

$$A = -\left(\frac{\sigma}{d}\right) U .$$

8. Déduire de ce qui précède les expressions de la chaleur spécifique du gaz bosonique, C_V, son entropie, S, et sa pression, P, en fonction de la température T. ■