Cours de Mécanique des Solides

Parcours : MIP   Module : P135   Semestre 3

Pr. Amine TILIOUA

Département Sciences de l'Ingénieur

Faculté des Sciences et Techniques d'Errachidia

Université Moulay Ismaïl

Années Universitaires : 2024/2025

Plan

Plan

Les vecteurs :

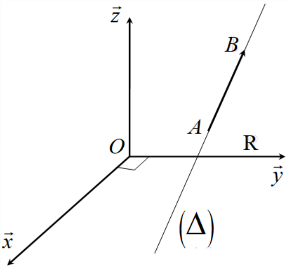
Définition

Les vecteurs liés

Un vecteur lié est un couple de deux points (A,B) noté $\vec{AB}$ Ce couple ordonné de deux points est défini par :

- *son support (droite Δ)*
- *son point d'application A*
- *son sens (de A vers B)*
- *son module (distance de A à B)*

Les vecteurs :



- Composantes de A dans le repère R : $A \left| \begin{array}{l} x_A \\ y_A \\ z_A \end{array} \right.$
- Composantes de B dans le repère R : $B \left| \begin{array}{l} x_B \\ y_B \\ z_B \end{array} \right.$
- Composantes de $\vec{AB}$ dans le repère R : $\vec{AB} \left| \begin{array}{l} x_{AB} = x_B - x_A \\ y_{AB} = y_B - y_A \\ z_{AB} = z_B - z_A \end{array} \right.$

Les vecteurs :

Propriété

- *Deux vecteurs liés sont équipollents s'ils ont même sens et même module.*
- *Un vecteur nul est un vecteur dont toutes les composantes sont nulles.*
- *Remarque : l'équipollence est une relation d'équivalence*
- *Réflexivité :* $\vec{AB}=\vec{AB}$
- *Symétrie :* $\vec{AB}=\vec{CD} \implies \vec{CD}=\vec{AB}$
- *Transitivité :* $\left.\begin{array}{c} \vec{AB}=\vec{CD} \\ \vec{CD}=\vec{EF} \end{array}\right\} \implies \vec{AB}=\vec{EF}$

Les vecteurs :

Les vecteurs libres :

L'ensemble des vecteurs liés équipollents à un vecteur lié, c'est à dire la classe d'équivalence définie par un de ces vecteurs liés constitue un vecteur libre $\vec{V}$.Un représentant est défini par :

- Son support,
- Son sens
- Son module $|\vec{V}|$

Expression du vecteur libre dans le repère R :

$$\vec{V}\left|\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}\right. \Longrightarrow \vec{V} = a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z}$$

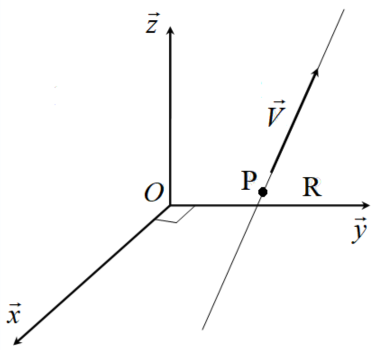
Les vecteurs :

Les vecteurs glissants :

Un vecteur glissant est défini par :

- Un vecteur libre $\vec{V}$
- Un point du support P

On le note $\vec{G}(P, \vec{V})$



Les vecteurs :

Calcul vectoriel (Porte sur les vecteurs libres)

Addition

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$$

$$\text{avec } \vec{V}_1 \left| \begin{array}{l} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{array} \right. \text{ et } \vec{V}_2 \left| \begin{array}{l} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{array} \right. \implies \vec{V} \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{array} \right.$$

Les vecteurs :

Propriétés de l'addition :

- Commutativité : $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_2 + \vec{V}_1$
- Associativité : $\vec{V}_1 + (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) + \vec{V}_3$
- Élément symétrique : $\forall\ \vec{V}, \exists(-\vec{V})$ tel que $\vec{V} + (-\vec{V}) = 0$
- Élément neutre : $\forall\ \vec{V}, \exists(\vec{0})$ tel que $\vec{V} + \vec{0} = \vec{V}$

Les vecteurs : I

L'addition donne à l'ensemble des vecteurs libres une structure de groupe commutatif :

Multiplication par un scalaire :

Etant donné un vecteur libre $\vec{V} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}$ et un scalaire λ, le produit du vecteur $\vec{V}$ par λ est un vecteur libre.

$$\vec{V}' = \lambda\vec{V} = \lambda x\vec{x} + \lambda y\vec{y} + \lambda z\vec{z}$$

Propriétés de la multiplication par un scalaire :

- Associativité : $\alpha(\beta\vec{V}) = (\alpha\beta)\vec{V}$
- Elément neutre : $\forall\ \vec{V}, \exists 1$ tel que $1\vec{V} = \vec{V}$

Les vecteurs : II

- Distributivité par rapport à la somme vectorielle : $\alpha(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \alpha\vec{V}_1 + \alpha\vec{V}_2$
- Distributivité par rapport à la somme scalaire : $(\alpha + \beta)\vec{V} = \alpha\vec{V} + \beta\vec{V}$

Applications géométriques :

- Conditions d'alignement : A,B,C alignés $\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$; $\vec{AB} = k\vec{AC}$
- Conditions de parallélisme : $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ sont $//$ $\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$; $\vec{V} = k\vec{V}'$

Produit scalaire :

Définition

Étant donné deux vecteurs libres $\vec{V}\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$ *et* $\vec{V}'\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix}$ *définis dans la base orthonormée* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *on appelle produit scalaire de* $\vec{V}$ *par* $\vec{V}'$ *le réel :*

$$\vec{V}.\vec{V}' = xx' + yy' + zz'$$

Propriétés de la multiplication par un scalaire :

- *Commutativité :* $\vec{V}.\vec{V}' = \vec{V}'.\vec{V}$
- *Distributivité :* $\vec{V}(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \vec{V}.\vec{V}_1 + \vec{V}.\vec{V}_2$
- *Le produit scalaire n'est pas associatif :* $\vec{V}(\vec{V}_1.\vec{V}_2) \neq (\vec{V}.\vec{V}_1)\vec{V}_2$

Produit scalaire :

Définition

- *Associativité quand à la multiplication par un scalaire :* $(\alpha\vec{V}).\vec{V}' = \vec{V}.(\alpha\vec{V}')$
- *Carré scalaire :* $\vec{V}.\vec{V} = x^2 + y^2 + z^2$
- *On appelle longueur ou norme d'un vecteur le nombre :* $|\vec{V}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Applications :

- *Deux vecteurs non nuls* $\vec{V}_1$ *et* $\vec{V}_2$ *sont* $\perp$ *si* $\vec{V}_1.\vec{V}_2 = 0$
- *Cosinus de deux vecteurs :*

$$\cos\alpha = \frac{\vec{OA}\vec{OB}}{|\vec{OA}||\vec{OB}|}$$

Produit vectoriel :

On appelle produit vectoriel de $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ le vecteur libre $\vec{G} = \vec{V} \wedge \vec{V}'$.

Le vecteur $\vec{G}$ est tel que :

- Direction de $\vec{G}$ est $\perp$ à $\vec{V}$ et à $\vec{V}'$
- Le sens de $\vec{G}$ est tel que le trièdre $\vec{G}, \vec{V}, \vec{V}'$ est direct.
- Le module de $\vec{G} := |\vec{V}||\vec{V}'| \sin\alpha$ avec $\alpha = (\vec{V}, \vec{V}')$

Propriétés du produit vectoriel :

- Le produit vectoriel n'est pas commutatif : $\vec{V} \wedge \vec{V}' = -\vec{V}' \wedge \vec{V}$
- Multiplication par un scalaire : $(\lambda\vec{V}) \wedge \vec{V}' = \lambda(\vec{V} \wedge \vec{V}')$
- Le produit vectoriel nul :

$$\vec{V} \wedge \vec{V}' = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} Si \quad \vec{V} = \vec{0} \quad ou \quad \vec{V}' = \vec{0} \\ \vec{V} / \ / \vec{V}' \Longrightarrow \vec{V} = k\vec{V}' \end{cases}$$

Les vecteurs :

- Double Produit vectoriel :
  $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \vec{V}_2.(\vec{V}_1.\vec{V}_3) - \vec{V}_3.(\vec{V}_1.\vec{V}_2)$
- Distributivité par rapport à la somme vectorielle :
  $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_3$
- Composantes du produit vectoriel :
  $\vec{V} \wedge \vec{V}' = (yz' - zy')\vec{i} + (zx' - xz')\vec{j} + (xy' - yx')\vec{k}$

Application géométrique :

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{OA} \wedge \vec{OB}|}{|\vec{OA}||\vec{OB}|}$$

Les vecteurs :

Aire du parallélogramme : Air du parallélogramme
$OABD = |\vec{OA} \wedge \vec{OB}|$
Produit mixte Définition : On appelle produit mixte de trois vecteurs $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ le nombre réel défini par :
$(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3)$=$\vec{V}_1.(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$
Propriétés

- Si le trièdre $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ est direct, le produit mixte est positif,
- Le produit mixte est invariant par permutation circulaire $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3)$=$(\vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_1)$=$(\vec{V}_3, \vec{V}_1, \vec{V}_2)$
- Le produit mixte change de signe si on échange deux vecteurs $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3)$=-$(\vec{V}_1, \vec{V}_3, \vec{V}_2)$

Les vecteurs :

- Le produit mixte est nul si :
  - Les trois vecteurs son coplanaire
  - Deux vecteur sont parallèles

Interprétation géométrique :
Le module de $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3)$ représente le volume du Parallélogramme
Division vectorielle
Objectif : résoudre l'équation :$\vec{A} \wedge \vec{X} = \vec{B}$ (1)

- Si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ ne sont pas perpendiculaires : pas de solution
- Si $\vec{A}.\vec{B}$=0 et $\vec{A} \neq \vec{0}$, $\vec{B} \neq \vec{0}$
  - Soit $\vec{X}_0 \perp \vec{A}$ tel que
    $\vec{A} \wedge \vec{X}_0 = \vec{B} \implies \vec{A} \wedge (\vec{A} \wedge \vec{X}_0) = (\vec{A} \wedge \vec{B})$
    $\vec{A}.(\vec{A}.\vec{X}_0) = \vec{X}_0.(\vec{A}.\vec{A}) = \vec{A} \wedge \vec{B} \implies \vec{X}_0 = -\frac{\vec{A} \wedge \vec{B}}{(\vec{A})^2}$

Les vecteurs :

- Soit $\vec{X}$ quelconque solution de (1)
  $\Longrightarrow \vec{A} \wedge (\vec{X} - \vec{X}_0) = \vec{0}$ (2) $\vec{A} \neq \vec{0}$, $\vec{X} \neq \vec{X}_0$, l'équation (2) a une solution si : $\vec{X} - \vec{X}_0 = \lambda \vec{A}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

Donc la solution générale de (1) est :

$$\vec{X} = -\frac{\vec{A} \wedge \vec{B}}{(\vec{A})^2} + \lambda \vec{A}$$

Résumé des solutions :

$\vec{A}.\vec{B} \neq 0 \longrightarrow$ pas de solution
$\vec{A}.\vec{B} = 0 \longrightarrow \vec{A} = 0$:

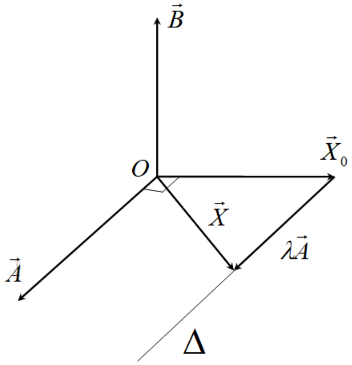
$$\begin{cases} \vec{B} = 0 \longrightarrow \textit{tous les vecteurs de } E_3 \textit{ sont solution} \\ \vec{B} \neq 0 \longrightarrow \textit{pas solution} \end{cases}$$

Les vecteurs :

$$\vec{A}.\vec{B} = 0 \longrightarrow \vec{A} \neq 0 :$$

$$\begin{cases} \vec{B} \neq 0 \longrightarrow \vec{X} = \vec{X}_0 + \lambda\vec{A} \\ \vec{B} = 0 \longrightarrow \vec{X}_0 = 0.\vec{X} = \lambda\vec{A} \end{cases}$$

Interprétation géométrique



Plan

Rappels mathématiques sur le calcul vectoriel

On se place dans l'espace euclidien E, de dimension 3 et du base $B(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs de E.

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{e}_i$$

$$\vec{b} = \sum_{i=1}^{n} b_i \vec{e}_i$$

exemple :

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e}_i = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$$

Rappels mathématiques sur le calcul vectoriel

- Somme : $\vec{a} + \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{e}_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)\vec{e}_i$
- Produit par scalaire : soit $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda\vec{a} = \sum \lambda a_i \vec{e}_i$
- Produit par scalaire : $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ $\qquad \delta_{ij} = \left| \begin{array}{l} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = 1 \\ \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0 \;\; i \neq j \end{array} \right.$
- Produit Vectoriel : $\vec{a} \wedge \vec{b} = \left| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -a_1 b_3 + a_3 b_1 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{array} \right.$
- Produit mixte de 3 vecteurs :
  $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = det(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c})$

Rappels mathématiques sur le calcul vectoriel

Propriété

Trilinéaire, Antisymétrique totalement ordonné et invariable
Par permutation circulaire $(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) = \vec{0}$ *ssi* $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}$ *sont coplanaires*

- *Double produit vectoriel :* $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$
- *Division vectoriel : soient* $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$ *deux vecteurs orthogonaux* $(\vec{a} \perp \vec{b})$
  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ *On cherche* $\vec{n}$ *tel que* $\vec{a} \wedge \vec{n} = \vec{b}$

Théorème

Si $\vec{a} \neq \vec{0}$ *et* $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ *Alors* $\vec{x} = \frac{\vec{b} \wedge \vec{a}}{\|\vec{a}\|} + \lambda \vec{a}$ $\lambda \in \mathbb{R}$

Rappels mathématiques sur le calcul vectoriel

Notion de repère : on se place dans l'espace euclidien E, un espace est défini par une origine et 3 vecteurs de base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

Notation

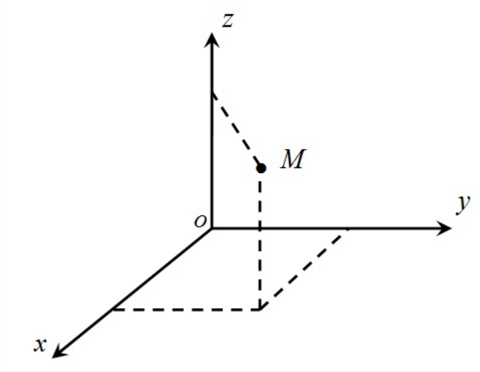
R(o,x,y,z) au quel on associe la base $B(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

Remarque

On utilise souvent des repères orthonormés

$$\|\vec{e}_i\|^2 = 1 \qquad \delta_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

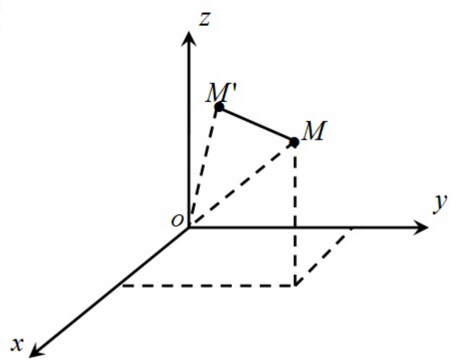
Rappels mathématiques sur le calcul vectoriel



$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}$$

$$\overrightarrow{OM} = \sum x_i \overrightarrow{e_i}$$

Rappels mathématiques sur le calcul vectoriel

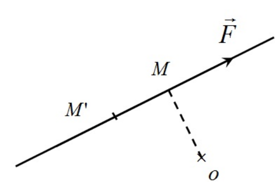


$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM'}$$

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}$$

Notion de moment

Soit une force $\vec{F}$ d'origine M le moment de F par rapport à O
$\mathscr{M}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$ Soit $M' \neq M$
$\overrightarrow{OM'} \wedge \vec{F} = (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MM'}) \wedge \vec{F} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} + \underbrace{\overrightarrow{MM'} \wedge \vec{F}}_{=0} = \mathscr{M}_O(\vec{F})$



Dans ce cas d'un vecteur glissant on peut choisir arbitrairement l'origine sur le support.

