Travaux dirigés N°2 avec solution de mécanique des solides

(Cinématique du solide)

Exercice 1

Soit R_0 un repère fixe orthonormé direct, on donne les points du solide (S) déterminées par leurs coordonnées dans un repère orthonormé direct R lié à ce solide : A(0,0,0), B(1,1,0) et C(1,1,1).

Les vecteurs vitesses à un instant donné t_0 des points A, B et C ont respectivement pour composantes dans le repère R :

$$\vec{V}(A\in S/R_0)=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}_R,\ \vec{V}(B\in S/R_0)=\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}_R \text{ et } \vec{V}(C\in S/R_0)=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}_R$$

Déterminer le vecteur rotation $\vec{\Omega}(S/R_0)$ et les éléments de réduction du mouvement hélicoïdal uniforme tangent, à l'instant considéré.

Correction exercice 1

A(0,0,0), B(1,1,0), C(1,1,1)

$$\vec{V}(A\in S/R_0)=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}_R,\ \vec{V}(B\in S/R_0)=\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}_R,\ \vec{V}(C\in S/R_0)=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}_R$$

$$\begin{cases}\vec{V}(B)_{/R_0}=\vec{V}(A)_{/R_0}+\vec{\Omega}_{S/R_0}\wedge\vec{AB}\\ \vec{V}(B)_{/R_0}=\vec{V}(C)_{/R_0}+\vec{\Omega}_{S/R_0}\wedge\vec{AC}\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}\vec{V}(B)-\vec{V}(A)=\vec{\Omega}_{S/R_0}\wedge\vec{AB} & (1)\\ \vec{V}(B)-\vec{V}(C)=\vec{\Omega}_{S/R_0}\wedge\vec{AC} & (2)\end{cases}$$

$$(1)\rightarrow \left|\begin{matrix}-2\\2\\2\end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}\right. \wedge \left|\begin{matrix}1\\1\\0\end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix}-c\\c\\a-b\end{matrix}\right. \qquad \Rightarrow c=2$$

$$(2)\rightarrow \left|\begin{matrix}1\\1\\0\end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}\right. \wedge \left|\begin{matrix}0\\0\\-1\end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix}-b\\a\\0\end{matrix}\right. \qquad \Rightarrow a=1,\ b=-1$$

$$\text{donc } \vec{\Omega}_{S/R_0}=\left|\begin{matrix}1\\-1\\2\end{matrix}\right._R \qquad [\tau]\left|\begin{matrix}\vec{\Omega}\\ \vec{V}\end{matrix}\right.$$

donc $\vec{\Omega}_{S/R_0} = \left|\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{matrix}\right._{R}$ $\qquad [\mathcal{V}] \left| \begin{matrix} \vec{\Omega} \\ \vec{V} \end{matrix} \right.$

axe central : $\Delta = \{ M \;/\; \vec{V}(M \in S/R_0) \,//\, \vec{\Omega}_{S/R_0} \}$

$\vec{V}_{M \in S/R_0} = \vec{V}_{A \in S/R_0} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \vec{AM}$, $M \left|\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right._{R}$

$\left|\begin{matrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{matrix}\right. + \left|\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{matrix}\right. \wedge \left|\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix} 2 - z - 2y \\ 1 + 2x - z \\ -3 + y + x \end{matrix}\right.$

$\vec{V}_{M \in S/R_0} \,//\, \vec{\Omega}_{S/R_0} \iff \dfrac{2 - z - 2y}{1} = \dfrac{1 + 2x - z}{-1} = \dfrac{-3 + x + y}{2}$

Δ est l'intersection de deux plans $= (D, \vec{\Omega}_{S/R_0})$

$D = \left(\frac{-1}{12} ; \frac{17}{12} , 0\right)$ OK.

