Année Universitaire 2024-2025
Parcours MIP
Module P135
Pr. Amine TILIOUA

TD de mécanique des solides N°4

(Dynamique du solide)

Exercice 1

Une tige rectiligne homogène de masse m, de longueur $2a$, peut se déplacer sur une table horizontale fixe repérée par $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Chaque élément de la tige est attiré par la droite fixe $O\vec{x}$ suivant une force élémentaire $d\vec{F}$ proportionnelle à la masse dm de l'élément et à sa distance à la droite $O\vec{x}$.

On posera $\overrightarrow{OG} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}$

1) **Déterminer par ses éléments de réduction en G *le torseur des forces extérieurs* à la tige.**
2) **Écrire les équations du mouvement de la tige à l'aide des paramètres : (x, y, φ).**
3) **En déduire le mouvement de la tige dans le repère R.**

Exercice 2

Une tige rectiligne, homogène AB de masse $2m$, de longueur $2a$ est maintenue horizontale par deux fils inextensibles, sans masse, attachés en A et B en passant par deux polies libres A' et B' de masse négligeable, placées sur les verticales de A et B à la distance $2a$.

À la seconde extrémité de chaque fil pend une masse m. Le fil AA' est subitement sectionné.

$\alpha=(O\vec{x}, \overrightarrow{OB})$, $\beta=(B\vec{x}, \overrightarrow{BA})$ et $\lambda = OB$.

On appellera T la tension du fil, et g l'accélération de la pesanteur.

1) **Écrire le théorème de la résultante et celui du moment cinétique en G pour la barre AB.**
2) **Écrire l'équation différentielle du mouvement de la masse m.**
3) **À l'aide des conditions initiales, calculer : $\ddot{\alpha}_0$, $\ddot{\beta}_0$, $\ddot{\lambda}_0$ et T_0.**
4) **En déduire la trajectoire de G, au voisinage de $t=0$, à l'ordre 4 près.**

Exercice 3

Un cylindre de révolution C_1, creux, homogène, de masse M, de rayon R, peut tourner librement autour de son axe $O\vec{z}_0$, supposé horizontale. Soit θ, l'angle qui mesure la rotation de C_1 autour de son axe.

Un second cylindre C_2 de révolution, plein, pesant, homogène, de masse m, de rayon r ($r<R$), roule sans glisser à l'intérieur du premier cylindre.

Soit φ l'angle que fait la droite qui contient les axes des deux cylindres avec la verticale descendance, et soit ψ l'angle qui mesure la rotation du cylindre C_2 autour de son axe.

Les actions de C_2 sur C_1 sont schématisées par le glisseur (I, -$\overrightarrow{R}$).

On pourra poser $\overrightarrow{R} = T\vec{v} + N\vec{u}$ (T et N sont en valeurs algébriques). La liaison entre C_1 et son axe est supposée parfaite.

1) **Préciser les éléments de réduction en O, du torseur des actions sur C_1 de son axe $O\vec{z}_0$.**
2) **Traduire la condition de roulement sans glissement (équation E_1).**
3) **À l'aide du théorème de la résultante appliquée à C_2 en projection $\vec{v}$, écrire une équation (E_2) contenant T.**
4) **Écrire le théorème du moment cinétique en G, pour C_2, et obtenir une équation (E_3) pour T.**
5) **Écrire le théorème du moment cinétique en O, pour C_1, et déduire en projection sur $\vec{z}_0$ une équation (E_4)**
6) **Écrire une équation différentielle pour les variables θ, φ en utilisant (E_1), (E_2) et (E_3) en éliminant T.**
7) **Déduire de (E_1), (E_2) et (E_3) une équation différentielle ne contenant pas T.**
8) **Dans le cas de petits mouvements, calculer la période des variations périodiques de φ.**

   En déduire le mouvement de C_1. (Conditions initiales : $\varphi_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = \omega$, $\theta_0 = 0$, $\dot{\theta}_0 = \omega$)