Ensemble de vecteurs

Soit E un ensemble fini de n vecteurs $E = \{F_i\}$ $i = 1 \cdots n$
si chaque $\vec{F}_i$ est issu de M_i $E_i = \{\vec{F}_i, M_i\}$
Éléments de réduction en O

- Somme : $\overrightarrow{R}(E) = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$
- Moment : $\overrightarrow{\mathscr{M}_O}(E) = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{F}_i$

Remarque

Il s'agit d'une simplification de l'ensemble des forces $\vec{F}_i$ lièes à (S) que l'on rèduit à 6 composants (infinit de composantes)

$$\tau = \left| \begin{array}{l} \overrightarrow{R} \Rightarrow 3 \text{ comp} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}_O}(S) \Rightarrow 3 \text{ comp} \end{array} \right.$$

Ensemble de vecteurs

Cas ou E a une répartition continue sur un domiane D

- Pour l'arc de courbe : $\overrightarrow{R}(E) = \int\limits_D \overrightarrow{f(m)}ds$

$\overrightarrow{\mathscr{M}_O(E)} = \int\limits_D \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{f(m)}ds$

- Pour une surface : $\overrightarrow{R}(E) = \iint\limits_D \overrightarrow{f}(m)d\sigma$

$\overrightarrow{\mathscr{M}_O(E)} = \iint\limits_D \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{f(m)}d\sigma$

Plus généralement

$$\overrightarrow{R}(E) = \iint\limits_D \overrightarrow{f(m)}d\omega$$

$$\overrightarrow{\mathscr{M}_O(E)} = \iint\limits_D (\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{f(m)})d\omega$$

Ensemble de vecteurs

Propriétés fondamentales

- *Additivité : Si E_1 et E_2 sont disjoints et $E_1 \cap E_2 = \emptyset$*

$$\overrightarrow{R}(E_1 \cup E_2) = \overrightarrow{R}(E_1) + \overrightarrow{R}(E_2)$$

$$\overrightarrow{\mathscr{M}_O}(E_1 \cup E_2) = \overrightarrow{\mathscr{M}_O}(E_1) + \overrightarrow{\mathscr{M}_O}(E_2)$$

Ensemble de vecteurs

Propriétés fondamentales

- *Changement d'origine (élément de vecteur en O)*

$$\overrightarrow{R}(E) = \overrightarrow{S'}(E)$$

$$\overrightarrow{\mathscr{M}_{O'}}(E) = \int_D (\overrightarrow{O'M} \wedge \overrightarrow{f(m)})d\omega = \int_D [(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM}) \wedge \overrightarrow{f(m)}]d\omega$$

$$= \int_D (\overrightarrow{O'O} \wedge \overrightarrow{f(m)})d\omega + \int_D (\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{f(m)})d\omega$$

$$= \overrightarrow{O'O} \wedge \int_D \overrightarrow{f(m)}d\omega + \overrightarrow{\mathscr{M}_{O'}}(E)$$

$$\overrightarrow{\mathscr{M}_{O'}}(E) = \overrightarrow{O'O} \wedge \overrightarrow{R}(E) + \overrightarrow{\mathscr{M}_O}(E) = \overrightarrow{\mathscr{M}_O}(E) + \overrightarrow{R}(E) \wedge \overrightarrow{O'O}$$

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = -(\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a}) \\ \overrightarrow{O'O} \wedge \overrightarrow{R}(E) = -\overrightarrow{O'O} \wedge \overrightarrow{R}(E) = \overrightarrow{R}(E) \wedge \overrightarrow{OO'} \end{pmatrix}$$

Application antisymétrique

Définition

Soit f une application de $E \to E$ f est antisymétrique si

$$\forall (a,b) \in E^2 \qquad \vec{a} f(\vec{b}) = -\vec{b} f(\vec{a})$$

- L'application antisymétrique est linéaire
  f est linéaire $\Longleftrightarrow \forall (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2 \qquad \forall (a_1, a_2) \in E^2$
  $f(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) = \alpha_1 f(a_1) + \alpha_2 f(a_2)$

Application antisymétrique

- Matrice associé à f :
  Relativement à la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de E, $f$est entièrement déterminée par les données suivants :

$$f(\overrightarrow{i}) = \alpha_{11}\overrightarrow{i} + \alpha_{21}\overrightarrow{j} + \alpha_{31}\overrightarrow{k}$$
$$f(\overrightarrow{j}) = \alpha_{12}\overrightarrow{i} + \alpha_{22}\overrightarrow{j} + \alpha_{32}\overrightarrow{k}$$
$$f(\overrightarrow{k}) = \alpha_{13}\overrightarrow{i} + \alpha_{23}\overrightarrow{j} + \alpha_{33}\overrightarrow{k}$$

Donc la matrice associé à f dans la base B

$$\mathscr{M}_B(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\vec{i}) & f(\vec{j}) & f(\vec{k}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \end{array}$$

Application antisymétrique

Or f antisymétrique $\overrightarrow{a} f(\overrightarrow{b}) = -\overrightarrow{b} f(\overrightarrow{a})$

- $\overrightarrow{i} f(\overrightarrow{i}) = -\overrightarrow{i} f(\overrightarrow{i}) \Longrightarrow \alpha_{11} = -\alpha_{11} \Longrightarrow \alpha_{11} = 0$ de même $\alpha_{22} = -\alpha_{33} = 0$
- $\overrightarrow{i} f(\overrightarrow{j}) = -\overrightarrow{j} f(\overrightarrow{i}) \Longrightarrow \alpha_{12} = -\alpha_{21} = -S_3$
  $\alpha_{23} = -\alpha_{32} = -S_1$
  $\alpha_{31} = -\alpha_{13} = -S_2$

$$\mathscr{M}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & -S_3 & S_2 \\ -S_3 & 0 & -S_1 \\ -S_2 & S_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ensemble de vecteurs

Soit $\overrightarrow{a'} = f(\overrightarrow{a})$

$$\begin{pmatrix} a'_2 \\ a'_1 \\ a'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -S_3 & S_2 \\ -S_3 & 0 & -S_1 \\ -S_2 & S_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_2 a_3 - S_3 a_2 \\ S_3 a_1 - S_1 a_3 \\ S_1 a_2 - S_2 a_1 \end{pmatrix}$$

Soit $\overrightarrow{f} \begin{vmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{vmatrix} \overrightarrow{a'} = f(\overrightarrow{a}) = \begin{vmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} = \overrightarrow{f} \wedge \overrightarrow{a}$

donc $\overrightarrow{a'} = \overrightarrow{f} \wedge \overrightarrow{a}$

donc l'application antisymétrique est entièrement déterminé par connaissance de $\overrightarrow{f}$ appelé vecteur de l'application antisymétrique.

Champ antisymétrique

Soit $\overrightarrow{u}$ l'application de $\begin{array}{l} \Sigma \to E \\ P \to \overrightarrow{u}(P) \end{array}$ définit un champ antisymétrique

Définition

un champ est antisymetrique s'il existe une application f antisymetrique telle que : $\forall (P,Q) \in \Sigma^2 \ \overrightarrow{\mathscr{M}}(P) = \overrightarrow{\mathscr{M}}(Q) + f(\overrightarrow{PQ})$ $\overrightarrow{a} = f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{f} \wedge \overrightarrow{a} \Longrightarrow \overrightarrow{\mathscr{M}}(P) = \overrightarrow{\mathscr{M}}(Q) + \overrightarrow{f} \wedge \overrightarrow{PQ}$ *f est appelé le vecteur du champ antisymétrique.*

Définition d'un torseur

Un torseur est par définition constitué d'un champ antisymétrique (champ de moments) et d'un vecteur associé appelé résultante $\overrightarrow{R}$.

Définition

On appelle torseur un ensemble de deux vecteurs $\overrightarrow{R}$ et $\overrightarrow{\mathscr{M}}$ satisfaisant les conditions suivantes :

(i) *Le champ $\overrightarrow{R}$ est uniforme (même champ en tout point)*

(ii) *Le champ $\overrightarrow{\mathscr{M}}$ vérifie $\overrightarrow{\mathscr{M}_B} = \overrightarrow{\mathscr{M}_A} + \overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{AB}$*

Définition d'un torseur

Notation

$$[\tau] = [T] = \left[\overrightarrow{R}, \overrightarrow{\mathscr{M}}\right]$$

(i) $\overrightarrow{R}$: *Torseur*

(ii) $\overrightarrow{\mathscr{M}}$: *Moment*

$$[\tau_A] = [T_A] = \left[\overrightarrow{R}_A, \overrightarrow{\mathscr{M}}_A\right]$$

Définition d'un torseur

Propriété

Les torseurs définissent un espace vectoriel

- $[\tau_1] + [\tau_2] = \left[\overrightarrow{R}_1, \overrightarrow{\mathscr{M}}_1\right] + \left[\overrightarrow{R}_2, \overrightarrow{\mathscr{M}}_2\right] = \left[\overrightarrow{R}_1 + \overrightarrow{R}_2, \overrightarrow{\mathscr{M}}_1 + \overrightarrow{\mathscr{M}}_2\right]$
- $\lambda\,[\tau_1] = \left[\lambda\overrightarrow{R}_1, \lambda\overrightarrow{\mathscr{M}}_1\right]$

Éléments de réduction d'un torseurs

- $[\tau_A] = \left[\overrightarrow{R}_A, \overrightarrow{\mathscr{M}}_A\right]$
  $\overrightarrow{R}_A$ et $\overrightarrow{\mathscr{M}}_A$ *définissent les éléments de réduction de* τ_A
  $\overrightarrow{\mathscr{M}}_B = \overrightarrow{\mathscr{M}}_A + \overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{AB}$
- $[\tau_1] = [\tau_2]$ *si seulement si* $\left[\overrightarrow{R}_1, \overrightarrow{\mathscr{M}}_1\right] = \left[\overrightarrow{R}_2, \overrightarrow{\mathscr{M}}_2\right]$ *et* $\overrightarrow{R}_1 = \overrightarrow{R}_2$
  $\overrightarrow{\mathscr{M}}_1 = \overrightarrow{\mathscr{M}}_2$

Invariant d'un torseur

(a) **Invariant vectoriel** :

Par définition $\overrightarrow{R}$ est l'invariant vectoriel du torseur τ.

(b) **Invariant scalaire** : Soit τ un torseur $\left[\overrightarrow{R}, \overrightarrow{\mathscr{M}}\right]$

$\forall (P, Q) \in \Sigma \qquad \tau_P = \left[\overrightarrow{R}, \overrightarrow{\mathscr{M}}_P\right] \qquad \tau_Q = \left[\overrightarrow{R}, \overrightarrow{\mathscr{M}}_Q\right]$

On calcule :

$$\overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{\mathscr{M}}(P) = \overrightarrow{R}(\overrightarrow{\mathscr{M}}(Q) + \overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{QP}) = \overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{\mathscr{M}}(Q) + \underbrace{\overrightarrow{R} \cdot (\overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{PQ})}_{=\overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{QP} = 0}$$

$\overrightarrow{R} \cdot (P) = \overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{\mathscr{M}}(Q) = I \qquad$ "Invariant scalaire"

Par définition

$\overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{\mathscr{M}}(Q) = I$ est **l'invariant scalaire du torseur** $\tau \left[\overrightarrow{R}, \overrightarrow{\mathscr{M}}\right]$

Cas particulier I=0

(a) $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{\mathscr{M}} = \overrightarrow{0} \rightarrow$ **torseur nul**.

(b) $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{\mathscr{M}} \neq \overrightarrow{0} \rightarrow$ **torseur est un couple**
$\tau = \tau\left[\overrightarrow{0}, \overrightarrow{\mathscr{M}}_A\right]$

(c) $\overrightarrow{R} \neq \overrightarrow{0} \implies \overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{\mathscr{M}}(A) = 0 \implies \overrightarrow{\mathscr{M}}(A) = \overrightarrow{0}$ **le torseur est un glisseur** $\tau = \tau\left[\overrightarrow{R}, \overrightarrow{0}\right]$

(d) $I \neq 0$ **le torseur n'est ni couple ni glisseur et ni torseur nul**.

