Année Universitaire 2024-2025
Parcours MIP
Module P135
Pr. Amine TILIOUA

TD de mécanique des solides N°1

(Les Torseurs)

Exercice 1

L'espace $\mathbb{R}^3$ étant muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère le champ de vecteurs $\vec{V}_t$, qui pour tout t réel fixé, associe à tout point P de $\mathbb{R}^3$ le vecteurs $\vec{V}_t(P)$ de composantes :

$$\begin{cases} X=1+3y-tz \\ Y=-3x+2tz \\ Z=-4/3+tx-t^2y \end{cases}$$

où (x,y,z) est le triplet de coordonnés de P.

1) Pour quelles valeurs de t, $\vec{V}_t$ est-il un torseurs ?
2) Lorsque $\vec{V}_t$ est un torseur, calculer son vecteur et préciser si ce torseur est éventuellement un glisseur ou un couple.
3) Préciser le torseur $\tau = \tau_0 - \tau_2$, on notera τ_0 le torseur obtenu pour $t=0$ et τ_2 celui correspondant à la valeur $t=2$.
4) Déduire que la somme deux glisseurs n'est pas toujours un glisseurs.

Exercice 2

L'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ étant muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les cinq points suivants A(1 ,0, 0) ; B(0, 1, 1) ; C(1, 1, 0) ; D(1, 1, 1) et E(1, 0, 1).
Soient g_1, g_2, et g_3 les glisseurs associés aux vecteurs liés suivants $g_1(O, p\overrightarrow{OA})$; $g_2(B, q\overrightarrow{BD})$, et $g_3(C, r\overrightarrow{CE})$ où p, q et r appartiennent $\mathbb{R}$.
Soit $T= g_1 + g_2 + g_3$

1) Calculer le moment en O de T ainsi que sa résultante R.
2) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que T=0.
3) Calculer l'invariant scalaire I de T.
4) Si $p+q=0$ et $r\neq 0$, trouver l'axe central Δ de T.
   Donner une représentation cartésienne.
5) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que T soit un glisseur.
6) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que T soit un couple.

Exercice 3

Dans un repère euclidien $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, on considère les trois glisseurs définis par les trois vecteurs liés suivants :

$\vec{V}_1(1,0,-1)$ d'origine A(1,0,0),

$\vec{V}_2(1,2,2)$ d'origine B(0,1,0),

$\vec{V}_3(\lambda,\mu,\nu)$ d'origine C(0,0,1).

Soit $[T]$ la somme de ces glisseurs.

1) Déterminer λ,μ,ν, pour que $[T]$ soit un couple et trouver son moment.
2) Quelle relation doit lier λ,μ,ν, pour que $[T]$ soit un glisseur ?
   Déterminer λ,μ,ν pour que le support du glisseur $[T]$ passe par D(1/3,1,4/3).
3) Dans le cas le ou (λ,μ,ν)=(-2,0,-1), trouver les équations de l'axe central $[T]$.
   Que peut-on dire de la direction de cet axe central ?

Exercice 4

Par rapport à un repère orthonormé d'origine O, on donne le point $A(1,0,\alpha)$ et le torseur τ de résultante $\vec{R}(1,2,-1)$ et de moment en O $\vec{m}(O)=(\beta, 0, 1)$, α et β étant deux constantes.

1) Quelle relation doivent vérifier α et β pour qu'il existe $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :
   $\tau=(O,\vec{u})+(A,\vec{v})$
   Déterminer l'ensemble de ces torseurs.
2) A quelle condition τ est-il un glisseur ? Déterminer son axe.
   Quelle propriété possède cet axe par rapport aux axes $(O,\vec{u})$ et $(A,\vec{v})$ (lorsqu'ils existent).

Exercice 5

L'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ étant rapporté à un repère orthonormé direct $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, a, b et c sont des paramètres réelles. On donne les trois vecteurs liés (ou pointeurs) ; $\vec{R}_1 = a\vec{x} + b\vec{y}$ d'origine A(1,0,0), $\vec{R}_2 = \vec{y}$ d'origine B(1,1,0) ; $\vec{R}_3 = c\vec{x}$ d'origine C(0,0,1). On leur associe respectivement les glisseurs G_1, G_2, G_3.

1) Montrer que $G_1 + G_2$ est un glisseur ou un torseur nul.
   Dans le cas où $G_1 + G_2$ est un glisseur déterminer son axe.
2) On notera $T=[\vec{R}, \vec{H}]$, le torseur $T=G_1+ G_2+G_3$
   (a) Déterminer $\vec{H}(x,y,z)$.
   (b) Préciser le cas ou T est un couple non réduit à un torseur nul ; illustrer ces cas par un schéma.
   (c) Lorsque T n'est pas un couple ni un torseur nul, écrire les équations définissant son axe central.