Exercice 2

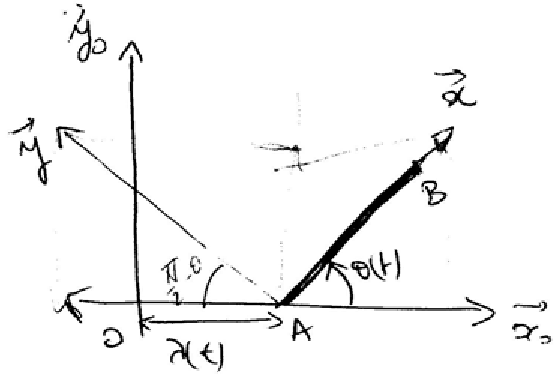
Soit une barre AB de longueur l se déplaçant dans un repère fixe $R_0(O, x_0, y_0)$. Le point A décrit $R_0(O, x_0)$.

On notera $R_S(A, \vec{x}, \vec{y})$ le repère lié à la barre AB. On notera (S) le solide constitué par la barre AB.

On introduira les paramètres suivants : $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x})$ où $\vec{x} = \frac{\vec{AB}}{||\vec{AB}||}$ et $\lambda = \overline{OA}$

1) **Calculer $\vec{V}(B \in S/R_0)$ en appliquant la définition.**
2) **Calculer $\vec{V}(B \in S/R_0)$ en utilisant le torseur cinématique, l'exprimer dans les repères R_0 et R.**

Correction exercice 2



(S) = (AB)

paramètres du système : λ, θ

$(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z_0})$ repère lié à (S)

$$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} = \lambda \vec{x_0} + l\vec{x}$$

1°) $\vec{V}(B\in S/R_0) = \dot{\lambda}\vec{x_0} + l\dot{\theta}\vec{y}$ $\qquad \vec{x} = \cos\theta\,\vec{y_0} + \sin\theta\,\vec{x_0}$

dans R_0 : $\vec{y} = -\sin\theta\,\vec{x_0} + \cos\theta\,\vec{y_0}$ $\qquad \frac{d\vec{x}}{dt} = -\sin\theta\,\dot{\theta}\,\vec{y_0} + \cos\theta\,\dot{\theta}\,\vec{x_0} = \dot{\theta}(\cos\theta\,\vec{x_0} - \sin\theta\,\vec{y_0})$

$$\vec{V}(B\in S/R_0) = \left|\begin{array}{l} \dot{\lambda} - l\sin\theta.\dot{\theta} \\ l\cos\theta.\dot{\theta} \\ 0 \end{array}\right._{R_0}$$

$\vec{y} = \sin(\frac{\pi}{2}+\theta)\,\vec{y_0} - \cos(\frac{\pi}{2}+\theta)\,\vec{x_0}$

$\cos\theta\,\vec{y_0} - \sin\theta\,\vec{x_0}$

dans R : $\vec{x_0} = \cos\theta\,\vec{x} - \sin\theta\,\vec{y}$

$$\vec{V}(B\in S/R_0) = \left|\begin{array}{l} \dot{\lambda}\cos\theta \\ l\dot{\theta} - \dot{\lambda}\sin\theta \\ 0 \end{array}\right._{R}$$

2°) En utilisant le torseur cinématique : $\vec{\Omega}_{S/R_0} = \dot{\theta}\,\vec{z_0}$

$$\vec{V}(B\in S/R_0) = \vec{V}(A\in S/R_0) + \vec{\Omega}_{S/R_0}\wedge\vec{AB}$$
$$= \dot{\lambda}.\vec{x_0} + \dot{\theta}\vec{z_0}\wedge l\vec{x} = \dot{\lambda}\vec{x_0} + l\dot{\theta}\,\vec{y}$$

Exercice 3

Par rapport à un repère $R_0(O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$, une plaque rectangulaire ABCD est en mouvement de la manière suivante :