Tout torseurs $\tau\left[\overrightarrow{R}, \overrightarrow{\mathscr{M}}_A\right]$ peut être décomposé en la somme d'un torseur couple et un torseur glisseur

$$\tau\left[\overrightarrow{R}, \overrightarrow{\mathscr{M}}_A\right] = \left[\overrightarrow{R}, \overrightarrow{0}\right] + \left[\overrightarrow{0}, \overrightarrow{\mathscr{M}}_A\right]$$

$\mathbf{g}(A, \overrightarrow{R}) \quad \mathbf{C}(\overrightarrow{0}, \overrightarrow{\mathscr{M}}_A)$

Axe centrale du torseur

Soit le torseur $\tau\left[\overrightarrow{R}, \overrightarrow{\mathcal{M}}_A\right]$ l'invariant scalaire $I = \overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}}_A$

L'axe centrale du torseur Δ est définit par le fait que $\overrightarrow{R}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}_A}$ sont **colinéaires** : $\alpha \in \mathbb{R}^* \quad / \ \overrightarrow{\mathcal{M}}_A = \alpha \cdot \overrightarrow{R}$

$$\Longrightarrow \quad \overrightarrow{\mathcal{M}}_A = \overrightarrow{\mathcal{M}}_B + \overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{BA} = \alpha \cdot \overrightarrow{R}$$

$B = O \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{\mathcal{M}}_A = \overrightarrow{\mathcal{M}}_O + \overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{OA} = \alpha \cdot \overrightarrow{R}$

Or si $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$ $\exists x / \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b} \implies \overrightarrow{x} = \frac{\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a}}{\left\|\overrightarrow{a}\right\|^2} + \lambda \overrightarrow{a}$

$$\overrightarrow{OA} = \frac{\overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{\mathcal{M}}(O)}{\left\|\overrightarrow{S}\right\|^2} + \lambda \overrightarrow{R}$$

Cette relation définit l'axe centrale du torseur

Exemple de vecteurs particuliers :

Support concourant

L'ensemble $E = \{\overrightarrow{F_i}, \overrightarrow{\mathscr{M}_B}\}$ $g = [\overrightarrow{R}, \overrightarrow{O}]$

Support parallèle

La force $\overrightarrow{F_i} = F_i \cdot \overrightarrow{u}$

(a) La résultante

$$\overrightarrow{R} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i} = \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{F_i} \cdot \overrightarrow{u} \qquad (\overrightarrow{F} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i})$$

(b) $$\overrightarrow{\mathscr{M}_o} = \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F_i} \cdot \overrightarrow{u}) \implies \overrightarrow{\mathscr{M}_o} = (\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i} \cdot \overrightarrow{OM_i}) \wedge \overrightarrow{u}$$

Exemple de vecteurs particuliers :

Cas à distinguer

(i) $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0} \implies \overrightarrow{R} = \overrightarrow{0} \implies$ Le torseur se déduit à un couple

(ii) $\overrightarrow{F} \neq \overrightarrow{0}$ $\exists G$ barycentres de $m_i (i = 1 \cdots n)$
$\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{OG} = \sum \overrightarrow{F_i} \cdot \overrightarrow{OM} \implies \overrightarrow{\mathscr{M}_o} = \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{R}$

L'axe centrale du torseur se réduit d'un glisseur l'axe centrale
$(\overrightarrow{\mathscr{M}} = \alpha \overrightarrow{R})$ qui passe par G et dont les vecteurs sont parallèles

On dit que le champ des moments est **équiprojectif** si seulement si

$$\overrightarrow{\mathscr{M}_A} \times \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\mathscr{M}_B} \times \overrightarrow{AB}$$

Propriété d'équiprojectivité

Réciproquement : Le champ équiprojectif est un champ du non d'un torseur

Propriétés

Les champs équiprojectifs forment un espace vectoriel

- $\tau_1 + \tau_2$ *est équiprojectif*
- $\lambda\tau$ *est equiprojectif*

Produit de deux torseurs

Soient τ_1 et τ_2 deux torseurs :

$$\tau_1\left[\overrightarrow{S_1},\overrightarrow{\mathscr{M}_1}\right]=\left|\begin{array}{l}\overrightarrow{R_1}\\ \overrightarrow{\mathscr{M}_1}\end{array}\right.$$

$$\tau_2\left[\overrightarrow{R_2},\overrightarrow{\mathscr{M}_2}\right]=\left|\begin{array}{l}\overrightarrow{R_2}\\ \overrightarrow{\mathscr{M}_2}\end{array}\right.$$

On appelle **Comoment** le produit de deux torseurs :

$$\tau_1\times\tau_2=\left|\begin{array}{l}\overrightarrow{R_1}\\ \overrightarrow{\mathscr{M}_1}\end{array}\right.\times\left|\begin{array}{l}\overrightarrow{R_2}\\ \overrightarrow{\mathscr{M}_2}\end{array}\right.=\overrightarrow{R_1}\times\overrightarrow{\mathscr{M}_2}+\overrightarrow{R_2}\times\overrightarrow{\mathscr{M}_1}$$

Produit de deux torseurs

Soient :

- $$\overrightarrow{\mathscr{M}_1}(B) = \overrightarrow{\mathscr{M}_1}(A) + \overrightarrow{R_1} \wedge \overrightarrow{AB}$$
- $$\overrightarrow{\mathscr{M}_2}(B) = \overrightarrow{\mathscr{M}_2}(A) + \overrightarrow{R_2} \wedge \overrightarrow{AB}$$

On calcule :

$$P_B = \left| \begin{array}{l} \overrightarrow{R_1} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}_1}(B) \end{array} \right. \times \left| \begin{array}{l} \overrightarrow{R_2} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}_2}(B) \end{array} \right. = \overrightarrow{R_1} \times \overrightarrow{\mathscr{M}_2}(B) + \overrightarrow{R_2} \times \overrightarrow{\mathscr{M}_1}(B)$$

$$\overrightarrow{R_2} \cdot \overrightarrow{\mathscr{M}_1}(B) + \overrightarrow{R_1} \cdot \overrightarrow{\mathscr{M}_2}(B) =$$

$$\overrightarrow{R_2} \cdot (\overrightarrow{\mathscr{M}_1}(A) + \overrightarrow{R_1} \wedge \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{R_1} \cdot (\overrightarrow{\mathscr{M}_2}(A) + \overrightarrow{R_2} \wedge \overrightarrow{AB}) \implies$$

$$P_B = P_A + \underbrace{(\overrightarrow{R_1} \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{R_2}) + (\overrightarrow{R_2} \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{R_1})}_{=0} =$$

$$\overrightarrow{R_2} \cdot \overrightarrow{\mathscr{M}_1}(A) + \overrightarrow{R_2} \cdot (\overrightarrow{R_1} \wedge \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{R_1} \cdot \overrightarrow{\mathscr{M}_2}(A) + \overrightarrow{R_1} \cdot (\overrightarrow{R_2} \wedge \overrightarrow{AB})$$

Produit de deux torseurs

$$P_B = P_A + \underbrace{(\overrightarrow{R_1} \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{R_2}) + (\overrightarrow{R_2} \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{R_1})}_{=0} =$$

$$\overrightarrow{R_2} \cdot \overrightarrow{\mathscr{M}_1}(A) + \overrightarrow{R_2} \cdot (\overrightarrow{R_1} \wedge \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{R_1} \cdot \overrightarrow{\mathscr{M}_2}(A) + \overrightarrow{R_1} \cdot (\overrightarrow{R_2} \wedge \overrightarrow{AB})$$
$$= \overrightarrow{R_2} \cdot \overrightarrow{\mathscr{M}_1}(A) + \overrightarrow{R_1} \cdot \overrightarrow{\mathscr{M}_2}(A) + \overrightarrow{R_2} \cdot (\overrightarrow{R_1} \wedge \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{R_1} \cdot (\overrightarrow{R_2} \wedge \overrightarrow{AB})$$
$$= P_A + (\overrightarrow{R_1} \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{R_2}) + (\overrightarrow{R_2} \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{R_1})$$

- $P_A = P_B$
- $(\overrightarrow{R_1} \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{R_2}) + (\overrightarrow{R_2} \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{R_1}) = 0$
- $(\overrightarrow{R_1} \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{R_2}) = -(\overrightarrow{R_2} \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{R_1})$

Produit de deux torseurs

Propriété

$[\tau_1] \cdot [\tau_2] = [\tau_2] \cdot [\tau_1]$

$[\tau_1] \cdot [\alpha \cdot [\tau_2] + \beta \cdot [\tau_3]] = \alpha \cdot [\tau_2] \cdot [\tau_1] + \beta \cdot [\tau_1] \cdot [\tau_3]$

Remarque

$[\tau]^2 = 0 \;\not\Rightarrow\; [\tau] = 0$

$\tau\left[\vec{R}, \vec{\mathcal{M}}\right] \Longrightarrow \tau^2 = \tau \cdot \tau = \left| \begin{matrix} \vec{R} \\ \vec{\mathcal{M}} \end{matrix} \right. \cdot \left| \begin{matrix} \vec{R} \\ \vec{\mathcal{M}} \end{matrix} \right. = 2\vec{R} \cdot \vec{\mathcal{M}} = 0 \;\not\Rightarrow$

$\tau = 0$

Plan

Introduction

La cinématique étudie les mouvements c'est à dire les déplacements au cours du temps, indépendamment des forces qui en sont la cause.

Rappels mathématiques :

On considère une base orthonormé $B(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} = \overrightarrow{a}$$

$$\frac{d\overrightarrow{a}}{dt} = \frac{dx}{dt}\overrightarrow{i} + \frac{dy}{dt}\overrightarrow{j} + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{a_1}\left|\begin{array}{l} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{array}\right. \qquad \overrightarrow{a_2}\left|\begin{array}{l} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{array}\right.$$

$$\frac{d(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2})}{dt}_{/R} = \frac{d\overrightarrow{a_1}}{dt}_{/R} + \frac{d\overrightarrow{a_2}}{dt}_{/R}$$

Rappels mathématiques :

$$\frac{d\lambda\overrightarrow{a}}{dt}_{/R} = \lambda\frac{d\overrightarrow{a}}{dt}_{/R}$$

$$\frac{d(\overrightarrow{a_1}\wedge\overrightarrow{a_2})}{dt}_{/R} = \frac{d\overrightarrow{a_1}}{dt}_{/R}\wedge\overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_2}\wedge\frac{d\overrightarrow{a_2}}{dt}_{/R}$$

Produit mixte

$$\overrightarrow{a_1}\cdot(\overrightarrow{a_2}\wedge\overrightarrow{a_3}) = (\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3})$$

$$\frac{d(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3})}{dt}_{/R} = (\frac{d\overrightarrow{a_1}}{dt}_{/R},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3}) + (\overrightarrow{a_1},\frac{d\overrightarrow{a_2}}{dt}_{/R},\overrightarrow{a_3}) + (\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\frac{d\overrightarrow{a_3}}{dt}_{/R})$$

Rappels mathématiques :

Soit $B(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ $\qquad \overrightarrow{a_{/R}} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$

Soit $B'(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ $\qquad \overrightarrow{a_{/R'}} = X\overrightarrow{I} + Y\overrightarrow{J} + Z\overrightarrow{K}$

$$\frac{d\overrightarrow{a}}{dt}_{/R} = \frac{dx}{dt}_{/R'}\overrightarrow{i} + \frac{dy}{dt}_{/R}\overrightarrow{j} + \frac{dz}{dt}_{/R}\overrightarrow{k} + x\frac{d\overrightarrow{i}}{dt}_{/R} + y\frac{d\overrightarrow{j}}{dt}_{/R} + z\frac{d\overrightarrow{k}}{dt}_{/R}$$

$$\frac{d\overrightarrow{a}}{dt}_{/R'} = \frac{dX}{dt}_{/R'}\overrightarrow{I} + \frac{dY}{dt}_{/R'}\overrightarrow{J} + \frac{dZ}{dt}_{/R'}\overrightarrow{K} + X\frac{d\overrightarrow{I}}{dt}_{/R'} + Y\frac{d\overrightarrow{J}}{dt}_{/R'} + Z\frac{d\overrightarrow{K}}{dt}_{/R'}$$

$$\frac{d\overrightarrow{a}}{dt}_{/R} = \frac{d\overrightarrow{a}}{dt}_{/R'} \quad si\ seulement\ si \quad \frac{d\overrightarrow{I}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{J}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{K}}{dt} = 0$$

$\Longrightarrow$ $\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}$ sont fixes dans la base B'

Champ d'un vecteur d'un solide :

Soient A et $B \in (S)$ $\quad d(A,B) = Cste$ Invariant

$$\overrightarrow{AB} = Cste \quad \Longrightarrow \quad AB = l$$

$$\overrightarrow{AB}^2 = l^2 \quad \Longrightarrow \quad \left.\frac{d\overrightarrow{AB}^2}{dt}\right|_{/R} = 0$$

$$2.\overrightarrow{AB}\left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right|_{/R} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{AB} \perp \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}$$

Or

$$\left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right|_{/R} = \left.\frac{d(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB})}{dt}\right|_{/R} = \left.\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right|_{/R} - \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right|_{/R} = \overrightarrow{V}(B)_{/R} - \overrightarrow{V}(A)_{/R}$$

Champ d'un vecteur d'un solide :

$$\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{V}(B) - \overrightarrow{V}(A)) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{V}(B) - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{V}(A) = 0$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{V}(B) - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{V}(A) = 0$$

"Propriété d'équiprojectivité"

Conclusion

Le champ de vitesse est équiprojectif

Or tout champ équiprojectif est antisymétrique

$\overrightarrow{V}_B = \overrightarrow{V}_A + \overrightarrow{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{\Omega}_{S/R}$ *vitesse instantanée de rotation de* S/R

Cas particuliers :

Mouvement de translation

On dit qu'un solide (S) a **un mouvement de translation** par rapport à R, si les bipoints formés à partir de deux points quelconques restent équipollent au cours du mouvement.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est invariant au cours de temps :

$$\Longrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{Cste} \Longrightarrow \left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right._{/R} = \overrightarrow{0}$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right._{/R} - \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right._{/R} = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{V}(B)_{/R} = \overrightarrow{V}(A)_{/R}$$

Or

$$\overrightarrow{V}(B)_{/R} = \overrightarrow{V}(A)_{/R} + \overrightarrow{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Cas particuliers :

- **Mouvement de translation**

$$\overrightarrow{V}(B) = \overrightarrow{V}(A) \Longrightarrow \overrightarrow{\Omega}_{S/R} = \overrightarrow{0}$$

$$\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{V_A}$$

$$\overrightarrow{\Omega}_{S/R} = \overrightarrow{0}$$

Cas particuliers :

Rotation autour d'un axe fixe de R :

Hypothèse

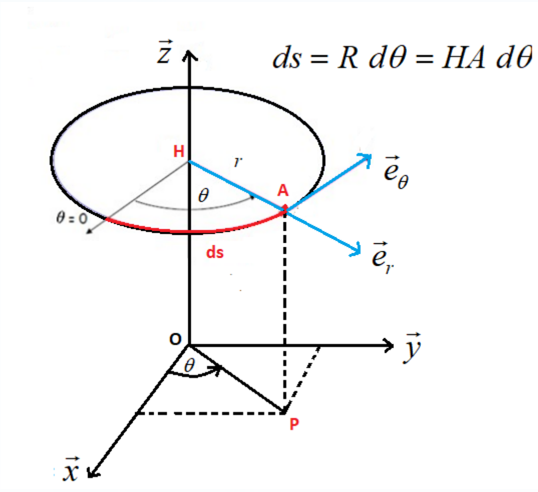
On suppose que les deux points sur l'axe $\overrightarrow{Oz}$ ont une vitesse nulle

$$A \in (S) \qquad \vec{V}(A) = \underbrace{\vec{V}(O)}_{=0} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OA}$$

Or
$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA} = OH\vec{e_z} + HA\vec{e_r}$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{V}(A) = \underbrace{\vec{V}(O)}_{=0} + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge (OH\vec{e}_z + HA\vec{e}_r) \qquad (1)$$

Rotation autour d'un axe fixe de R :



Rotation autour d'un axe fixe de R :

Hypothèse

Or le point A décrit un cercle de rayon $\overrightarrow{HA}$

$$\overrightarrow{V}(A) = \frac{d\overrightarrow{s}}{dt}_{/R} = \frac{ds}{dt}_{/R}\overrightarrow{e_r} = HA\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{e_r} = HA\frac{d\theta}{dt}_{/R}\overrightarrow{e_r} \qquad (2)$$

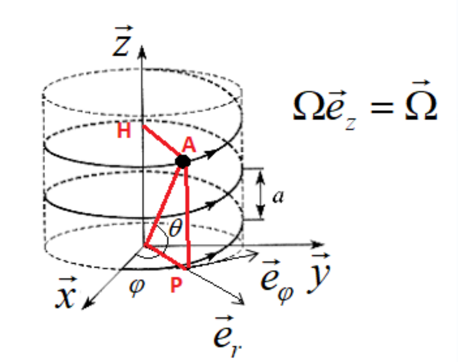
$$d\overrightarrow{s} = \overrightarrow{HA}d\theta \quad / \quad \frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{\Omega} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_z}$$

En comparant (1) et (2)

$$\Longrightarrow \overrightarrow{\Omega}_{S/R} = \dot{\Omega}\overrightarrow{e_z} \quad (\overrightarrow{\Omega} \parallel \overrightarrow{O_z})$$

Les torseurs cinématique se réduit en un glisseur

Mouvement hélicoïdal :



dont l'axe $\overrightarrow{Oz}$ $(\overrightarrow{V} \neq \overrightarrow{0})$

Mouvement hélicoïdal :

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HP}$$

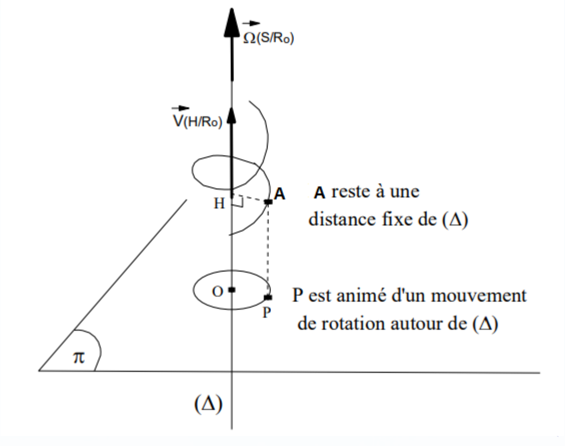
$$\overrightarrow{V}(A)_{/R} = \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}_{/R} = \frac{d\overrightarrow{OH}}{dt}_{/R} + \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}_{/R} = \overrightarrow{V}(H)_{/R} + \overrightarrow{V}(P)_{/R}$$

$$\text{Or} \quad \overrightarrow{V}(P) = \underbrace{\overrightarrow{V}(O)}_{=0} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OP}$$

$$\overrightarrow{V}(A) = \overrightarrow{V}(H) + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{V}(H) + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OP}$$

Mouvement hélicoïdal :

Dans ce cas on dit que le trajectoire de **A** est hélicoïdal.



Mouvement hélicoïdal :

$$\overrightarrow{OA} = \left| \begin{array}{l} x(t) = Rcos(\Omega t + C) \\ y(t) = Rsin(\Omega t + C) \\ z(t) = \frac{d\lambda}{dt} t + z_o \quad \text{avec} \quad (\overrightarrow{OH} = \lambda(t)\overrightarrow{z}) \end{array} \right.$$

Dans ce cas on dit que la trajectoire de **A** est hélicoïdale

Cas particuliers :

- **Mouvement arbitraire d'un solide :**

Soit A et $B \in (S)$ $\overrightarrow{V}_{A/R} = \overrightarrow{V}_{B/R} + \overrightarrow{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{BA}$

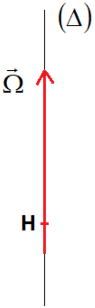
On suppose que le mouvement est quelconque et on cherche le lieu de points tel que $\overrightarrow{V}(H)$ soit colinéaire avec $\overrightarrow{\Omega}_{S/R}$

$$H = \left| \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right. \Longrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^* / \lambda \overrightarrow{\Omega}_{S/R} = \overrightarrow{V}(A) + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{V}(H)$$

$$\Longrightarrow \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \lambda\Omega \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} \dot{x}_A \\ \dot{y}_A \\ \dot{z}_A \end{array} \right. + \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{array} \right. \wedge \left| \begin{array}{l} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} y = y_A + \frac{\dot{x}_A}{\Omega} \\ x = x_A - \frac{\dot{y}_A}{\Omega} \\ \lambda\Omega = \dot{z}_A \end{array} \right.$$

Ce lieu est appelé **axe centrale du torseur cinématique** $//\Omega \overrightarrow{e}_z$

Mouvement arbitraire d'un solide :



<u>**Cas particuliers :**</u> Soit $H \in (\Delta)$

$$\overrightarrow{V}(H) = \overrightarrow{V}(A) + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{AH}$$
$$\overrightarrow{V}(H) = \lambda \Omega_{S/R} + \overrightarrow{AH} \wedge \overrightarrow{\Omega}_{S/R}$$

- Si $\overrightarrow{\Omega}_{S/R} = \overrightarrow{0} \implies$ **mouvement de translation**
- Si $\overrightarrow{\Omega}_{S/R} \neq \overrightarrow{0} \implies$ **mouvement de rotation autour de l'axe** (Δ)
- Si $\overrightarrow{\Omega}_{S/R} \neq \overrightarrow{0}$ $\overrightarrow{V}(H) \neq \overrightarrow{0} \implies$ **mouvement est hélicoïdale et s'est instantané de rotation**

Angles d'Euler

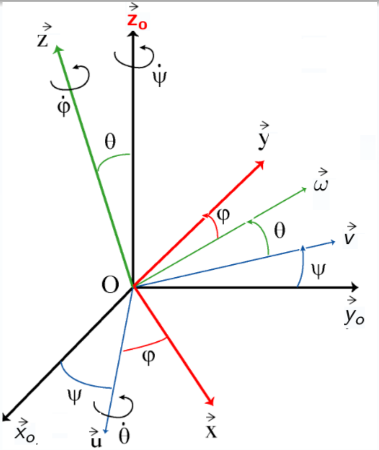
Soit $R_o(O, x_o, y_o, z_o)$ en repère absolue et $R_1(O, \omega, v, z_o)$ en repère lié au solide (S)

$$
\begin{array}{lll}
R_o(O, x_o, y_o, \mathbf{z_o}) & & \\
\downarrow & \psi/\mathbf{z_o} & \text{Angle de précession} \\
R_1(O, u, v, \mathbf{z_o}) & & \\
\downarrow & \theta/u & \text{Angle de nutation} \\
R_2(O, u, \omega, \mathbf{z}) & & \\
\downarrow & \varphi/\mathbf{z} & \text{Angle de rotation propre} \\
R_3(O, x, y, \mathbf{z}) & &
\end{array}
$$

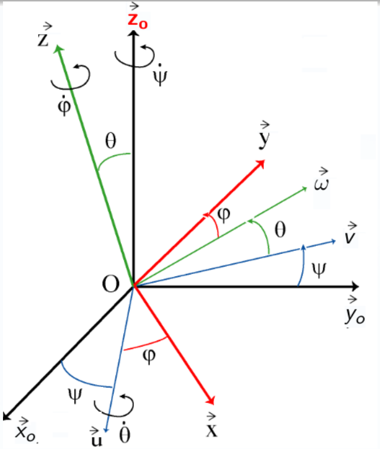
- ψ Angle de précession
- θ Angle de nutation
- φ Angle de rotation propre

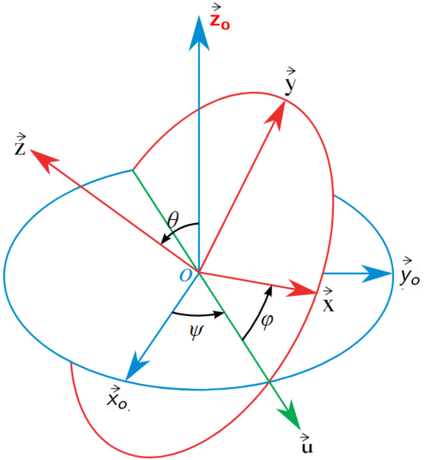
Angles d'Euler

- ψ Angle de précession
- θ Angle de nutation
- φ Angle de rotation propre



Angles d'Euler





Angles d'Euler

$\overrightarrow{u}$ vecteur unitaire dans la direction $O\overrightarrow{z}_0 \wedge \overrightarrow{z}$

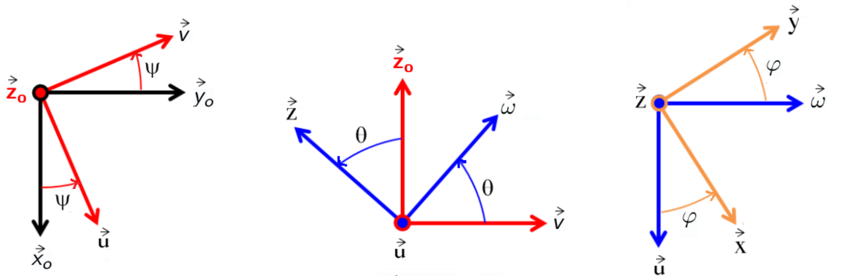
$$\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{z}_0 \wedge \overrightarrow{z}}{\|\overrightarrow{z}_0 \wedge \overrightarrow{z}\|}$$

Le vecteur de vitesse instantané de rotation

$$\overrightarrow{\Omega}_{S/R_0} = \overrightarrow{\Omega}_{R_3/R_0} = \overrightarrow{\Omega}_{R_3/R_2} + \overrightarrow{\Omega}_{R_2/R_1} + \overrightarrow{\Omega}_{R_1/R_0}$$

$$\overrightarrow{\Omega}_{\mathbf{S/R_0}} = \dot{\varphi}\overrightarrow{Z} + \dot{\theta}\overrightarrow{u} + \dot{\psi}\overrightarrow{z}_{\mathbf{0}}$$

Angles d'Euler



$$\vec{\Omega}_{R_1/R_0} = \dot{\psi}\,\vec{z}_0 \qquad \vec{\Omega}_{R_2/R_1} = \dot{\theta}\,\vec{u} \qquad \vec{\Omega}_{R_3/R_2} = \dot{\varphi}\,\vec{z}$$

$$\boxed{\vec{\Omega}_{S/R_0} = \dot{\varphi}\,\vec{z} + \dot{\theta}\,\vec{u} + \dot{\psi}\,\vec{z}_0}$$

Angles d'Euler

Soit A un point de (S) $\qquad \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA}(\psi(t), \theta(t), \varphi(t))$

$$\vec{V}_{A/R_0} = \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right._{/R_0} = \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{d\psi}\frac{d\psi}{dt}\right._{/R_0} + \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}\right._{/R_0} + \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\right._{/R_0}$$

$$= \dot{\psi}\left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{d\psi}\right._{/R_0} + \dot{\varphi}\left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{d\varphi}\right._{/R_0} + \dot{\theta}\left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{d\theta}\right._{/R_0}$$

Or

$$\left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{d\psi}\right._{/R_0} = \vec{z}_0 \wedge \overrightarrow{OA} \qquad \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{d\varphi}\right._{/R_0} = \vec{Z} \wedge \overrightarrow{OA} \qquad \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{d\theta}\right._{/R_0} = \vec{u} \wedge \overrightarrow{OA}$$

Angles d'Euler

$\Longrightarrow$

$$\overrightarrow{V}_{A/R_0} = \dot{\psi}\overrightarrow{z}_{\mathbf{0}} \wedge \overrightarrow{OA} + \dot{\varphi}\overrightarrow{Z} \wedge \overrightarrow{OA} + \dot{\theta}\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{V}_{A/R_0} = \underbrace{(\dot{\psi}\overrightarrow{z}_{\mathbf{0}} + \dot{\varphi}\overrightarrow{Z} + \dot{\theta}\overrightarrow{u})}_{=\overrightarrow{\mathbf{\Omega}}_{\mathbf{S/R_0}}} \wedge \overrightarrow{OA}$$

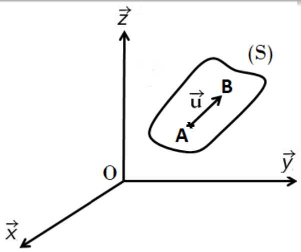
$$\overrightarrow{V}_{A/R_0} = \overrightarrow{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{V}(A) = \overrightarrow{V}(O) + \overrightarrow{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overrightarrow{OA}$$

Dérivé d'un vecteur lié à un solide

Soient A et B deux points de (S)

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u} = Cst \qquad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$



$$\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}_{/R} = \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}_{/R} = \frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}_{/R} - \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}_{/R}$$

$$= \overrightarrow{V}(B)_{/R} - \overrightarrow{V}(A)_{/R}$$

Or

$$\overrightarrow{V}(B) = \overrightarrow{V}(A) + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{AB} \qquad \forall (A, B) \in (S)$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{V}(B) - \overrightarrow{V}(A) = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{AB} \Longrightarrow \frac{d\overrightarrow{u}}{dt} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{u}$$

Dérivé d'un vecteur lié à un solide

Soit $\overrightarrow{\Omega} = p\,\overrightarrow{i} + q\,\overrightarrow{j} + r\,\overrightarrow{k} = \begin{vmatrix} p \\ q \\ r \end{vmatrix}$

$$\left.\frac{d\,\overrightarrow{i}}{dt}\right._{/R} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{i} \quad \text{de même} \quad \left.\frac{d\,\overrightarrow{j}}{dt}\right._{/R} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{j} \quad \text{et} \quad \left.\frac{d\,\overrightarrow{k}}{dt}\right._{/R} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{\Omega} = p\,\overrightarrow{i} + q\,\overrightarrow{j} + r\,\overrightarrow{k}$$

$$\Longrightarrow \left.\frac{d\,\overrightarrow{\Omega}}{dt}\right._{/R} = \dot{\mathbf{p}}\,\overrightarrow{i} + \dot{\mathbf{q}}\,\overrightarrow{j} + \dot{\mathbf{r}}\,\overrightarrow{k} + \mathbf{p}\frac{\mathbf{d}\,\overrightarrow{i}}{\mathbf{dt}} + \mathbf{q}\frac{\mathbf{d}\,\overrightarrow{j}}{\mathbf{dt}} + \mathbf{r}\frac{\mathbf{d}\,\overrightarrow{k}}{\mathbf{dt}}$$