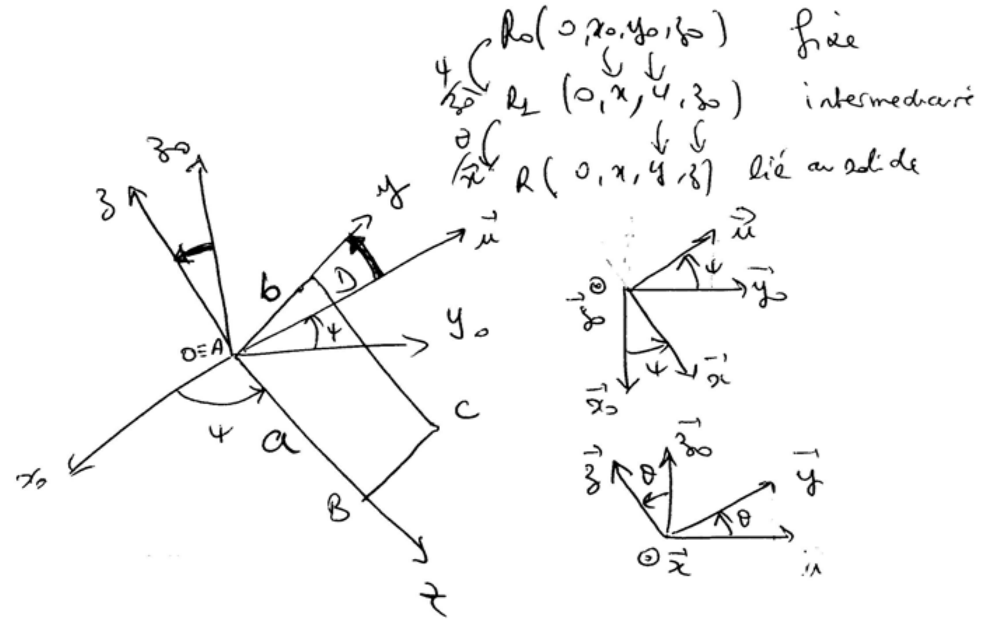
A est fixe en O, AB reste dans le plan (O, x_0, y_0), on donne AB=a et AD=b.

On définit $\vec{x} = \frac{\overrightarrow{AB}}{||\overrightarrow{AB}||}$ et $\vec{y} = \frac{\overrightarrow{AD}}{||\overrightarrow{AD}||}$ et $\vec{z}$ et tel que R(A, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$) soit un repère orthonormé direct lié à la plaque.

Soit $\psi=(\vec{x_0}, \vec{x})$ et $\theta=(\vec{z_0}, \vec{z})$.

1) **Écrire le vecteur rotation instantanée de la plaque par rapport à R_0, dans le repère R_0 puis dans le repère R.**
2) **Calculer la vitesse de C par rapport à R_0, l'exprimer dans R, puis dans R_0.**

Correction exercice 3



1°) $\vec{\Omega}_{S/R_0} = \vec{\Omega}(R/R_0)$

$\vec{\Omega}(R/R_0) = \vec{\Omega}_{R/R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) = \dot{\theta}\vec{x} + \dot{\psi}\vec{z}_0$

dans R_0 : $\vec{x} = \cos\psi\,\vec{x}_0 + \sin\psi\,\vec{y}_0$

$$\vec{\Omega}(S/R_0) = \begin{vmatrix} \dot{\theta}\cos\psi \\ \dot{\theta}\sin\psi \\ \dot{\psi} \end{vmatrix}_{R_0}$$

dans R $\quad \vec{\Omega}(S/R_0) = \begin{vmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{vmatrix}_{R} \quad (\vec{z}_0 = \sin\theta\,\vec{y} + \cos\theta\,\vec{z})$