Dérivé d'un vecteur lié à un solide

$$\frac{d\overrightarrow{\Omega}}{dt}_{/R} = \frac{d\overrightarrow{\Omega}}{dt}_{/R'} + p(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{i}) + q(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{j}) + r(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{k})$$

$$\frac{d\overrightarrow{\Omega}}{dt}_{/R} = \frac{d\overrightarrow{\Omega}}{dt}_{/R'} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \underbrace{(p\,\overrightarrow{i} + q\,\overrightarrow{j} + r\,\overrightarrow{k})}_{=\overrightarrow{\Omega}}$$

$$\frac{d\overrightarrow{\Omega}}{dt}_{/R} = \frac{d\overrightarrow{\Omega}}{dt}_{/R'} + \underbrace{\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{\Omega}}_{=\overrightarrow{0}}$$

$$\Longrightarrow \frac{d\overrightarrow{\Omega}}{dt}_{/R} = \frac{d\overrightarrow{\Omega}}{dt}_{/R'}$$

Dérivé d'un vecteur lié à un solide

Réciproquement :

Si on considère

$$\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}_{/R} = \frac{d\overrightarrow{u}}{dt}_{/R'} \quad / \quad \overrightarrow{u} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$$

$$\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}_{/R} = \frac{d\overrightarrow{u}}{dt}_{/R'} + \overrightarrow{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{u}$$

$\Longrightarrow$ vérifie si seulement si $\quad \overrightarrow{\Omega}_{R'/R} = \alpha\,\overrightarrow{u} \qquad \overrightarrow{\Omega}_{R'/R}$ et $\overrightarrow{u}$ sont **colinéaires**

Dérivé d'un vecteur lié à un solide

Conséquences

(i) *Si $\overrightarrow{u}$ est fixe par rapport R_1, il est également fixe par rapport à R.*

(ii) *Si la direction de $\overrightarrow{\Omega}$ est fixe dans R, il est de même par rapport à R_1.*

(iii) *Si l'axe instantané est fixe par rapport R, il est de même par rapport à R_1.*

Champ des accélérations d'un solide

Soit R_0 un repère orthonormé

Soit $\overrightarrow{V}(M) = \overrightarrow{V}(A) + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}$

$$\Longrightarrow \quad \overrightarrow{a}(M) = \frac{d\overrightarrow{V}(M)}{dt}_{/R_0} = \frac{d\overrightarrow{V}(A)}{dt}_{/R_0} + \frac{d\overrightarrow{\Omega}}{dt}_{/R_0} \wedge \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}_{/R_0}$$

$$= \overrightarrow{a}(A) + \dot{\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}}} \wedge \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \underbrace{(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM})}_{\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}_{/R_0} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}}$$

$$\overrightarrow{a}(M) = \overrightarrow{a}(A) + \dot{\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}}} \wedge \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{\Omega} \cdot \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\Omega} - \overrightarrow{\Omega}^2 \cdot \overrightarrow{AM}$$

Champ des accélérations d'un solide I

Cas particuliers :

a) **Mouvement de translation :** $\overrightarrow{\Omega}_{S/R} = \overrightarrow{0} \implies \overrightarrow{\Omega} = \overrightarrow{0}$

$$\implies \overrightarrow{a}(M) = \overrightarrow{a}(A) \implies \quad Le\,champ\,uniforme$$

b) **Mouvement de rotation autour d'une axe fixe**

$$\overrightarrow{a}(M) = \underbrace{\overrightarrow{\dot{\boldsymbol{\Omega}}} \wedge \overrightarrow{AM}}_{tangentielle} - \underbrace{\overrightarrow{\Omega}^2 \cdot \overrightarrow{AM}}_{radial}$$

- **L'accélération radiale** $f(\overrightarrow{\Omega}) \neq 0$
- **L'accélération tangentielle** $f(\overrightarrow{\dot{\boldsymbol{\Omega}}})$

Champ des accélérations d'un solide II

$$\overrightarrow{\Omega} \neq \overrightarrow{0} \quad \overrightarrow{a}(M) = \overrightarrow{a}(A) + \overrightarrow{\dot{\boldsymbol{\Omega}}} \wedge \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{\Omega} \wedge (\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM})$$

$$\overrightarrow{a}(M) = \overrightarrow{a}(A) + \overrightarrow{\dot{\boldsymbol{\Omega}}} \wedge \overrightarrow{AM} + \underbrace{\overrightarrow{\Omega} \cdot \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\Omega}}_{=0} - \overrightarrow{\Omega}^2 \cdot \overrightarrow{AM}$$

$$\overrightarrow{a}(M) = \overrightarrow{a}(A) + \overrightarrow{\dot{\boldsymbol{\Omega}}} \wedge \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{\Omega}^2 \cdot \overrightarrow{AM}$$

$$\overrightarrow{\Omega} \left| \begin{array}{l} p \\ q \\ r \end{array} \right. \qquad \overrightarrow{AM} \left| \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right.$$

Champ des accélérations d'un solide III

$$\Longrightarrow \quad \left.\begin{array}{l} a_x(M) = a_x(A) + \dot{\mathbf{r}}\mathbf{y} + \dot{\mathbf{q}}\mathbf{z} - \dot{\mathbf{r}}^2\mathbf{x} \\ a_y(M) = a_y(A) - \dot{\mathbf{p}}\mathbf{z} + \dot{\mathbf{r}}\mathbf{x} - \dot{\mathbf{r}}^2\mathbf{y} \\ a_z(M) = a_z(A) - \dot{\mathbf{q}}\mathbf{x} + \dot{\mathbf{p}}\mathbf{y} - \dot{\mathbf{r}}^2\mathbf{z} \end{array}\right| = \overrightarrow{0}$$

deux cas possibles :

$a/$ $\dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{q}} \neq \mathbf{0} \Longrightarrow \overrightarrow{\dot{\Omega}}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\Omega}$

$b/$ $\dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \Longrightarrow \dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$

Champ des accélérations d'un solide IV

c) Mouvement hélicoïdal

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OP}$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{V}(A) = \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right|_{/R_0} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{/R_0} + \left.\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right|_{/R_0} = \vec{V}(M)_{/R_0} + \vec{V}(P)$$

Or

$$\vec{V}(M)_{/R_0} = \vec{V}(H)_{/R_0} \cdot \vec{e_z} \quad \text{et} \quad \vec{V}(P)_{/R_0} = \vec{\Omega}_{/R_0} \wedge \overrightarrow{OP}$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{V}(A)_{/R_0} = \vec{V}(M)_{/R_0} + \overrightarrow{AH} \wedge \vec{\Omega}_{S/R_0}$$

Champ des accélérations d'un solide V

$$\forall A, B \in (S) \implies \vec{V}(A)_{/R_0} = \vec{V}(B)_{/R_0} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overrightarrow{BA}$$

On cherche le lieu de point tel que $\vec{\Omega}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires.

$$\vec{V} \text{ colinéaire avec } \vec{\Omega}_{S/R_0} \implies \exists \lambda \in \mathbf{R}^*$$

$$\implies \lambda\vec{\Omega} = \vec{V}(A)_{/R_0} = \vec{V}(H)_{/R_0} + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overrightarrow{HA}$$

$$\vec{\Omega}\left|\begin{array}{l} \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{r}} \end{array}\right. \wedge \overrightarrow{\mathbf{HA}}\left|\begin{array}{l} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{array}\right. = \left|\begin{array}{l} \dot{\mathbf{q}}\mathbf{z} - \dot{\mathbf{r}}\mathbf{y} \\ -\dot{\mathbf{p}}\mathbf{z} + \dot{\mathbf{r}}\mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{p}}\mathbf{y} - \dot{\mathbf{q}}\mathbf{x} \end{array}\right.$$

Plan

Rappel :

On considère deux repères R_1 et R_2

R_1 : repère fixe ou absolue

R_2 : repère mobile (relatif par rapport R_1)

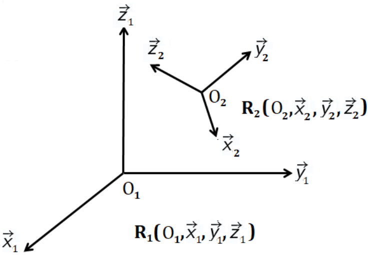
a) Mouvement par rapport R_1 : **Mouvement absolu**

b) Mouvement par rapport R_2 : **Mouvement relatif**

Soit M un point mobile par rapport à R_1 et R_2 $\quad M(x, y, z)$

$$\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2M}$$

Or
$$\left.\frac{d\vec{V}}{dt}\right|_{/R_1} = \left.\frac{d\vec{V}}{dt}\right|_{/R_2} + \vec{\Omega}_{R_2/R_1} \wedge \vec{V}$$



Rappel :

$$\vec{V}(M) = \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}_{/R_1} = \frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}_{/R_1} + \frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}_{/R_1}$$

$$= \vec{V}(O_2)_{/R_1} + \frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}_{/R_2} + \vec{\Omega}_{R_2/R_1} \wedge \overrightarrow{O_2M}$$

$$\vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}_{/R_1} \qquad \vec{V}_r = \frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}_{/R_2}$$

$$\Longrightarrow \vec{V}(M) = \vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}(O_{2/R_1}) + \vec{\Omega}_{R_2/R_1} \wedge \overrightarrow{O_2M}$$

$$\Longrightarrow \vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e \text{ avec } \vec{V}_e = \vec{V}(O_{2/R_1}) + \vec{\Omega}_{R_2/R_1} \wedge \overrightarrow{O_2M}$$

Accélération :

$$\vec{a}(M) = \left.\frac{d\vec{V}(M)}{dt}\right|_{/R} = \vec{a}_r + \vec{a}_c + \vec{a}_e$$

$$\vec{a}_e = \left.\frac{d\vec{V}(M)}{dt}\right|_{/R_1} \qquad \vec{a}_r = \left.\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right|_{/R_1} \qquad \vec{a}_c = 2\vec{\Omega}_{R_2/R_1} \wedge \vec{V}_r$$

$$\vec{V}_r = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Rappel :

Soit $\overrightarrow{u} = X\overrightarrow{i} + Y\overrightarrow{j} + Z\overrightarrow{k}$

$$\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}_{/R_1} = \frac{dX}{dt}\overrightarrow{i} + \frac{dY}{dt}\overrightarrow{j} + \frac{dZ}{dt}\overrightarrow{k} + X\frac{d\overrightarrow{i}}{dt} + Y\frac{d\overrightarrow{j}}{dt} + Z\frac{d\overrightarrow{k}}{dt}$$

$$\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}_{/R_1} = \frac{d\overrightarrow{u}}{dt}_{/R_2} + \underbrace{X.(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{i}) + Y.(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{j}) + Z.(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{k})}_{=\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}} \wedge (\mathbf{X}\overrightarrow{\mathbf{i}} + \mathbf{Y}\overrightarrow{\mathbf{j}} + \mathbf{Z}\overrightarrow{\mathbf{k}})}$$

$$\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}_{/R_1} = \frac{d\overrightarrow{u}}{dt}_{/R_2} + \overrightarrow{\Omega}_{R_2/R_1} \wedge \overrightarrow{u}$$

Généralisation :

On considère n repères $R_1 \cdots R_n$
Soit R_i un repère absolu et R_j un repère mobile.
Si on introduit un repère intermédiaire $R_k(O_k, x_k, y_k, z_k)$

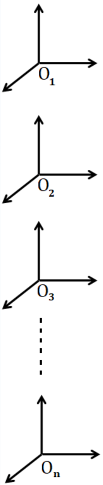
$$\overrightarrow{V}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{k}} = \overrightarrow{V}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{j}} + \overrightarrow{V}_{\mathbf{j}}^{\mathbf{k}}$$

Récurrence :

$$\overrightarrow{V}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{3}} = \overrightarrow{V}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{2}} + \overrightarrow{V}_{\mathbf{2}}^{\mathbf{3}}$$

$$\overrightarrow{V}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{4}} = \overrightarrow{V}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{2}} + \overrightarrow{V}_{\mathbf{2}}^{\mathbf{3}} + \overrightarrow{V}_{\mathbf{3}}^{\mathbf{4}} = \overrightarrow{V}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{3}} + \overrightarrow{V}_{\mathbf{3}}^{\mathbf{4}}$$

$$\overrightarrow{V}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{i}=\mathbf{1}}^{\mathbf{n}} \overrightarrow{V}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{i}+\mathbf{1}}$$



Généralisation :

Si on considère $\overrightarrow{\Omega}_i^j$ une vitesse instantanée de rotation du repère R_i/R_j

$$\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}_{/R_i} = \frac{d\overrightarrow{u}}{dt}_{/R_j} + \overrightarrow{\Omega}_{R_j/R_i} \wedge \overrightarrow{u}$$

Si on prend $\overrightarrow{\Omega}$ lié au repère R_k

$$\Longrightarrow \frac{d\overrightarrow{u}}{dt}_{/R_j} = \frac{d\overrightarrow{u}}{dt}_{/R_k} + \overrightarrow{\Omega}_j^k \wedge \overrightarrow{u}$$

de même :

$$\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}_{/R_j} = \overrightarrow{\Omega}_j \wedge \overrightarrow{u}$$

Généralisation :

$$\Longrightarrow \overrightarrow{\Omega}_i^k \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{\Omega}_i^j \wedge \overrightarrow{u} + \overrightarrow{\Omega}_j^k \wedge \overrightarrow{u} = (\overrightarrow{\Omega}_i^j + \overrightarrow{\Omega}_j^k) \wedge \overrightarrow{u}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{\Omega}_i^k = \overrightarrow{\Omega}_i^j + \overrightarrow{\Omega}_j^k$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{\Omega}_i^n = \sum_i^{n-1} \overrightarrow{\Omega}_i^{i+1}$$

Généralisation :

Exemple

Cas des angles d'Euler : $\overrightarrow{\Omega}_{3/0} = \overrightarrow{\Omega}_3^2 + \overrightarrow{\Omega}_2^1 + \overrightarrow{\Omega}_1^0$

Composition de l'accélération du point M *lié à* R_j/R_i

$$\overrightarrow{V}_i^k(M) = \overrightarrow{V}_i^j(M) + \overrightarrow{V}_j^k(M)$$

$$\Longrightarrow \quad \overrightarrow{a}_i^k(M) = \overrightarrow{a}_i^j(M) + \overrightarrow{a}_j^k(M) + 2\overrightarrow{\Omega}_i^j \wedge \overrightarrow{V}_j^k$$

$$\Longrightarrow \quad \overrightarrow{a}_i^n = \sum_{i=1}^{n-1} \overrightarrow{a}_i^{i+1} + 2\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n} \overrightarrow{\Omega}_j^{j+1} \wedge \overrightarrow{V}_i^{i+1}\right)$$

Mouvements inverses :

On considère deux repères R_1 et R_3
On passe de $R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow R_3 = R_1$

$$\overrightarrow{V}_1^3 = \overrightarrow{V}_1^2 + \overrightarrow{V}_2^1 = \overrightarrow{0} \implies \overrightarrow{V}_1^2 + \overrightarrow{V}_2^1 = \overrightarrow{0}$$

$$\implies \overrightarrow{V}_1^2 = -\overrightarrow{V}_2^1 \text{ ou } \overrightarrow{V}_i^j = -\overrightarrow{V}_j^i$$

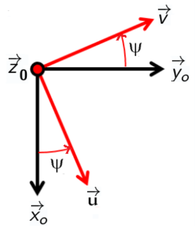
On a une formule analogique pour les accélérations angulaires

$$\overrightarrow{\Omega}_1^2 + \overrightarrow{\Omega}_2^1 = \overrightarrow{0} \implies \overrightarrow{\Omega}_1^2 = -\overrightarrow{\Omega}_2^1$$

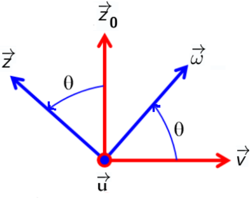
Cas de rotation d'un solide autour d'un axe fixe :

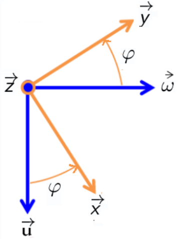
C'est le cas des angles d'Euler

$$\overrightarrow{\mathbf{v}} = \cos\psi\,\overrightarrow{\mathbf{y_0}} - \sin\psi\,\overrightarrow{\mathbf{x_0}}$$
$$\overrightarrow{\mathbf{u}} = \cos\psi\,\overrightarrow{\mathbf{x_0}} + \sin\psi\,\overrightarrow{\mathbf{y_0}}$$



$$\overrightarrow{\mathbf{v}} = \cos\theta\,\overrightarrow{\omega} - \sin\theta\,\overrightarrow{\mathbf{z}}$$
$$\overrightarrow{\mathbf{z_0}} = \sin\theta\,\overrightarrow{\omega} + \cos\theta\,\overrightarrow{\mathbf{z}}$$

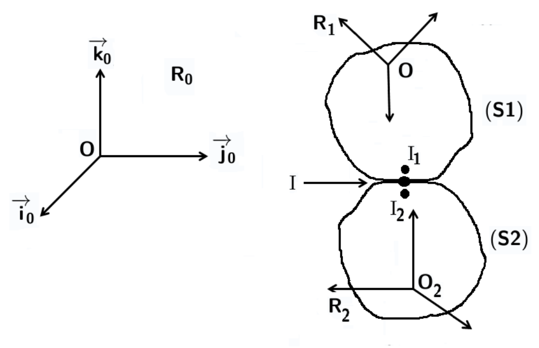




$$\overrightarrow{\mathbf{x}} = \cos\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{u}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{\omega}$$
$$\overrightarrow{\mathbf{y}} = -\sin\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{u}} + \cos\varphi\,\overrightarrow{\omega}$$

Définition :

On considére deux solides **(S1)** et **(S2)** en mouvement par rapport à un référentiel $\mathbf{R_0}(\mathbf{O}, \overrightarrow{\mathbf{i}}_0, \overrightarrow{\mathbf{j}}_0, \overrightarrow{\mathbf{k}}_0)$ de manière à ce que leurs surfaces restent en contact ponctuel.



Définition :

A chaque instant, on doit distinguer 3 points confondus dont les vitesses et les accélérations sont différentes en général :

- le point matériel I_1 ($I_1 \in S_1$) ;
- le point matériel I_2 ($I_2 \in S_2$) ;
- le point géométrique I (non lié).

Au cours du temps, le point I est confondu avec les différents points matériels de contact.

Vitesse de glissement :

Le glissement décrit un mouvement relatif entre deux solides en contact.

Définition

On appelle vitesse de glissement de (S_1) sur (S_2), la vitesse de (I_1) par rapport à (S_2).

Notation

$\vec{V}_g(S_1/S_2) = \vec{V}(I_1 \in S_1) - \vec{V}(I_2 \in S_2)$ $\quad (I_1 \in S_1$ et R_2 lié à $S_2)$

Vitesse de glissement :

Autres expressions de cette vitesse
Nous considérons R_0 absolu et R_2 relatif et cherchons

$$\vec{V}(I_1/R_0) = \vec{V}_r(I_1) + \vec{V}_e(I_1)$$

Or

$$\vec{V}_r(I_1) - \vec{V}(I_1/R_2) = \vec{V}_g(S_1/S_2)$$

$$\vec{V}_e(I_1) = \vec{V}(O_2/R_0) + \vec{\Omega}(R_2/R_0) \wedge \overrightarrow{O_2 I_1} = \vec{V}(I_2/R_0) \qquad (1)$$

$$\vec{V}(O_2/R_0) = \vec{V}(I_2/R_0) + \vec{\Omega}(R_2/R_0) \wedge \overrightarrow{I_1 O_2} \qquad (2)$$

(1) et (2) $\Longrightarrow$

$$\vec{V}_e(I_1) = \vec{V}(I_2/R_0)$$

Vitesse de glissement :

$$\overrightarrow{v}(I_1/R_0) = \overrightarrow{v}(I_1/R_2) - \overrightarrow{v}(I_2/R_0)$$

$\Longrightarrow$

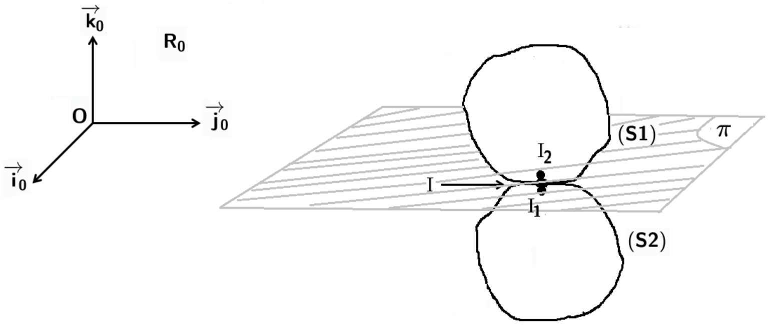
$$\overrightarrow{v}(I_1/R_2) = \overrightarrow{v}(I_1/R_0) + \overrightarrow{v}(I_2/R_0) = \overrightarrow{v}_g(S_1/S_2)$$

De manière plus générale ($\forall$ le repère R) :

$$\overrightarrow{v}_g(S_1/S_2) = \frac{d\overrightarrow{I_2 I_1}}{dt}_{/R} = \overrightarrow{v}(I_1/R) - \overrightarrow{v}(I_2/R)$$

Vitesse de glissement :

C'est une vitesse indépendante du repère par rapport auquel **(S1)** et **(S2)** sont en mouvement, et elle est contenue dans le plan tangent (π) commun à **(S1)** et **(S2)**.



Démonstration :

La loi de composition des vitesses nous permet d'écrire :

$$\vec{V}(I/R_0) = \vec{V}(I/R_1) + \underbrace{\vec{V}(O_1/R_0) + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1 I}}_{\vec{V}_e(I)=\vec{V}(I_1/R_0)}$$

$$\vec{V}(I/R_0) = \vec{V}(I/R_1) + \vec{V}(I_1/R_0) \qquad (R_1 \ \text{relatif})$$

$$\vec{V}(I/R_0) = \vec{V}(I/R_2) + \vec{V}(I_2/R_0) \qquad (R_2 \ \text{relatif})$$

Or

$$\vec{V}_g(S_1/S_2) = \vec{V}(I_1/R_0) \qquad \vec{V}(I_2/R_0) = \underbrace{\vec{V}(I/R_2)}_{\in\pi} \qquad \underbrace{\vec{V}(I/R_1)}_{\in\pi}$$

Plan

Notion de masse :

Définition

Un point matériel est un système matériel reproduit en un point géométrique au quel on associe une masse invariante (masse inerte).
A tout système $(\mathbf{S})$*, on associe un scalaire* $> \mathbf{0}$.

$$\mathbf{m(s)} = \int_{\mathbf{S}} \mathbf{dm}$$

Notion de masse :

Cas discret :

Soit $(\mathbf{S})$ un système matériel constitue de $\mathbf{n}$ masse $\mathbf{n_i}(\mathbf{M_i})$.
La masse de (S) :

$$\mathbf{m(s)} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{m_i}$$

Notion de masse :

Cas d'une ligne :

$$\mathbf{dm} = \rho\mathbf{ds} \quad \rho : \text{densité linéique} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{m(s)} = \int_{\mathscr{C}} \mathbf{dm} = \int_{\mathscr{C}} \rho\mathbf{ds}$$

Cas d'une surface :

$$\mathbf{dm} = \rho\mathbf{d}\sigma \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{m(S)} = \iint_{\mathscr{S}} \rho\mathbf{d}\sigma$$

Cas d'un volume :

$$\mathbf{dm} = \rho\mathbf{d}v \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{m(S)} = \iiint_{\infty} \rho\mathbf{d}v$$

Notion de masse :

Généralisation :

$$\mathbf{m(s)} = \int_{\infty} \rho \mathbf{d}\omega \qquad \rho = \rho(\mathbf{m}, \mathbf{t}) \qquad \text{avec} \qquad d\omega \left| \begin{array}{ll} ds & \text{ligne} \\ d\sigma & \text{surface} \\ dv & \text{volume} \end{array} \right.$$

Centre d'inertie :

C'est le point **G** défini par : $\mathbf{m} \cdot \overrightarrow{\mathbf{OG}} = \int \overrightarrow{\mathbf{OM}} \mathbf{dm}$

Cas particulier :

Si (**S**) est constitué de *n* points matériels disjoints

$$(\mathbf{S_i})\ [\mathbf{m_i}, \mathbf{M_i}]\,; \qquad \mathbf{S} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{S_i} \qquad \mathbf{S_i} \bigcap \mathbf{S_j} = \varnothing$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{\mathbf{OG}} = \frac{\int \overrightarrow{\mathbf{OM}}\mathbf{dm}}{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{m_i}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \int \overrightarrow{\mathbf{OM_i}}\mathbf{dm}}{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{m_i}}$$

Or $\mathbf{m} \cdot \overrightarrow{\mathbf{OG}} = \int_{(\mathbf{S})} \overrightarrow{\mathbf{OM}}\mathbf{dm} \Longrightarrow \overrightarrow{\mathbf{OG}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{m_i}\overrightarrow{\mathbf{OG_i}}}{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{m_i}}$ **G : Barycentre**

des points $\mathbf{G_i}$ affectés des masses $\mathbf{m_i}$

Moments d'inertie :

Soit un solide (**S**) de centre de gravité **G** et une droite (**Δ**)
Le moment d'inertie de (**S**) par rapport **Δ**

$$I_{/\Delta} = \int_{(S)} r^2 dm$$

$$I_{/ox} = \int_{(S)} (y^2 + z^2) dm$$

$$I_{/oy} = \int_{(S)} (x^2 + z^2) dm$$

$$I_{/oz} = \int_{(S)} (x^2 + y^2) dm$$

Théorème d'Huygens :

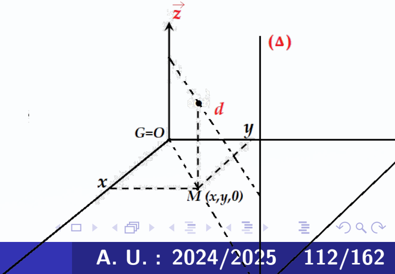
On choisit $\mathbf{\Delta}$ tel que $\mathbf{\Delta}//\overrightarrow{\mathbf{O}_z}$ $\mathbf{\Delta_G}$

$$\mathbf{I}_{/\mathbf{\Delta}} = \int_{(S)} [(\mathbf{x}-\mathbf{a})^2 + (\mathbf{y}-\mathbf{b})^2]\mathbf{dm} = \mathbf{I}_{/\mathbf{\Delta_G}} + \mathbf{m}(\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2 \underbrace{-2\mathbf{ax}-2\mathbf{by}}_{=\mathbf{0}})\mathbf{dm}$$

$$= \mathbf{I}_{/\mathbf{\Delta_G}} + \mathbf{m}(\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2)\mathbf{dm}$$

$$\int \mathbf{xdm} = \int \mathbf{ydm} = \mathbf{0} \text{ (car } \mathbf{G} \text{ est centre d'inertie de (S))}$$

$$\mathbf{I}_{/\mathbf{\Delta}} = \mathbf{I}_{/\mathbf{\Delta_G}} + \mathbf{md}^2$$



Variation de I_Δ quant à Δ passe par un point fixe :

Soit $\mathbf{M} \in (\mathbf{S})$ et $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (\alpha, \beta, \gamma)$ un vecteur unitaire de $\boldsymbol{\Delta}$

$$\overrightarrow{\mathbf{OM}} = \overrightarrow{\mathbf{OH}} + \overrightarrow{\mathbf{HM}} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{\mathbf{HM}} = \overrightarrow{\mathbf{OM}} - \overrightarrow{\mathbf{OH}}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{HM}}^2 = \mathbf{r}^2 = \overrightarrow{\mathbf{OM}}^2 - \overrightarrow{\mathbf{OH}}^2$$

$$\mathbf{I}_{/\boldsymbol{\Delta}} = \int_{(\mathbf{S})} \mathbf{r}^2 \mathbf{d}\omega = \int \overrightarrow{\mathbf{OM}}^2 \mathbf{dm} - \int \overrightarrow{\mathbf{OH}}^2 \mathbf{dm}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{OH}} = \mathbf{OH} \times \overrightarrow{\mathbf{u}} \quad (\overrightarrow{\mathbf{u}} \ \text{ vecteur unitaire de } \ \boldsymbol{\Delta})$$

Variation de I_Δ quant à Δ passe par un point fixe :

$$\overrightarrow{OH}^2 = OH^2 \times \overrightarrow{u}^2 = (OH \times \overrightarrow{u})^2$$

$$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \qquad \overrightarrow{u}(\alpha, \beta, \gamma) \qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

$$I_{/\Delta} = \underbrace{1}_{\star} \cdot \int \overrightarrow{OM}^2 dm - \int (\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{u})^2 dm$$

$$\overrightarrow{OH} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{u} \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{vmatrix}$$

$$(\star) \qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

Variation de I_Δ quant à Δ passe par un point fixe :

$\Longrightarrow$

$$\mathbf{I}_{/\mathbf{S}} = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \int \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 + \mathbf{z}^2 \mathbf{dm} - \int (\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} + \gamma \mathbf{z})^2 \mathbf{dm}$$

$\Longrightarrow$

$$\mathbf{I}_{/\mathbf{S}} = \alpha^2 \underbrace{\int_{(S)} (\mathbf{y}^2 + \mathbf{z}^2)\mathbf{dm}}_{\mathbf{A}} + \beta^2 \underbrace{\int_{(\mathbf{S})} (\mathbf{x}^2 + \mathbf{z}^2)\mathbf{dm}}_{\mathbf{B}} + \gamma^2 \underbrace{\int_{(S)} (\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2)\mathbf{dm}}_{\mathbf{C}} -$$

$$2\alpha\beta \underbrace{\int_{(\mathbf{S})} \mathbf{xydm}}_{-\mathbf{F}} - 2\beta\gamma \underbrace{\int_{(\mathbf{S})} \mathbf{yzdm}}_{-\mathbf{D}} - 2\alpha\gamma \underbrace{\int_{(\mathbf{S})} \mathbf{xzdm}}_{-\mathbf{E}}$$

D, **F**, **F** : Produits d'inertie.