2°/ $\vec{V}(C/R_0) = \vec{V}(A/R_0) + \vec{\Omega} \wedge \vec{AC}$, $\vec{AC} = a\vec{x} + b\vec{y}$

dans R : $\vec{V}_{/R_0}(C) = \begin{vmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{vmatrix}_R \wedge \begin{vmatrix} a \\ b \\ 0 \end{vmatrix}_R = \begin{vmatrix} -b\dot{\psi}\cos\theta \\ a\dot{\psi}\cos\theta \\ b\dot{\theta} - a\dot{\psi}\sin\theta \end{vmatrix}_R$

dans R_0 : $\vec{V}(C)_{/R_0} = \begin{vmatrix} \dot{\theta}\cos\psi \\ \dot{\theta}\sin\psi \\ \dot{\psi} \end{vmatrix}_{R_0} \wedge \begin{vmatrix} -b\cos\theta\sin\psi + a\cos\psi \\ b\cos\theta\cos\psi + a\sin\psi \\ b\sin\theta \end{vmatrix}_{R_0}$

$\vec{AC} = a\vec{x} + b\vec{y}$ $\quad \vec{y} = \cos\theta\,\vec{u} + \sin\theta\,\vec{z_0}$

or $\vec{u} = \cos\psi\,\vec{y_0} - \sin\psi\,\vec{x_0}$

$\Rightarrow \vec{y} = (-\cos\theta\sin\psi)\vec{x_0} + (\cos\theta\cos\psi)\vec{y_0} + \sin\theta\,\vec{z_0}$

$\vec{V}(C/R_0) = \begin{vmatrix} b\dot{\theta}\sin\theta\sin\psi - (a\sin\psi + b\cos\theta\cos\psi)\dot{\psi} \\ (a\cos\psi - b\cos\theta\sin\psi)\dot{\psi} - (b\sin\theta\cos\psi)\dot{\theta} \\ b\cos\theta\,\dot{\theta} \end{vmatrix}_{R_0}$

Exercice 4

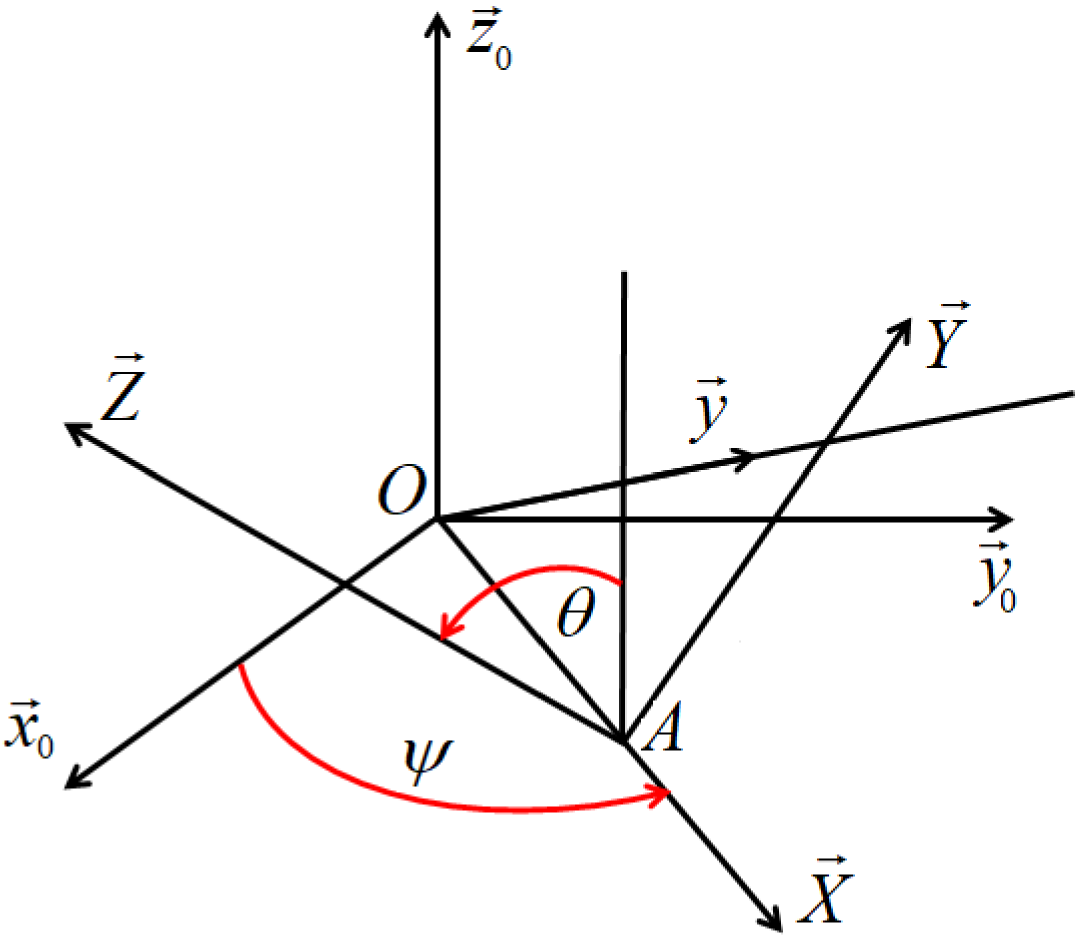
Soit (S) un solide, A un point lié à (S) et $R_1(A, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ un repère lié à (S). Le solide est mobile par rapport à $R_0(O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ de façon que $\vec{X}.\vec{z_0}=0$ et que $\vec{X}$ soit le vecteur unitaire de $\overrightarrow{OA}$.

La position de (S) dépend alors des trois fonctions du temps r, ψ, θ définis par : $\overrightarrow{OA}=r\vec{X}$ $\psi=(\vec{x_0}, \vec{X})$ et $\theta=(\vec{z_0}, \vec{Z})$. On introduira le repère $R(O, \vec{X}, \vec{y}, \vec{z_0})$

1) **Calculer directement $\vec{V}(A\in S/R_0)$ et $\vec{V}(A\in S/R)$. Vérifier les résultats obtenus en utilisant le théorème de composition des mouvements.**
2) **Soit M un point lié à (S) tel que $\overrightarrow{AM} = a\vec{X} + b\vec{Y} + c\vec{Z}$.**
   Calculer $\vec{V}(M\in S/R_0)$, $\vec{V}(M\in S/R)$, $\vec{\gamma}(M\in S/R_0)$ et $\vec{\gamma}(M\in S/R)$.
3) **Soit $O \in S$ le point lié à (S) qui à l'instant t coïncide avec l'origine de R_0.**
   À partir de la question 2) déduire $\vec{V}(O\in S/R_0)$, $\vec{V}(O\in S/R)$, $\vec{\gamma}(O\in S/R_0)$ et $\vec{\gamma}(O\in S/R)$.

En déduire que les vitesses de $O \in S$ ne sont pas obtenues en dérivant les coordonnées de $O \in S$ et que $\overrightarrow{\gamma}$(O∈ S/R_0) n'est pas obtenue en dérivant les composantes de $\overrightarrow{V}$(O∈ S/R_0).

4) Retrouver $\overrightarrow{V}$(O∈ S/R_0) et $\overrightarrow{\gamma}$(O∈ S/R_0) à partir de $\overrightarrow{V}$(O∈ S/R) et $\overrightarrow{\gamma}$(O∈ S/R) en utilisant la composition des mouvements.

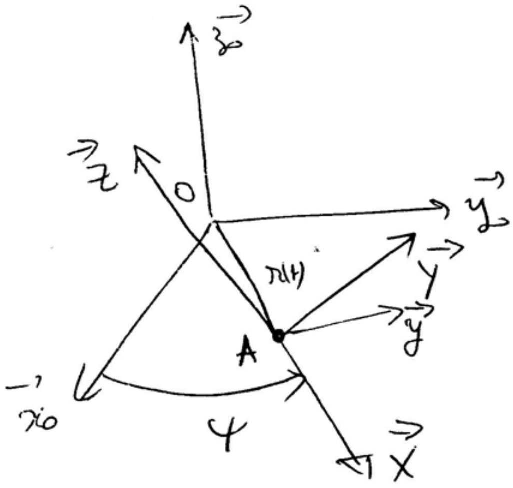


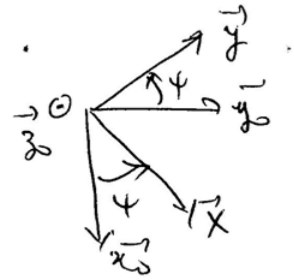
Correction exercice 4

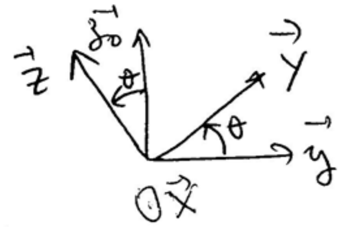
$R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ fixe

$R_1(A,\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})$ lié à (S)

$R(O,\vec{X},\vec{y},\vec{z}_0)$ intermédiaire







paramètres (r,θ,ψ)

$\vec{OA} = r(t)\cdot\vec{X}$

$$\vec{V}(A/R_0) = \left.\frac{d\vec{OA}}{dt}\right|_{R_0} = \dot{r}\,\vec{X} + r\left(\left.\frac{d\vec{X}}{dt}\right|_{R_0}\right)$$

formule de dérivation

$$\left.\frac{d\vec{X}}{dt}\right|_{R_0} = \cancel{\left.\frac{d\vec{X}}{dt}\right|_{R}} + \vec{\Omega}_{R/R_0}\wedge\vec{X} = \dot{\psi}\,\vec{z}_0\wedge\vec{X} = \dot{\psi}\,\vec{y}$$

$$R(O,\vec{X},\vec{y},\vec{z}_0) \to \vec{z}_0\wedge\vec{X} = \vec{y}$$

donc $\vec{V}(A/R_0) = \dot{r}\,\vec{X} + r\dot{\psi}\,\vec{y} = \left|\begin{matrix}\dot{r}\\ r\dot{\psi}\\ 0\end{matrix}\right._{R}$

$$* \quad \vec{V}(A/R) = \frac{d\vec{OA}}{dt}\Big/_R = r^{\circ}\vec{X} = \begin{vmatrix} r^{\circ} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_R$$

$$* \quad \vec{V}_{A\in R_1/R_0} \underset{r=cte}{=} r\dot\varphi\,\vec{y}$$

$$\vec{V}_{A\in R_1/R_0} = \underbrace{\vec{V}_{O/R_0}}_{=0} + \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \vec{OA} = \dot\varphi\,\vec{z_0} \wedge r\vec{X} = r\dot\varphi\,\vec{y}$$

<u>verification</u> $\quad \vec{V}(A/R_0) = \vec{V}(A/R) + \vec{V}(A\in R_1/R_0) = \begin{vmatrix} \dot r \\ r\dot\varphi \\ 0 \end{vmatrix}_R$

$$\vec{V}(M\in S/R_0) = \begin{vmatrix} \dot r - (b\cos\theta - c\sin\theta)\dot\varphi & = \alpha \\ r\dot\varphi + a\dot\varphi - (b\sin\theta + c\cos\theta)\dot\theta & = \beta \\ (b\cos\theta - c\sin\theta)\,\dot\theta & = \gamma \end{vmatrix}_R$$

$$* \quad \vec{V}(M\in S/R) = \vec{V}(A\in S/R) + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{AM} \quad , \quad \vec{\Omega}_{S/R} = \vec{\Omega}_{R_1/R} = \dot\theta\,\vec{X}$$

$$= \begin{vmatrix} \dot r \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_R + \begin{vmatrix} \dot\theta \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_R \wedge \begin{vmatrix} a \\ b\cos\theta - c\sin\theta \\ b\sin\theta + c\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= \left|\begin{array}{l} \dot{r} \\ -(b\sin\theta + c\cos\theta)\dot{\theta} \\ (b\cos\theta - c\sin\theta)\dot{\theta} \end{array}\right._{R}$$

$$* \quad \vec{\Gamma}(M \in S, R_0) = \frac{d\vec{V}(M \in S/R_0)}{dt}\Big/_{R_0} = \frac{d\vec{V}(M)}{dt}\Big/_{R} + \vec{\Omega}_{R/R_0} \wedge \vec{V}(M)$$

$$= \left|\begin{array}{l} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{array}\right._{R} + \left|\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{array}\right._{R} \wedge \left|\begin{array}{l} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{array}\right._{R} = \left|\begin{array}{l} \dot{\alpha} - \beta\dot{\psi} \\ \dot{\beta} + \alpha\dot{\psi} \\ \dot{\gamma} \end{array}\right._{R}$$

$$* \quad \vec{\Gamma}(M/R) = \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\Big/_{R} = \left|\begin{array}{l} \ddot{r} \\ -\ddot{\theta}(b\sin\theta + c\cos\theta) - \dot{\theta}^2(b\cos\theta - c\sin\theta) \\ \ddot{\theta}(b\cos\theta - c\sin\theta) - \dot{\theta}^2(b\sin\theta + c\cos\theta) \end{array}\right._{R}$$

3°) point particulier $M \equiv O$ à l'instant t_0

$\vec{AM} = a\vec{X} + b\vec{Y} + c\vec{Z}$ (O coïncide avec l'origine de R_0)

$M \equiv O \Rightarrow \vec{AO} = a\vec{X} = -r(t_0)\vec{X}$

$\Rightarrow a = -r(t_0)$, $b = c = 0$

$$\vec{V}(O/R_0)_{t=t_0} = \left|\begin{array}{l} \dot{r} \\ r(t_0)\dot{\psi} + a\dot{\psi} \\ 0 \end{array}\right._{R} = \left|\begin{array}{l} \dot{r} \\ r(t_0)\dot{\psi} - r(t_0)\dot{\psi} = 0 \\ 0 \end{array}\right._{R} = \left|\begin{array}{l} \dot{r} \\ 0 \\ 0 \end{array}\right._{R}$$

$\vec{V}_e(O) = \vec{V}(O \in R/R_0) = \vec{0} \; \forall t$ car O origine de R et R_0

$\dot{\alpha} = \ddot{r} - \ddot{\psi}(b\cos\theta - c\sin\theta) - \dot{\psi}\dot{\theta}(-b\sin\theta - c\cos\theta)$

$\Rightarrow \underline{\dot{\alpha}(t_0) = \ddot{r}(t_0)}$

$\beta(t_0) = 0 \Rightarrow (\dot{\alpha} - \beta\dot{\psi})(t_0) = \ddot{r}(t_0)$

$\dot{\beta} = \dot{r}\dot{\psi} + r\ddot{\psi} + a\ddot{\psi} - \dot{\theta}^2(b\cos\theta - c\sin\theta) \Rightarrow \boxed{\dot{\beta}(t_0) = \dot{r}\dot{\psi}(t_0)}$

$\alpha(t_0) = \dot{r}(t_0) \Rightarrow (\dot{\beta} + \alpha\dot{\psi})(t_0) = 2\dot{r}\dot{\psi}(t_0)$, $\underline{\dot{\gamma}(t_0) = 0}$

$\vec{\Gamma}(O/R_0) = \begin{vmatrix} \ddot{r}(t_0) \\ 2\dot{r}\dot{\psi}(t_0) \\ 0 \end{vmatrix}_R$, $\vec{\Gamma}_e(O) = \dfrac{d\vec{V}_e(O)}{dt}\Big/_{R_0} = 0$

$\vec{\Gamma}_{O/R} = \begin{vmatrix} \ddot{r}(t_0) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_R$, $\vec{\Gamma}_c(O) = 2\vec{\Omega}_{R/R_0} \wedge \vec{V}(O/R)$

$= 2\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{vmatrix}_R \wedge \begin{vmatrix} \dot{r} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_R = \begin{vmatrix} 0 \\ 2\dot{r}\dot{\psi} \\ 0 \end{vmatrix}_R$