Variation de I_Δ quant à Δ passe par un point fixe :

$$[\mathbf{I}] = \begin{pmatrix} \int(y^2+z^2)dm & -\int xydm & -\int xzdm \\ -\int xydm & \int(x^2+z^2)dm & -\int yzdm \\ -\int xzdm & -\int yzdm & \int(x^2+y^2)dm \end{pmatrix}$$

I s'appelle la matrice d'inertie associé au solide (S)

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I}_{/\Delta} = (\alpha, \beta, \gamma)\,[\mathbf{I}]\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Variation de I_Δ quant à Δ passe par un point fixe :

Remarque

On introduit une transformation linéarisé $f = \vec{v}.\mathscr{I}(\vec{u})$

$\Longrightarrow \mathbf{I}_{/\Delta} = \vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\mathscr{I}(\vec{u})$ *à cette application linéaire, on associe un torseur d'inertie* $\mathscr{I}$ *(du second ordre)*

$$\Longrightarrow \mathbf{I}_{/\Delta} = \int_{(S)} \overrightarrow{OM}^2 dm - \int_{(S)} \overrightarrow{OH}^2 dm - \int_{(S)} (\alpha x + \beta y + \gamma z) dm$$

$$\Longrightarrow \mathbf{I}_{/\Delta} = \int_{(S)} \overrightarrow{OM}\Upsilon dm - \int_{(S)} \overrightarrow{OM} \otimes \overrightarrow{OM} dm$$

Υ *tenseur unitaire* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{OM} \otimes \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}$

Rappel :

I est une matrice simplement diagonalisé

Soit λ une valeur propre associé au vecteur

$\implies det(A - \lambda I) = 0 \to$ valeur propres λ

Si $n = 3$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$P_\lambda(A) = det(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{pmatrix}$$

$\implies$ 3 valeurs propres qui peut être confondues

Rappel : I

– **1^er^ cas :** $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$

$\mathscr{I}(\overrightarrow{u_1}) = (\lambda\overrightarrow{u_1}) \cdot \overrightarrow{u_2} \implies \lambda\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{u_2}\mathscr{I}(\overrightarrow{u_1}) = \lambda\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2}$

$\implies (\lambda_1 - \lambda_2)\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2} = 0$

Or $\lambda_1 \neq \lambda_2 \implies \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2} = 0 \implies \overrightarrow{u_1} \perp \overrightarrow{u_2}$

$$\implies \text{3 axes principaux : } \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} \lambda_1 = A \\ \lambda_2 = B \\ \lambda_3 = C \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = A$, $\lambda_2 = B$ et $\lambda_3 = C$ soient les moments principaux d'inertie par rapport $\overrightarrow{O_x}, \overrightarrow{O_y}, \overrightarrow{O_z}$

Rappel : II

– 2[e] **cas :** $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$
C'est le cas de système de révolution.
Si on prend l'axe de z associé à λz

$$I = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

Rappel : III

– 3e **cas :** $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$

C'est le cas de la symétrie $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}$

Remarque

Si on a un plan de symétrie $\int \mathbf{yzdm} = \mathbf{0}$

Rappel : IV

– **Cas d'une plaque plane :**
Si $\overrightarrow{Oz}$ est l'axe principale d'inertie : $\mathbf{I}_{/\mathbf{Oz}} = \mathbf{I}_{/\mathbf{Ox}} + \mathbf{I}_{/\mathbf{Oy}}$

Rappel : V

Exemple

Barre homogène $(\mathbf{l}, \mathbf{m})$, *soit* $M \in (S)$

$$\mathbf{I}_{/Oy} = \int \mathbf{x}^2 \mathbf{dm} = \int \mathbf{x}^2 \varphi \mathbf{dx} = \varphi \int_0^{\mathbf{l}} \mathbf{x}^2 \mathbf{dx} = \varphi \left[\frac{\mathbf{x}^3}{3} \right]_0^{\mathbf{l}}$$

$$\varphi = \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{l}} \implies \mathbf{I}_{/Oy} = \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{l}} \frac{\mathbf{l}^3}{3} = \frac{\mathbf{ml}^2}{3}$$

$$\mathbf{I}_{/Ox} = \int \mathbf{y}^2 \mathbf{dm} = \int \mathbf{y}^2 \varphi \mathbf{dy} = \varphi \int \mathbf{y}^2 \mathbf{dy} = 0$$

Barre $(2\mathbf{l}, \mathbf{m})$

$$\mathbf{I}_{/Oy} = \frac{\mathbf{m}}{2\mathbf{l}} \frac{(2\mathbf{l})^3}{3} = \frac{4\mathbf{ml}^2}{3}$$

Rappel : VI

– **Cas d'un disque homogène :**
L'axe Oz est axe principale d'inertie.

$$\mathbf{I}_{/Oz} = \mathbf{I}_{/Ox} + \mathbf{I}_{/Oy} \quad \mathbf{I}_{/Ox} = \int_{(S)} \mathbf{r_2 dm}$$

$$\text{Or } \mathbf{dm} = \rho \mathbf{dS} \text{ et } \rho = \frac{\mathbf{m}}{\pi \mathbf{R}^2}$$

$$\mathbf{I}_{/Oz} = \rho \int \mathbf{r}^2 \mathbf{2}\pi \mathbf{rdr} = \mathbf{2}\pi\rho \int_0^{\mathbf{R}} \mathbf{r}^3 \mathbf{dr} = \mathbf{2}\pi\rho \frac{\mathbf{R}^4}{\mathbf{4}}$$

$$\mathbf{I}_{/Oz} = \mathbf{2}\pi \frac{\mathbf{m}}{\pi \mathbf{R}^2} = \frac{\mathbf{mR}^2}{\mathbf{2}}$$

$$\mathbf{I}_{/Oz} = \mathbf{I}_{/Ox} + \mathbf{I}_{/Oy} = \mathbf{2I}$$

$$\mathbf{I}_{/Ox} = \mathbf{I}_{/Oy} = \frac{\mathbf{I}_{/Oz}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{mR}^2}{\mathbf{4}}$$

Rappel : VII

– **Cas d'une Boule (Sphère homogène)**

$$I_{/O_x} = I_{/O_y} = I_{/O_z} = I_{/O} \qquad I_{/O} = \int (x^2 + y^2 + z^2)dm$$

$$I_{/O_y} = \int (x^2 + z^2)dm \quad I_{/O_x} = \int (y^2 + z^2)dm \quad I_{/O_z} = \int (x^2 + y^2)dm$$

$$I_{/O} = \int_0^R R^2 \rho 4\pi r^2 dr \quad r = 4\pi\rho\frac{R^5}{5} \quad \text{or} \quad \rho = \frac{m}{4\pi R^3}$$

Rappel : VIII

$$\Longrightarrow I_{/O} = \frac{3}{5}mR^2 \qquad V = 4\pi R^3 \qquad dV = 3 \times 4\pi R^2$$

$$I = \int rdm = \int r^2\rho dV = \int r^2\rho 3 \times 4\pi r^2 dr = 3 \times 4\pi\rho \int r^4 dr$$

$$I = 3 \times 4 \times \pi \times \rho \times \frac{R^5}{5} \qquad \rho = \frac{m}{4\pi R^3}$$

$$I = 3 \times 4 \times \pi \times \frac{m}{4 \times \pi \times R^3} \times \frac{R^5}{5} \Longrightarrow I = \frac{3}{5}mR^3$$

Torseur cinétique :

C'est un torseur τ défini par les quantités de mouvement $\overrightarrow{\mathbf{v}}(\mathbf{M})$
Il a pour éléments de réduction :

La résultante cinétique : $\overrightarrow{\rho} = \int \overrightarrow{v}(\mathbf{M})\mathbf{dm}$

Le moment cinétique : $\overrightarrow{\sigma} = \int \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{v}(\mathbf{M})\mathbf{dm}$

$$\overrightarrow{\sigma_0} = \overrightarrow{\mathscr{I}}\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\sin\theta + \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}\theta \\ \mathbf{A}\dot{\psi}\sin\theta \\ \mathbf{A}(\dot{\psi}\sin\theta + \dot{\varphi}) \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{\mathbf{l_0}} = \frac{d\overrightarrow{\mathbf{v_0}}}{\mathbf{dt}}_{/\mathbf{R2}} = \frac{d\overrightarrow{\mathbf{v_0}}}{\mathbf{dt}}_{/\mathbf{R3}} + \overrightarrow{\Omega_3} \wedge \overrightarrow{\mathbf{v_0}}$$

Exemple de calcul pour un repère matériel :

On considère essieu constitué par une barre homogène $2l$

2 roues « disques » $\mathbf{r} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{m}$

$(\mathbf{S})$: $\mathbf{AB}$ Barre homogène $\mathbf{AB} = \mathbf{2l}, \mathbf{m}$

2 roues $(\mathbf{r} = \mathbf{a}, \mathbf{m})$

$\mathbf{G}$ étant le centre de masse de $(\mathbf{S})$

$$\mathbf{T} = \underbrace{\mathbf{E}}_{\mathbf{cin}}\ \textbf{Translation} + \underbrace{\mathrm{E}}_{\mathrm{cin}}\ \text{rotation}$$

$$\mathbf{2E_c} = \mathbf{2T} = \mathbf{m}\overrightarrow{V}^{\mathbf{2}}(\mathbf{G}) + \overrightarrow{\Omega}\,\mathbf{I}\,\overrightarrow{\Omega}$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \qquad \Omega = \begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

Exemple de calcul pour un repère matériel :

$$2E_c = 2T = m\vec{V}^2(G) + \vec{\Omega} I \vec{\Omega}$$

$$= (2M + m)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{ml^2}{3}\dot{\psi}^2 + \frac{Ma^2}{2}\dot{\theta}^2 + 2ml^2\dot{\psi}^2 + \frac{Ma^2}{2}\dot{\varphi}^2 + 2\frac{ma^2}{4}\dot{\psi}^2$$

$$= (2M + m)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + (\frac{ml^2}{3} + 2ml^2 + 2\frac{ma^2}{4})\dot{\psi}^2 + \frac{Ma^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2)$$

Exemple de calcul pour un repère matériel :

Le moment cinétique : $\overrightarrow{\sigma_0} = \overrightarrow{I}\,\overrightarrow{\Omega}$

$$\overrightarrow{\sigma_0} = \overrightarrow{\sigma_0} + (2M+m)\overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{V}(G)$$

$$= (2M+m)[-a\dot{y}\overrightarrow{x_1} + a\dot{x}\overrightarrow{y_1}] + (x\dot{y} - \dot{y}x)\overrightarrow{z}_1 + (\frac{ml^2}{3} + 2ml^2 +$$

$$\frac{ma^2}{2})\dot{\psi}\overrightarrow{z}_1 + \frac{Ma^2}{2}(\dot{\theta} + \dot{\varphi})(\cos\psi\overrightarrow{x_1} + \sin\psi\overrightarrow{y_1})$$

Exemple de calcul pour un repère matériel :

Exemple

On considère 3 barres identiques AC BD et CD et une masselotte P de masse M $/\overrightarrow{CD}$ $2T = \underbrace{\frac{2}{3}ml^2\dot{\theta}^2 + ml^2\dot{\theta}^2}_{E_c \quad 3\ Barres} + \underbrace{M\vec{V}(P)}_{E_c \quad masselotte}$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CP} = \left| \begin{array}{l} l\cos\theta + x \\ l\sin\theta \\ 0 \end{array} \right.$$

$$2T = \frac{5}{3}ml^2\dot{\theta}^2 + M(\dot{x}^2 + 2l\cos\theta \times \dot{\theta} + l^2\dot{\theta})$$

Concepts utilisés en dynamique :

Definition

la dynamique est l'étude du mouvement indépendant des causes qui les provoquent

Repérage : On utilise un repère absolu pour repérer les points d'un solide.

Concepts utilisés en dynamique : I

- Invariance de la masse : la masse est un scalaire au cours de temps
- La mesure du temps chronomètre
- Forces
  - Forces concentrés : $\overrightarrow{F} = \sum F_i$
  - Forces réparties :
    - sur une ligne
    - sur une surface
    - sur un volume

Concepts utilisés en dynamique : II

- Forces intérieurs : $\overrightarrow{F_{12}} + \overrightarrow{F_{21}} = \overrightarrow{0}$ (Principe de l'action et de la réaction forces exerce par une partie d'un solide sur l'autre partie)
- Forces extérieurs : Soit les forces exercées sur le système (Poids, Réaction)
  - Forces actives : sont les données du problèmes connues
  - Forces de liaison : Forces de la réaction (inconnues)

Concepts utilisés en dynamique :

Exemple

Le poids : $\overrightarrow{P}$ *force extérieur active*

La réaction $\overrightarrow{R}$ *: force de liaison intérieur*

La force exercée sur les pédales inérieurs

Loi fondamentale de la mécanique classique :

Principe

Il existe un repère appelé repère absolue et un chronomètre (définissant le temps absolu) par rapport, nous avons l'énoncé suivant $\underbrace{[A]}_{\text{Torseur dynamique}} = \underbrace{[F_e]}_{\text{Torseur des forces extérieurs}}$

Remarque

$[F_e] = 0 \implies [A] = 0 \; m\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}_{/R_0} = \overrightarrow{0} \implies m\overrightarrow{V}(G) = cste$

(Mouvement rectiligne et uniforme par rapport une rotation)

$[A] = 0 = \frac{d}{dt}[P] = 0 \implies m\overrightarrow{V}(G) = cste$

Loi fondamentale de la mécanique classique :

Conséquences

Soit $(\mathbf{S})$ *un système matériel tel que* $\mathbf{S} = \mathbf{S_1} \cup \mathbf{S_2}$ $\qquad \mathbf{S} = \mathbf{S_1} \cap \mathbf{S_2}$

$[\mathbf{F_{e_1}}]$ *Forces exercées par* $\mathbf{S} \to (\mathbf{S_1})$

$[\mathbf{F_{e_2}}]$ *Forces exercées par* $\mathbf{S} \to (\mathbf{S_2})$

$[\mathbf{F_{e_i}}]$ *Torseur des forces exercées par* $(\mathbf{S})$ *sur* $\mathbf{S_i}$

$[\mathbf{f_2}]$ *Torseur des forces extérieur exercés par* $\mathbf{S_i}$ *sur* $\mathbf{S_j}$

Loi fondamentale de la mécanique classique :

Conséquences

Pour

$$(\mathbf{S_1}) \qquad [\mathbf{A_1}] = [\mathbf{F_{e1}}] + [\mathbf{f_{21}}]$$

$$(\mathbf{S_2}) \qquad [\mathbf{A_1}] = [\mathbf{F_{e2}}] + [\mathbf{f_{12}}]$$

Pour

$$(\mathbf{S}) \qquad [\mathbf{A}] = [\mathbf{A_1}] + [\mathbf{A_2}]$$

$$[\mathbf{A}] = \underbrace{[\mathbf{F_{e1}}] + [\mathbf{F_{e2}}]}_{[\mathbf{F_e}]} + [\mathbf{f_{21}}] + [\mathbf{f_{12}}]$$

Or

$$[\mathbf{A}] = [\mathbf{F_e}] \implies [\mathbf{f_{21}}] + [\mathbf{f_{12}}] = \mathbf{0}$$

$$[\mathbf{f_{21}}] = -[\mathbf{f_{12}}] \qquad \textit{(Loi d'action et de réaction)}$$

Loi fondamentale de la mécanique classique :

Changement de repère : Tout repère animé d'un mouvement

rectiligne et uniforme pour le même rôle qu'un repère absolue :
$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \cancel{\overrightarrow{a_c}} + \cancel{\overrightarrow{a_e}} \Longrightarrow \overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r}$

Donc tout repère animé d'un mouvement rectiligne uniforme est un repère galiléen dans lequel on applique le P.F.D.

Réciproque : Tout repère d lequel on peut appliquer le P.F.D. est

un repère en translation rectiligne et uniforme (repère galiléen)

Loi fondamentale de la mécanique classique :

Méthode des mouvements relatifs : Soit un repère R en

mouvement quelconques par rapport au repère absolue :
$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_c} + \overrightarrow{a_e} \implies \overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} - \overrightarrow{a_c} - \overrightarrow{a_e}$

$$\implies [A_r] = [A_a] - \underbrace{[A_c] - [A_e]}_{\text{Forces d'inertie}}$$

$[A_e]$: Torseur des forces d'inertie d'entrainement
$[A_c]$: Torseur des forces d'inertie complémentaires

Plan

Puissance d'une force

Pour un point matériel $P = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{V}(M)$

Pour le cas d'un système matériel :

On considère un élément de Masse dm, soit cet élément agit la force $\overrightarrow{f} \cdot dm$, on définit la puissance $P = \int_{(S)} \overrightarrow{V}(M) \cdot \overrightarrow{f} \, dm$

$$[P] = \left| \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega} \\ \overrightarrow{V}(O) \end{array} \right. \cdot \left| \begin{array}{l} \overrightarrow{R} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}}(O) \end{array} \right.$$

Cas d'un solide :

Soit $M \in (S)$; $\overrightarrow{V}(M) = \overrightarrow{V}(O) + \overrightarrow{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{OM} \implies$

$$\overrightarrow{P} = \int_{(S)} (\overrightarrow{V}(O)\overrightarrow{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{OM})\overrightarrow{f}\, dm =$$

$$\overrightarrow{V}(O) \int_{(S)} \overrightarrow{f}\, dm + \overrightarrow{\Omega} \int_{(S)} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{f}\, dm \text{ Or } \overrightarrow{R} = \int_{(S)} \overrightarrow{F}\, dm$$

$$\overrightarrow{\mathscr{M}}(O) = \int_{(S)} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{f}\, dm \implies \overrightarrow{P} = \overrightarrow{V}(O) \cdot \overrightarrow{R} + \overrightarrow{\Omega}_{S/R_O} \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$[P] = \left| \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega}_{R/R_O} \\ \overrightarrow{V}(O) \end{array} \right. \cdot \left| \begin{array}{l} \overrightarrow{R} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}}(O) \end{array} \right. \implies [P] = [\tau] + [F_e]$$

Cas d'un solide :

Travail et puissance :

$$P = \int_{(S)} \overrightarrow{V}(M) \cdot \overrightarrow{f}\, dm \qquad \overrightarrow{f} \text{ densité des forces}$$

$$\overrightarrow{V}(M) = \overrightarrow{V}(O)$$

$$[P] = \left| \begin{matrix} \overrightarrow{\Omega}_{R/R_O} \\ \overrightarrow{V}(O) \end{matrix} \right. \cdot \left| \begin{matrix} \overrightarrow{R} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}}(O) \end{matrix} \right. \Longrightarrow [P] = [\tau] + [F_e]$$

Cas de forces intérieurs à un système :

Soit (S) $\quad S = S_1 \cup S_2 \quad S_1 \cap S_2 = \varnothing$

Le torseur des forces intérieurs à (S)

$[F_{ij}] = 0 \qquad [F_{12}] + [F_{21}] = [F_{ij}] = 0$

La puissance intérieure est nulle.

Travail :

La puissance $\mathscr{P}(t)$ évolue au cours du temps, le travail accompli entre deux instants t_1 et t_2 est donnée par la relation $\frac{d\mathcal{W}}{dt} = \mathscr{P}(t)$

$$\Longrightarrow \ \mathcal{W} = \mathcal{T} = \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{P}(t)$$

Cas ou le système est formé par un solide et ou un point

Dans le cas général le point M est repéré par les paramètres :

$$q_i \qquad i = 1 \cdots n \qquad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(q_i, i = 1, n) = M(q_i) \qquad i = 1, n$$

$$\Longrightarrow \ \overrightarrow{V}(M) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}{}_{/R_O} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\overrightarrow{OM}}{dq_i} \times \frac{dq_i}{dt}{}_{/R_O}$$

Soit $\quad \overrightarrow{V}(M) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial M}{\partial q_i} \dot{q}_i \qquad \dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$

Travail :

Exemple

Pendule double $q_1 = \alpha,\ q_2 = \beta,\ M = M(\alpha, \beta)$

$$P = \int_{(S)} \overrightarrow{V}(M)\overrightarrow{f}\,dm = \int_{(S)} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial M}{\partial q_i}\dot{q}_i\right)\overrightarrow{f}\,dm = \sum_{i=1}^{n} \int_{(S)} \left(\frac{\partial M}{\partial q_i}\overrightarrow{f}\,dm\right)\dot{q}_i =$$

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i \dot{q}_i \ \ Avec\ Q_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial q_i}\overrightarrow{f}\,dm$$

(Composition généralisée de force)

Travail :

Exemple cas d'un solide :

Les paramètres de configuration :

$$q_1 = x_G$$

$$q_2 = y_G$$

$$q_3 = z_G$$

$$q_4 = \psi$$

$$q_5 = \theta$$

$$q_6 = \varphi$$

Travail :

Le torseur de forces extérieurs $[F] = \left| \begin{array}{l} \overrightarrow{R} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}}(O) \end{array} \right.$

Le torseur cinématique $[F] = \left| \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega} \\ \overrightarrow{V}(O) \end{array} \right.$

$$\Omega = {}_{R_{(S)}} \left| \begin{array}{l} p = \dot{\psi} \sin\theta \sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi \\ q = \dot{\psi} \sin\theta \cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi \\ r = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi} \end{array} \right. \qquad \overrightarrow{R} = \left| \begin{array}{l} X \\ Y \\ Z \end{array} \right. \qquad \overrightarrow{\mathscr{M}}_O = \left| \begin{array}{l} L \\ M \\ N \end{array} \right.$$

Travail :

$$P = [V] \cdot [F_e] = \overrightarrow{R}\,\overrightarrow{V}(O) + \overrightarrow{\Omega}_{S/R_O}\overrightarrow{\mathscr{M}}(O)$$
$$P = \dot{x}X + \dot{y}Y + \dot{z}Z + pL + qM + rN$$
$$\Longrightarrow$$
$$Q_1 = X$$
$$Q_2 = Y$$
$$Q_3 = Z$$
$$Q_5 = L\cos\varphi - M\sin\varphi$$
$$Q_4 = X\sin\theta\sin\varphi + M\cos\theta\cos\varphi + N\cos\theta$$
$$Q_6 = N$$

Champs de forces :

Par définitions, on dit qu'il y a un champ de force lorsque les composantes généralisés ne dépendent pas que des q_i

$Q_i = Q_i(q_1 \cdots q_n)$
Calcul du travail par un champ de forces pour $t \in [t_1, t_2]$

$$\mathscr{T} = \int_{t_1}^{t_2} (\sum Q_i \frac{di}{dt}) dt = \int_{\overrightarrow{AB}} \sum_{i=1}^{n} Q_i(q_1 \cdots q_n) dq_i$$

Fonction de force en potentiel :

On suppose que $\sum_{i=1}^{n} Q_i dq_i$ est une différentielle totale exacte

c'est à dire $\exists U \; dU = \sum_{i=1}^{n} Q_i dq_i \implies Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} \qquad i = 1 \cdots n \; Q_i$: fonction généralisée de force et U est le potentiel

Remarque

Une condition nécessaire et suffisante pour avoir une fonction de force et que $\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}$

Fonction de force en potentiel :

Exemple

Cas d'un point matÃľriel dans le plan

On pose $F = \left| \begin{array}{l} X \\ Y \end{array} \right. \quad X = \frac{-ky}{x^2+y^2}$

$Y = \frac{ky}{x^2+y^2}$

$\Longrightarrow \quad dU = \frac{k(xdy-ydx)}{x^2+y^2}$

Changement de variable $\tan\theta = \frac{y}{x}$

$\Longrightarrow \quad dU = kd\theta \quad \Longrightarrow \quad U = k\theta + \underbrace{cste}_{=0}$

Fonction de force en potentiel :

Exemple

Cas de la pesanteur

Soit $\overrightarrow{f}$ *la densité massique de force* $\overrightarrow{f} = (0, 0, -g)$

$$\overrightarrow{P} = \int_{(S)} \overrightarrow{V}(M)\overrightarrow{f}\,dm = -mgz(G)$$

$$\overrightarrow{V} = -mgz(G)$$

Fonction de force en potentiel :

Cas de forces Newtoniens :

$$\vec{F} = \frac{k \cdot m \cdot \rho}{2} \overrightarrow{MP}$$

On pose $g(r) = \frac{-k \cdot m \cdot \rho}{r^3}$

$$\Longrightarrow \vec{F} = -g(r)\overrightarrow{MP}$$

$$\Longrightarrow V = \int r \cdot g(r) dr = -k \cdot m \cdot \rho \int \frac{dr}{r^2} = \frac{k \cdot m \cdot \rho}{r^2} + cste$$

Fonction de force en potentiel :

Soit (**S**) un système formé de n points matériels

$\mathbf{F_{i1}}$: **Forces extérieur à (S)**

$\mathbf{F_{i2}}$ **: Forces intérieur de (S)**

L'équation de mouvement P.F.D.

$\mathbf{m_i \overrightarrow{a}_i = F_{i1} + F_{i2}}$ **(Pour chaque point matériel)**

$\mathbf{m_i \overrightarrow{a}_i} \overrightarrow{V_i} = (\mathbf{F_{i1} + F_{i2}})\overrightarrow{V_i} = \mathbf{F_{i1}}\overrightarrow{V_i} + \mathbf{F_{i2}}\overrightarrow{V_i} = \mathbf{P_1 + P_2}$

$\mathbf{m_i \overrightarrow{a}_i} \overrightarrow{V_i} = \mathbf{P_1 + P_2}$

$\mathbf{m_i \overrightarrow{V}_i \frac{d\overrightarrow{V}_i}{dt} = \frac{m}{2} \frac{d\overrightarrow{V}_i^2}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{mV_i^2}{2}}$

$\mathbf{\frac{d}{dt} E_c = P_1 + P_2}$

Cas d'un solide :

$$[F_e] = \left| \begin{array}{l} \overrightarrow{R} \\ \overrightarrow{M}_e \end{array} \right.$$

Torseur des forces extérieurs

$$[V] = \left| \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega} \\ \overrightarrow{V}(O) \end{array} \right.$$

Torseur cinématique

$$P_{ext} = [F_e] \cdot [V] = \int_{(S)} \overrightarrow{a}(M) \cdot \overrightarrow{V}(M) dm = \int_{(S)} \frac{d}{dt} \frac{\overrightarrow{V}_3(M)}{2} dm = \frac{dE_c}{dt}$$

$$P(\text{ForcesN}) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d}{dt} E_c = P_1 + P_2$$

Cas d'un solide :

Cas particulier :

$$\mathbf{P} = \mathbf{P_1} + \mathbf{P_2} \quad \exists \mathbf{U} \ \text{tel que} \ \mathbf{P} = \frac{\mathbf{dU}}{\mathbf{dt}}$$

Or $$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{dE_c}}{\mathbf{dt}} = \frac{\mathbf{dU}}{\mathbf{dt}} \Longrightarrow \mathbf{E_c} = \mathbf{V} + \mathbf{cste}$$

intégrale 1^{re} $\mathbf{V} = -\mathbf{E_p} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{E_c} + \mathbf{E_p} = \mathbf{U} = \mathbf{E_m}$

Dans ce cas, on dit qu'un tel système est un système conservatif

Étude d'une équation différentielle de la forme $\dot{q}^2 = f(a)$:

On dérive

$$\dot{\mathbf{q}}^2 = \mathbf{f}(\mathbf{a}) \implies 2\dot{\mathbf{q}}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}'(\mathbf{a})\dot{\mathbf{q}}$$

donc soit

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \implies \mathbf{q} = \mathbf{cte}$$

soit que

$$\ddot{\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{f}'(\mathbf{a})}{\mathbf{2}}$$

Les valeurs d'équilibre de $\mathbf{q}$ sur les valeurs qui vérifiant $\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$ et $\mathbf{f}'(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$

Étude d'une équation différentielle de la forme $\dot{q}^2 = f(a)$:

Exemple

Un point matériel pesant

$$\begin{aligned} \mathbf{m\ddot{z}} &= -\mathbf{mg} \\ \Longrightarrow \quad \mathbf{m\dot{z}\ddot{z}} &= -\mathbf{mg\dot{z}} \\ \Longrightarrow \quad \frac{\mathbf{m\dot{z}^2}}{\mathbf{2}} &= \mathbf{mgz} + \mathbf{cte} \\ \Longrightarrow \quad \mathbf{\dot{z}^2} &= -\mathbf{2gz} + \mathbf{cte} \\ \mathbf{\dot{z}^2} &= \mathbf{f(z)} \end{aligned}$$

L'origine O est un point stationnaire $\mathbf{f(O)} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{f'(O)} = \mathbf{0}$

Plan

Merci de votre attention

جامعة مولاي إسماعيل
UNIVERSITÉ MOULAY ISMAÏL

كلية العلوم والتقنيات
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES