Algèbre IV
MA-LNG 4

Rami Youssef
Université Moulay Ismail
Faculté des Sciences, Meknès
Filière Mathématiques et Applications.

A.U. 2024-2025

Table des matières

0.1 Introduction

Chapitre 1

Formes linéaires et dualité

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Tout espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ sera dit brièvement espace vectoriel et toute matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$ sera dite brièvement matrice ... .

1.1 Forme linéaires

1.1.1 Forme linéaire et espace dual

Définition 1.1.1
Soit E un espace vectoriel.
On appelle forme linéaire sur E, toute application linéaire $u : E \to \mathbb{K}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ considéré comme espace vectoriel sur lui même.
L'espace vectoriel $E^* := Hom_{\mathbb{K}}(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires sur E est appelé l'espace dual de E.
L'espace dual de E^*, noté E^{**} est appelé espace bidual de E.

Rappelons, qu'en général, l'ensemble des application linéaires $Hom_{\mathbb{K}}(E, F)$ entre deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ (corps quelconque) est aussi un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Exemple 1.1.2

(1) *Sur $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, l'intégral $\int_a^b : f \mapsto \int_a^b f(t)dt$ est une forme linéaire.*

(2) *Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ (fixé), l'application $u : f \mapsto f(a)$ est une forme linéaire.*

(3) *Soit $E = M_n(\mathbb{K})$. La trace $Tr : E \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire.*

(4) *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, égale à n, muni d'une $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Pour tout $1 \le j \le n$, l'application $e_i^* : E \to \mathbb{K}$ définie par $e_i^*(x) = x_i$, la i^{eme} coordonnée de x dans B, est une forme linéaire. Elle est caractérisée par le* **symbole de Kronecker** *:*

$$e_i^*(e_j) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & si\ j = i \\ 0, & si\ j \neq i. \end{cases}$$

(5) *(généralisation de (4)) : Soit E un espace vectoriel de dimension n. Pour tout n-uplet $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, l'application $\varphi : E \to \mathbb{K}$ définie par $\varphi(x) = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_x$, pour tout $x = \sum_{i=1}^{i=n} x_i e_i \in E$ est une forme linéaire sur E.*

Dans toute la suite, sauf mention contraire, quand E est un espace vectoriel de dimension finie égale à n, on désignera par $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ sa base canonique.

La proposition suivante est l'implication réciproque de l'exemple (5).

Proposition 1.1.3
Soit E un espace vectoriel de dimension finie égale à n, muni de sa base canonique B. Alors $u : E \to \mathbb{K}$ et une forme linéaire si et seulement si il existe un n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que, pour tout $x = \sum_{i=1}^{i=n} x_i e_i \in E$: $u(x) = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_x$.

Preuve.
Si u est une forme linéaire, alors pour tout $x = \sum_{i=1}^{i=n} x_i e_i \in E$, on a $u(x) = \sum_{i=1}^{i=n} u(e_i) x_i$. On pose alors $\lambda_i = u(e_i)$, $(1 \leq i \leq n)$. ■

En reprenant les formes linéaires e_i^* $(1 \leq i \leq n)$ de l'exemple (4), on a alors, pour tout $x \in E$, $u(x) = \sum_{i=1}^{i=n} u(e_i) x_i = \sum_{i=1}^{i=n} u(e_i) e_i^*(x)$. Par suite $u = \sum_{i=1}^{i=n} u(e_i) e_i^*$ et $B^* = \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ est alors une famille génératrice de E^*.

Proposition 1.1.4
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, égale à n, muni de sa base canonique $B = \{e_1, \dots, e_n\}$. Alors

1. *$B^* = \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ est une base de l'espace dual E^*.*
2. *$\dim E^* = \dim E = n$.*
3. *Toute forme linéaire $u \in E^*$ s'écrit d'une façon unique sous la forme :*

$$u = \sum_{i=1}^{i=n} u(e_i) e_i^* = u(e_1) e_1^* + \dots + u(e_n) e_n^*.$$

Preuve.
1. Il reste à montrer que B^* est libre. Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Si $\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i e_i^* = 0$, alors $\forall x \in E$, $(\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i e_i^*)(x) = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i e_i^*(x) = 0$. Par suite, en prenant chaque fois $x = e_j$, $1 \leq j \leq n$, on obtient $(\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i e_i^*)(e_j) = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i \delta_i^j = \alpha_j = 0$. Par conséquent, $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ et donc B^* est une famille libre.
2. et 3. Découlent de 1. ■

Il est à retenir que le lien entre B et B^* est donné par :

$$e_i^*(e_j) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & si\ j = i \\ 0, & si\ j \neq i. \end{cases}$$

Il en résulte que la base B^* est l'unique base de E^* qui vérifie cette propriété. D'où la

Définition 1.1.5
B^* est appelée base duale de B.
La base duale de B^* est appelée base préduale de E.

Ainsi, si $u \in E^* = Hom_{\mathbb{K}}(E, \mathbb{K})$, la matrice $M(u; B, \{1_{\mathbb{K}}\}) = (u(e_1), \dots, u(e_n))$ a pour coefficients, les coordonnées de u dans B^*.

Exemple 1.1.6
Considérons dans $E = \mathbb{R}^2$ la famille $B' = \{v_1 = (2,1), v_2 = (3,1)\}$. Il est claire que c'est une base de E. Sa base duale est $B'^* = \{v_1^*, v_2^*\}$ avec $v_i^*(v_j) = \delta_i^j$, $\forall 1 \le i, j \le n$.
Pour déterminer v_1^* et v_2^*, on présente deux méthodes :
(a) : On passe par la base canonique $B = \{e_1, e_2\}$ et sa base duale $B^* = \{e_1^*, e_2^*\}$:
Si $v_1^* = \alpha_1 e_1^* + \alpha_2 e_2^*$, alors,

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1^*(v_1) = 1 \Leftrightarrow (\alpha_1 e_1^* + \alpha_2 e_2^*)(2e_1 + e_2) = 1 \Leftrightarrow 2\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ v_1^*(v_2) = 0 \Leftrightarrow (\alpha_1 e_1^* + \alpha_2 e_2^*)(3e_1 + e_2) = 1 \Leftrightarrow 3\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{array} \right.$$

par suite $\alpha_1 = -1$ et $\alpha_2 = 3$. D'où $v_1^* = -e_1^* + 3e_2^*$.
De même si $v_2^* = \beta_1 e_1^* + \beta_2 e_2^*$, alors,

$$\left\{ \begin{array}{l} v_2^*(v_1) = 0 \Leftrightarrow (\beta_1 e_1^* + \beta_2 e_2^*)(2e_1 + e_2) = 0 \Leftrightarrow 2\beta_1 + \beta_2 = 0 \\ v_2^*(v_2) = 1 \Leftrightarrow (\beta_1 e_1^* + \beta_2 e_2^*)(3e_1 + e_2) = 1 \Leftrightarrow 3\beta_1 + \beta_2 = 1 \end{array} \right.$$

par suite $\beta_1 = 1$ et $\beta_2 = -2$. D'où $v_2^* = e_1^* - 2e_2^*$.
(b) : On montre que cela revient à exprimer les coordonnées d'un vecteur quelconque $u = ae_1 + be_2$ dans la base B'.
En effet, $v_1^*, v_2^* : E \to \mathbb{K}$ étant déterminées par leurs coordonnées dans la base canonique B^*, on a besoin de calculer les quatre coefficients $v_i^*(e_j)$ avec $i, j \in \{1, 2\}$. Comme alternative, on va déterminer (au même temps) $v_1^*(u)$ et $v_2^*(u)$ pour $u = ae_1 + be_2$.
Pour cela, exprimons $u = x_1 v_1 + x_2 v_2$ dans B'.
D'une part : $u = x_1 v_1 + x_2 v_2 \Leftrightarrow v_1^*(u) = x_1,\ v_2^*(u) = x_2$.
D'autre part : $u = x_1 v_1 + x_2 v_2 \Leftrightarrow 2x_1 + 3x_2 = a$ et $x_1 + x_2 = b \Leftrightarrow x_1 = -a + 3b$ et $x_2 = a - 2b$.
D'où $v_1^*(u) = -a + 3b$ et $v_2^*(u) = a - 2b$. Ainsi en prenant $a = e_1$ et $a = e_2$, on obtient :

$$v_1^* = -e_1^* + 3e_2^* \text{ et } v_2^* = e_1^* - 2e_2^*.$$

Remarquer que les coordonnées de v_1^* et de v_2^* dans B^* sont respectivement ceux de a et b dans les expressions de x_1 et x_2.

Le critère suivant du changement de base donne une preuve généralisant cet exemple.

Proposition 1.1.7
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, égale à n, $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ sa base canonique, $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ une autre base de E. Si P est la matrice de passage de B à B_1, alors la matrice de passage Q de B^* à B_1^* est ${}^tP^{-1}$.

Preuve.
Notons $P = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ et $Q = (b_{ij})_{1 \le i,j \le n}$. Par définition de la matrice de passage, on a $v_j = \sum_{l=1}^{l=n} a_{lj} e_l$ pour tout $1 \le j \le n$ et $v_i^* = \sum_{k=1}^{k=n} b_{ki} e_k^*$ pour tout $1 \le \le n$. Donc, pour tout $1 \le i, j \le n$:

$$\delta_i^j = v_i^*(v_j) = (\sum_{k=1}^{k=n} b_{ki} e_k^*)(\sum_{l=1}^{l=n} a_{lj} e_l) = \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{l=1}^{l=n} b_{ki} a_{lj} \delta_k^l = \sum_{k=1}^{k=n} b_{ki} a_{kj} = ({}^tQP)_{ij}.$$

Par suite ${}^tQP = I_n$ et $Q = {}^t P^{-1}$. ■

Comme application, revenons à l'exemple précédent. On a $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et donc, après calculs, $Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, ce qui donne $v_1^* = -e_1^* + 3e_2^*$ et $v_2^* = e_1^* - 2e_2^*$.

1.1.2 Espace bidual en dimension finie

Soit E un espace vectoriel de dimension quelconque.

Considérons donc $u \in E^*$ et $x \in E$ et notons $u(x) =:< u, x >$. Ceci défini l'application :

$$\begin{array}{rrc} < -, - >: & E^* \times E \to & \mathbb{K} \\ & (u, x) \mapsto & < u, x > \end{array}$$

vérifiant :

- $< u_1 + u_2, x >=< u_1, x > + < u_2, x >$,
- $< u, x_1 + x_2 >=< u, x_1 > + < u, x_2 >$,
- $< \lambda u, x >= \lambda < u, x >$,
- $< u, \lambda x >= \lambda < u, x >$.

$< -, - >$ est appelé application bilinéaire canonique entre E et E^*.

Fixons maintenant un $x \in E$. On tire des propriétés ci-dessus que l'application $ev_x : E^* \to \mathbb{K}$ définie par $ev_x(u) =< u, x >$ est linéaire. Par conséquent, pour tout $x \in E$, $ev_x \in E^*$. De la même façon, on déduit que l'application $ev_E : E \to E^{**}$ définie par $ev_E(x) = ev_x$ est aussi linéaire. Ainsi, on a construit une appliocation linéaire

$$\begin{array}{rccl} ev_E : & E & \to & E^{**} \\ & x & \mapsto & ev_x : u \mapsto < u, x > . \end{array}$$

Proposition 1.1.8

L'application linéaire ev_E est injective. Si en plus E est de dimension finie, alors ev_E est un isomorphisme.

La preuve de cette proposition découle du résultat général suivant :

Lemme 1.1.9

Soit E un espace vectoriel . Alors, pour tout $x \in E$, $(u(x) = 0, \quad \forall u \in E^*) \Rightarrow x = 0$.

Preuve.

On procède par contraposée. Supposons que $x \neq 0$ et notons par H le complémentaire de $\mathbb{K}x$ dans E, de sorte que $E = H \oplus \mathbb{K}x$. Considérons ensuite l'application $u : E \to \mathbb{K}$ définie par $u(h + \alpha x) = \alpha$, $\forall h \in H$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$. Il est claire que u est linéaire et c'est donc un élément de E^*. Mais, $u(x) = 1 \neq 0$, par suite, il existe une forme linéaire u telle que $u(x) \neq 0$. Ce qui achève la preuve. ■

Corollaire 1.1.10

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Alors, $\forall x \in E$ non nul, il existe $u \in E^*$ tel que $u(x) = 1$.

Preuve.
(de la proposition)
Soit $x \in E$. On a alors $ev_E(x) = 0 \Rightarrow ev_x = 0 \Rightarrow \forall u \in E^*,\ ev_x(u) = u(x) = 0$. Par suite, d'après Lemme 1.1.7, $x = 0$ et donc ev_E est injective. Si E est de dimension finie, alors, d'après Proposition 1.1.4, $\dim E = \dim E^* = \dim E^{**} = n$. On conclu en utilisant le fait que toute application linéaire entre espaces de même dimension est injective ssi elle est surjective ssi elle est bijective. ■
Par convention, lorsque E est de dimension finie, E et E^{**} sont identifiés.

Proposition 1.1.11
Soit E un espace de dimension finie, égale à n et $B' = \{v_1, \ldots, v_n\}$ une base de E^*. Alors, il existe une base unique de E telle que $B_1^* = B'$. Par l'identification de E et E^{**}, la base B_1 est appelée, base préduale de E.

Preuve.
Avec les notations de la proposition, considérons l'application $\Phi : E \to \mathbb{K}^n$ définie par $\Phi(x) = (v_1(x), \ldots, v_n(x))$. Elle est clairement linéaire. Soit $x \in \ker(\Phi)$, donc $v_1(x) = \ldots = v_n(x) = 0$. Si x n'est pas nul, d'après le corollaire précédent, $\exists u \in E^* \mid u(x) = 1$. Écrivons $u = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ dans B', on obtient $1 = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i v_i(x) = 0$, ce qui est absurde et donc Φ est injective. Puisque $\dim E = n = \dim \mathbb{K}^n$, Φ un isomorphisme. Notons par $\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ ($\epsilon_j = (\delta_i^j)_{1 \leq i \leq n}$). On a alors, pour tout j fixé ($1 \leq j \leq n$) :

$$\exists e \in E \mid v_i(e) = \delta_i^j;\ \forall 1 \leq i \leq n \Leftrightarrow \Phi(e) = \epsilon_j \Leftrightarrow e = \Phi^{-1}(\epsilon_j).$$

Puisque Φ^{-1} est un isomorphisme, $B_1 = \{\Phi^{-1}(\epsilon_1), \ldots, \Phi^{-1}(\epsilon_n)\}$ est une base de E et c'est la seule qui vérifie $v_i(\Phi^{-1}(\epsilon_j))) = \delta_i^j$. D'où, B_1 est l'unique base de E telle que $B' = B_1^*$. ■

1.1.3 Hyperplans

Définition 1.1.12
Soit E un espace vectoriel. Un hyperplan dans E est tout sous espace H tel qu'il existe une droite vectoriel D (i.e. un sous espace de dimension 1) satisfaisant $E = H \oplus D$.

Dans un espace vectoriel E de dimension finie, égale à n, H est un hyperplan si et seulement si $\dim H = n - 1$.

Proposition 1.1.13
Soit E un espace vectoriel. Si H est un hyperplan dans E, alors, $E = H \oplus \mathbb{K}a$, $\forall a \in E \backslash H$.

Preuve.
Fixons $a \in E\backslash H$ et posons $E = H \oplus D$ avec $D =: \mathbb{K}d$ une droite vectorielle. D'abord, $H \cap \mathbb{K}a = \{0\}$. Sinon, $\exists \alpha \in \mathbb{K}$ non nul tel que $x = \alpha a \in H$. Mais $\alpha \neq 0 \Rightarrow a = \alpha^{-1}x \in H$, ce qui est absurde. Par conséquent, $H + \mathbb{K}a = H \oplus \mathbb{K}a \subseteq E = H \oplus D$. Par suite, $\exists 0 \neq \alpha \in \mathbb{K}$ (puisque $a \notin H$) et $\exists h \in H$ tel que $a = \alpha d + h$. D'où, $d = \alpha^{-1}a - \alpha^{-1}h$ et donc $D \subseteq \mathbb{K}a \oplus H$. On conclut alors que $E = \mathbb{K}a \oplus H$. ■

Corollaire 1.1.14
Soit E un espace vectoriel, H un hyperplan dans E et $a \in E \backslash H$. Alors, il existe $u \in E^*$ telle que $u_{|H} = 0$ et $u(a) = 1$.

Preuve.
D'après la proposition précédente, on a $E = \mathbb{K}a \oplus H$. On considère alors $u \in E^*$ définie par $u(\alpha a + h) = \alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall h \in H$. ■

Proposition 1.1.15
Soit E un espace vectoriel. Les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. *Pour toute forme linéaire non nulle $u \in E^*$, $H = \ker(u)$ est un hyperplan de E.*
2. *Pour tout hyperplan H de E, il existe une forme linéaire non nulle $u \in E^*$ telle que $H = \ker(u)$.*
3. *Soit H un hyperplan de E et $u \in E^*$ une forme linéaire non nulle telle que $H = \ker(u)$. Alors, pour toute forme linéaire $v \in E^*$, $H = \ker(v)$ si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, non nul, tel que $v = \lambda u$.*

Preuve.
1. Puisque $u \neq 0$, alors elle est surjective (si $0 \neq x_0 \in E$ est tel que $u(x_0) \neq 0$, alors, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda = u(\frac{\lambda}{u(x_0)} x_0)$). Par suite, $\exists a \in E$ tel que $u(a) = 1$ c.à.d. $a \notin H = \ker(u)$ et donc $H + \mathbb{K}a = H \oplus \mathbb{K}a$. Soit maintenant $x \in E$ et posons $\alpha = u(x)$. On a alors :

$$u(\alpha a) = \alpha u(a) = \alpha = u(x) \Rightarrow u(x - \alpha a) = 0 \Rightarrow x - \alpha a \in H \Rightarrow x \in H \oplus \mathbb{K}a.$$

D'où $E = H \oplus \mathbb{K}a$ et par conséquent, H est un hyperplan.
2. H étant un hyperplan, il existe D, une droite vectorielle, telle que $E = H \oplus D$. Soit $a \in D$ non nul. D'après le corollaire précédent, il existe $u \in E^*$ telle que $u(a) = 1$ et $u_{|H} = 0$. Par suite, il existe $u \in E^*$ non nulle telle que $H = \ker(u)$.
3. On a par hypothèse $H = \ker(u)$. Soit $v \in E^*$. Si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, non nul, tel que $v = \lambda u$, alors $\ker(v) = \ker(u) = H$. Réciproquement, soit $v \in E^*$ telle que $H = \ker(v)$. Comme $u \neq 0$, $\exists a \in E \backslash H$ tel que $u(a) = 1$ et donc $u(\alpha a + h) = \alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall h \in H$. Soit $\lambda = v(a)$. On a bien $\lambda \neq 0$, sinon, $v(a) = 0 \Rightarrow a \in \ker(v) = H$. Par suite $v(\alpha a + h) = \lambda \alpha = \lambda u(\alpha a + h) = (\lambda u)(\alpha a + h)$ et donc $v(x) = (\lambda u)(x)$, $\forall x \in E$ ($E = \mathbb{K}a \oplus H$). Par conséquent, $\exists \lambda \neq 0 \mid v = \lambda u$. ■

Remarque 1.1.16
Il résulte de la proposition précédente, que tout hyperplan H est donné par une équation linéaire unique de la forme :

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = 0.$$

Cette équation est appelée **équation caractéristique de** H.

1.1.4 Annihilateurs et sous espaces linéaires

Fixons E un espace vectoriel de dimension quelconque.

Définition 1.1.17

1. *Si V est une partie de E, on note :*

$$V^0 = \{u \in E^* \mid u(x) = 0, \ \forall x \in V\} = \{u \in E^* \mid V \subseteq \ker(u)\}.$$

V^0 est appelé annihilateur (annihilator) de V : Ensemble des équations linéaires qui s'annulent sur V :

2. *Si U est un sous ensemble de E^*, on note :*

$${}^0U = \{x \in E \mid u(x) = 0, \ \forall u \in U\} = \cap_{u \in U} \ker(u).$$

${}^0U$ est appelé sous espace (variété) linéaire défini par U : Ensemble des solutions communes (des zéros) de toutes les équations linéaires définies par U.

Les propriétés suivantes sont évidentes (exercice) :
- V^0 (resp. ${}^0U$) est un sous espace vectoriel de E^* (resp. E).
- $E^0 = \{0\}$, ${}^0\{0\} = E^*$.
- $V_1 \subseteq V_2 \subseteq E \Rightarrow V_2^0 \subseteq V_1^0 \subseteq E^*$.
- $U_1 \subseteq U_2 \subseteq E^* \Rightarrow {}^0U_2 \subseteq {}^0U_1 \subseteq E$.
- $Vect(V)^0 = V^0$ et ${}^0Vect(U) = {}^0U$.
- $U \subseteq ({}^0U)^0$ et $V \subseteq {}^0(V^0)$.

D'après la deuxième propriété, pour déterminer H^0 lorsque H est un sous espace vectoriel de E, il suffit de prendre une base quelconque B de H et de calculer B^0. Il en est de même pour ${}^0F$ quand F est un sous espace de E^*.

Proposition 1.1.18
Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, V un sous espace de E et U un sous espace de E^*. Alors

(a) $\dim V + \dim V^0 = n = \dim U + \dim {}^0U$.

(b) ${}^0(V^0) = V$ *et* $({}^0U)^0 = U$.

Preuve.
(a) Notons $m = \dim V$ et $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ une base de V. On la complète pour avoir une base $\{v_1, v_2, \dots, v_m, w_1, w_2, \dots, w_{n-m}\}$ de E. Par définition de la base duale, nous avons :

$$w_i^*(w_j) = \delta_i^j, \ \forall 1 \leq i, j \leq n - m \text{ et } w_i^*(v_j) = 0, \ \forall 1 \leq i \leq n - m, \ \forall 1 \leq j \leq m.$$

Par suite, $\{w_1^*, w_2^*, \dots, w_{n-m}^*\} \subseteq V^0$. Puis, d'une part, $\{w_1^*, w_2^*, \dots, w_{n-m}^*\}$ étant une partie de la base de E^*, elle forme une famille libre. D'autre part, tout $\varphi \in V^0 \subseteq E^*$ s'écrit sous la forme $\varphi = \sum_{i=1}^{i=m} \varphi(v_i)v_i^* + \sum_{j=1}^{j=n-m} \varphi(w_j)w_j^* = \sum_{j=1}^{j=n-m} \varphi(w_j)w_j^*$. Par suite, $\{w_1^*, w_2^*, \dots, w_{n-m}^*\}$ est aussi génératrice de V^0. En conclut alors que $\dim V + \dim V^0 = m + (n - m) = n$.
L'autre égalité $\dim U + \dim {}^0U = n$ se fait de la même manière, en complétant une base de U en une base de E^* et en considérant la base préduale de E qui en découle.
(b) De (1), il découle que $\dim {}^0(V^0) = n - \dim V^0 = n - (n - \dim V) = \dim V$ et comme $V \subseteq^0 (V^0)$, on conclut alors que ${}^0(V^0) = V$. On montre d'une façon similaire que $({}^0U)^0 = U$. ■

Remarque 1.1.19
D'après l'exercice 5 de la série 1, si $\dim E = n \geq 1$ *et* V *est un sous espace vectoriel de dimension* $0 \leq p \leq n-1$*, alors, il existe* $r = n - p$ *formes linéaires (uniques à facteurs près)* $u_1, \ldots, u_r$ *telles que* $V = \cap_{i=1}^{i=r} \ker(u_i)$*. Par suite, pour* $U =< u_1, \ldots, u_{n-p} > \subseteq E^*$*, on a* ${}^0U = V$ *ce qui équivaut à* $U = V^0$*. On en déduit une correspondance biunivoque (dualité) entre les sous espaces de* E *et ceux de* E^**.*

Chapitre 2

Formes bilinéaires-Formes quadratiques

$\mathbb{K}$ désigne le corps des réels $\mathbb{R}$ ou le corps des complexes $\mathbb{C}$. Néanmoins, la plus part des notions et résultats sont valables pour tout corps de caractéristique $\neq 2$.

2.1 Formes bilinéaires

Dans toute le section sauf mention contraire, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 2.1.1
Une forme bilinéaire sur E est toute application $f : E \times E \to \mathbb{K}$ qui satisfait les conditions suivantes :

$$f(\alpha x + y, z) = \alpha f(x, z) + f(y, z) \ \ et \ \ f(x, \alpha y + z) = \alpha f(x, y) + f(x, z) \ \forall x, y, z \in E, \ \forall \alpha \in \mathbb{K}.$$

Càd, f est linéaire relativement à chacune des deux variables.

Deux cas particuliers importants de formes bilinéaires sont donnés par la

Définition 2.1.2
Une forme bilinéaire $f : E \times E \to \mathbb{K}$ est dite
(1) symétrique si $f(x, y) = f(y, x)$, $\forall x, y \in E$.
(2) alternée si $f(x, x) = 0, \forall x \in E$.

Remarque 2.1.3
Soit $f : E \times E \to \mathbb{K}$ forme bilinéaire, alors,

$$(2) \Leftrightarrow (2)' : \ f(x, y) = -f(y, x), \ \forall x, y \in E.$$

En effet, $\forall x, y \in E$, $(2) \Rightarrow f(x + y, x + y) = 0 \Rightarrow f(x, x) + f(x, y) + f(y, x) + f(y, y) = 0 \Rightarrow f(x, y) = -f(y, x)$. Pour la réciproque, en posant $x = y$ dans $(2)'$, on obtient $2f(x, x) = 0$ et donc $f(x, x) = 0, \forall x \in E$. Notez bien qu'on a utilisé le fait que $\mathbb{K}$ est de caractéristique $\neq 2$.
Une forme bilinéaire alternée est aussi appelé, forme bilinéaire anti-symétrique.

2.1.1 Écritures matricielles

Dans cette sous-section, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$.
Notons $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ une base de E (que l'on peut supposer canonique).
Soit $f : E \times E \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire et $x = \sum_{i=1}^{i=n} x_i e_i,\ y = \sum_{j=1}^{j=n} y_j e_j \in E$. On a alors :

$$f(x,y) = \sum_{j=1}^{j=n} \sum_{i=1}^{i=n} x_i y_j f(e_i, e_j) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i y_j f(e_i, e_j) =: \sum_{1 \leq i,j \leq n} f(e_i, e_j) x_i y_j.$$

On adopte pour toute la suite (pour la base B fixée), $a_{ij} = f(e_i, e_j), \forall i, j \in \{1, \ldots n\} =: [\![1, n]\!]$, $X =^t (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $Y =^t (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ et $M = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. On obtient alors, pour tout $x, y \in [\![1, n]\!]$:

$$f(x,y) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} x_i y_j =^t XMY.$$

Définition 2.1.4
La matrice $M = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} =: M(f, B)$ est appelée, martice de la forme bilinéaire f relativement à la base B.

Notation :
- L'ensemble des formes bilinéaires sur E sera noté $BL_2(E)$.
- L'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur E sera noté $S_2(E)$.
- L'ensemble des formes bilinéaires alternées sur E sera noté $\Lambda_2^*(E)$.

Proposition 2.1.5
1. *$BL_2(E)$ est un espace vectoriel isomorphe à $M_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.*
2. *$S_2(E)$ est un espace vectoriel isomorphe à $S_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices carrées symétrique d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.*
3. *$\Lambda_2^*(E)$ est un espace vectoriel isomorphe à $A_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices carrées antisymétrique d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.*

Preuve.
1. Étant donnée une matrice $M = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$, l'application $f : E \times E \to \mathbb{K}$ donnée par $f(x,y) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} x_i y_j$ est une forme bilinéaire. Ensuite, l'application :

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & BL_2(E) & \to & M_n(\mathbb{K}) \\ & f & \mapsto & M(n, \mathbb{K}) \end{array}$$

est clairement un isomorphisme de l'espace vectoriel $(BL_2(E), +, \cdot)$ dans l'espace vectoriel $(M_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$.
2. $f \in S_2(E) \Leftrightarrow M \in S_n(\mathbb{K})$.
3. $f \in \Lambda_2^*(E) \Leftrightarrow M \in A_n(\mathbb{K})$. ■

Proposition 2.1.6

1. $BL_2(E) = S_2(E) \oplus \Lambda_2^*(E)$.
2. $\dim S_2(E) = \frac{n(n+1)}{2}$ *et* $\dim \Lambda_2^*(E) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Preuve.
1. Remarquer que toute matrice $M \in M(n, \mathbb{K})$ s'écrit d'une façon unique sous la forme : $M = \frac{M+{}^tM}{2} + \frac{M-{}^tM}{2}$ et que $\frac{M+{}^tM}{2}$ (resp. $\frac{M-{}^tM}{2}$) est symétrique (resp. alternée). Par suite, si $f \in BL_2(E)$ est définie par M alors $f = g + h$ en est une somme unique, avec g (resp. h) définie par $\frac{M+{}^tM}{2}$ (resp. $\frac{M-{}^tM}{2}$). 2. Il est bien claire que $\dim S_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2}$ et que $\dim A_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n-1)}{2}$. On conclu alors en utilisant l'isomorphisme Φ. ■

Le résultat suivant, appelé, Théorème de changement de base, exprime la matrice d'une forme bilinéaire en terme de la nouvelle base.

Théorème 2.1.7
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$ muni de deux bases $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ (canonique) et $B' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$. Si P est la matrice de passage de B à B', alors

$$M(f, B') = {}^tPM(f, B)P.$$

Preuve.
Notons par $x = \sum_{i=1}^{i=n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{i=n} y_j e_j$ les coordonnées de vecteurs x et y dans la bases B et $x' = \sum_{i=1}^{i=n} x'_i e'_i$ et $y' = \sum_{i=1}^{i=n} y'_i e'_i$ leurs coordonnées dans la base B'.
Pour $X = {}^tx$, $X' = {}^tx'$, $Y = {}^ty$ et $Y' = {}^ty'$, on sait que $X = PX'$ et $Y = PY'$. Par suite, d'une part, $f(x, y) = {}^tXM(f, B)Y = {}^t(PX')M(f, B)(PY') = {}^tX'({}^tPM(f, B)P)Y'$ et d'autre part, $f(x, y) = f(x', y') = {}^tX'M(f, B')Y'$. Par conséquent, $M(f, B') = {}^tPM(f, B)P$. ■

Notez bien que $M(f, B)$ et $M(f, B')$ ne sont pas forcément semblables.

Définition 2.1.8
Soit $f \in BL_2(E)$ et $M(f, B)$ sa matrice dans la base B de E. Le déterminant de $M(f, B)$, noté $discr_B(f)$, est appelé discriminent de f dans B.

In vient immédiatement du théorème précédent :

Lemme 2.1.9
Si B et B' sont deux bases de E, alors, $discr_{B'}(f) = \det(P)^2 discr_B(f)$.

Définition 2.1.10
On appelle rang d'une forme bilinéaire $f \in BL_2(E)$, le rang de $M(f, B)$ dans une base donnée de E.
Une forme bilinéaire $f \in BL_2(E)$ est dite non dégénérée si son rang, dans une base donnée, est maximum, c'est à dire égal à $n = \dim E$.

2.1.2 Formes bilinéaires et orthogonalité

Dans cette sous-section, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$. B une base de E.

Proposition 2.1.11
Soit $f \in BL_2(E)$ et $M = M(f, B)$, et soient $\hat{f}$ et $\tilde{f}$ les applications :

$$\begin{array}{rccl} \hat{f}: & E & \to & E^* \\ & x & \mapsto & f(x, \cdot) : y \mapsto f(x,y) \end{array} \quad et \quad \begin{array}{rccl} \tilde{f}: & E & \to & E^* \\ & y & \mapsto & f(\cdot, y) : x \mapsto f(x,y) \end{array}.$$

Alors,

1. *$\hat{f}$ et $\tilde{f}$ sont des applications linéaires.*
2. *$M(\hat{f}, B, B^*) = {}^tM$ et $M(\tilde{f}, B, B^*) = M$.*

Preuve.
1. Viens de la bilinéarité de f.

2. Si $y = \sum_{j=1}^{j=n} y_j e_j$, alors, $\forall i \in [\![1, n]\!]$,

$$\hat{f}(e_i)(y) = f(e_i, y) = \sum_{j=1}^{j=n} y_j f(e_i, e_j) = \sum_{j=1}^{j=n} f(e_i, e_j) e_j^*(y) = [\sum_{j=1}^{j=n} f(e_i, e_j) e_j^*](y).$$

Par suite, $\hat{f}(e_i) = \sum_{j=1}^{j=n} f(e_i, e_j) e_j^*$. D'où, $M(\hat{f}, B, B^*) = {}^tM$.

D'une façon similaire, si $x = \sum_{i=1}^{i=n} x_i e_i$, alors, $\forall j \in [\![1, n]\!]$,

$$\tilde{f}(e_j)(x) = f(x, e_j) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i f(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{i=n} f(e_i, e_j) e_i^*(x) = [\sum_{i=1}^{i=n} f(e_i, e_j) e_i^*](y).$$

Par suite, $\tilde{f}(e_j) = \sum_{i=1}^{i=n} f(e_i, e_j) e_i^*$. D'où, $M(\tilde{f}, B, B^*) = M$. ■

Corollaire 2.1.12
Si $f \in BL_2(E)$, alors $rang(f) = rang(\hat{f}) = rang(\tilde{f})$.

Remarquer que si $f \in S_2(E)$ est une forme bilinéaire symétrique, alors $\hat{f}$ et $\tilde{f}$ coïncident, c'est à dire $\hat{f} = \tilde{f}$. *On identifiera par la suite $\hat{f}$ et $\tilde{f}$ et ainsi, on exprime les résultats en terme de $\hat{f}$.*

Définition 2.1.13
Soit $f \in S_2(E)$ une forme bilinéaire symétrique.

1. *Deux éléments $x, y \in E$ sont orthogonaux pour f si $f(x, y) = 0$.*
2. *L'orthogonal pour f d'une partie A de E est le sous espace vectoriel :*

$$A^\perp = \{y \in E \mid \forall x \in A,\ f(x, y) = 0\}$$

3. Le noyau de f est le sous espace vectoriel :

$$N(f) =: E^{\perp} = \{y \in E \mid \forall x \in E,\ f(x,y) = 0\}.$$

Proposition 2.1.14
Soit $f \in S_2(E)$ une forme bilinéaire symétrique. Alors, $N(f) = \ker(\hat{f})$. En particulier, f est non dégénérée si et seulement si $\hat{f}$ est bijective.

Proposition 2.1.15
Soit $f \in S_2(E)$ une forme bilinéaire symétrique. Alors, pour tout $A \subseteq E$,

1. $A \subseteq (A^{\perp})^{\perp}$.
2. $A^{\perp} = \hat{f}^{-1}(A^0) =^0\hat{f}(A)$.

Preuve.
1. Soit $x \in A$. Par définition de l'orthogonal, on a $f(x,y) = 0\ \forall y \in A^{\perp}$ par suite, $x \in (A^{\perp})^{\perp}$.
2. D'une part, $A^{\perp} = \{y \in E \mid \tilde{f}(y)(x) = 0,\ \forall x \in A\} = \{y \in E \mid \tilde{f}(y) \in A^0\} = \tilde{f}^{-1}(A^0)$.
D'autre part, $x \in\ ^0\tilde{f}(A) \Leftrightarrow \forall y \in A, \tilde{f}(y)(x) = 0 \Leftrightarrow \forall y \in A, f(x,y) = 0 \Leftrightarrow f(x,y) = 0, \forall y \in A \Leftrightarrow x \in A^{\perp}$. D'où $A^{\perp} =^0\hat{f}(A)$. ■

Rappelons que E est supposé de dimension finie. On a alors :

Corollaire 2.1.16
Soit $f \in S_2(E)$ une forme bilinéaire symétrique et H un sous espace vectoriel de E. Alors,

$$\dim H + \dim H^{\perp} \geq \dim E.$$

Preuve.
D'après la proposition précédente, $H^{\perp} =^0\hat{f}(H)$, puis, par la formule $\dim{}^0\hat{f}(H) + \dim \hat{f}(H) = \dim E^* = \dim E$, on déduit que $\dim H^{\perp} + \dim \hat{f}(H) = \dim E$. Mais, $\hat{f}_{|H} : H \to E^*$ étant linéaire, on obtient $\dim H \geq \dim \hat{f}(H)$. Par conséquent, $\dim H^{\perp} + \dim H \geq \dim E$. ■

Corollaire 2.1.17
Soit $f \in S_2(E)$ une forme bilinéaire symétrique **non dégénérée** *et H un sous espace vectoriel de E. Alors,*

1. $\dim H + \dim H^{\perp} = \dim E$.
2. $(H^{\perp})^{\perp} = H$.

Preuve.
1. Puisque f est non dégénérée, $\hat{f}$ est bijective et donc, $\dim \hat{f}(H) = \dim H$. Par conséquent, $\dim H + \dim H^{\perp} = \dim \hat{f}(H) + \dim H^{\perp} = \dim E$.
2. D'après (1), $\dim H^{\perp} + \dim(H^{\perp})^{\perp} = \dim E = \dim H + \dim H^{\perp}$, ce qui implique $\dim(H^{\perp})^{\perp} = \dim H$. Mais, puisque on est en dimension finie et $H \subseteq (H^{\perp})^{\perp}$, alors, $(H^{\perp})^{\perp} = H$. ■

Exercice 2.1.18
Soit $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x,y) = x_1y_1 - x_2y_2$ et $H = Vect(e_1)$. On vérifie facilement que f est une forme bilinéaire symétrique **dégénérée**. *Montrer que $H^{\perp} = Vect(e_2, e_3)$ et que $(H^{\perp})^{\perp} = Vect(e_1, e_3)$. Conclure.*

Nous terminons cette section par la notion suivante que sera largement étudiée dans les sections et chapitres suivants.

Définition 2.1.19
Soit f une forme bilinéaire (symétrique) sur E et $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E.
- On dit que B est orthogonale pour f si, pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i \neq j$, $f(e_i, e_j) = 0$.
- On dit que B est orthonormée pour f si **de plus**, *pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f(e_i, e_i) = 1$.*

2.2 Formes quadratiques

La notion de formes quadratiques est définie pour tout espace vectoriel E, de dimension finie ou non. Toutefois, l'étude sera axée sur le cas où E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}$.

Définitions et généralités

Définition 2.2.1
Soit E un espace vectoriel. On appelle forme quadratique sur E, toute application $q : E \to \mathbb{K}$ définie par une forme bilinéaire symétrique $f : E \times E \to \mathbb{K}$ par la relation :

$$q(x) = f(x, x), \ \forall x \in E.$$

Exemple 2.2.2
Les applications suivantes sont des forme quadratiques.

1. $\|.\|_2^2 : \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$; $\|f\|_2^2 = \int_a^b f(t)^2 dt$.
2. $Tr : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$; $Tr(A^2)$.

Définition 2.2.3
Dans $\mathbb{K}[X_1, X_2, \ldots, X_n]$, un polynôme de degré 2, est dit homogène si il est la forme

$$P(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \alpha_{i,j} X^i X^j.$$

La proposition suivante donne une caractérisation de formes quadratique en dimension finie.

Proposition 2.2.4
Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $q : E \to \mathbb{K}$ une application. Alors, q est une forme quadratique sur E si et seulement si, pour tout $x \in E$, $q(x)$ est un polynôme de degré 2 homogène en les coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de x. C'est à dire que $q(x) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \alpha_{i,j} x_i x_j$.

Preuve.
Si q est une forme quadratique définie par f alors $q(x) = f(x, x) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} f(e_i, e_j) x_i x_j$. C'est en fait un polynôme de degré 2 homogène en les coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de x.
Réciproquement, soit q un polynôme de degré 2 homogène en les coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de x. Posons

$$\begin{cases} a_{ij} = \frac{1}{2}(\alpha_{ij} + \alpha_{ji}), \ \forall 1 \leq i \neq j \leq n \\ a_{ii} = \alpha_{ii}, \ \forall 1 \leq i \leq n \end{cases} \tag{2.1}$$

On vérifie alors que $q(x) = f(x, x)$ avec $f(x, y) = \sum_{\leq i,j \leq n} a_{ij} x_i y_j$ qui est clairement (puisque $a_{ij} = a_{ji}$) une forme bilinéaire symétrique. ■

Proposition 2.2.5
Toute forme quadratique $q : E \to \mathbb{K}$ est définie par une unique forme bilinéaire symétrique.

Preuve.
Supposons que $f, g : E \times E \to \mathbb{K}$ sont deux f.b.s. définissant q. Ona alors, $\forall x, y \in E$, $q(x+y) = f(x+y, x+y) = q(x) + 2f(x, y) + q(y)$ et $q(x+y) = g(x+y, x+y) = q(x) + 2g(x, y) + q(y)$. par suite, puisque $car(\mathbb{K}) \neq 2$, $f(x, y) = g(x, y)$. D'où $f = g$. ■

Définition 2.2.6
Soit q est une forme quadratique sur E. L'unique forme bilinéaire symétrique

$$f_q(x, y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)] \tag{2.2}$$

définissant q est appelée, forme polaire de q.

La proposition suivante donne une caractérisation de formes quadratique en dimension quelconque.

Proposition 2.2.7
Soit $q : E \to \mathbb{K}$ une application. Alors q est une forme quadratique si et seulement si

(a) $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$; $\varphi(x, y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$ *est une forme bilinéaire (symétrique).*

(b) $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$.

Preuve.
Si q est une forme quadratique, alors $\varphi = f_q$ est une f.b.s. et, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$, $q(\lambda x) = f_q(\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 q(x)$.
Réciproquement, Si (a) et (b) sont vérifiées, alors $\varphi(x, x) = \frac{1}{2}[q(2x) - 2q(x)] = \frac{1}{2}[4q(x) - 2q(x)] = q(x)$. Par conséquent, q est une forme quadratique de forme polaire $f_q = \varphi$. ■

La proposition suivante rassemble des formules liant q et f_q appelées *identités de polarisation.*

Proposition 2.2.8
Soit q est une forme quadratique sur E. Alors :

1. $f_q(x, y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$.
2. $f_q(x, y) = \frac{1}{2}[q(x) + q(y) - q(x-y)]$.
3. $f_q(x, y) = \frac{1}{4}[q(x+y) - q(x-y)]$.

Preuve.
Les trois identités sont des cas particuliers de l'identité suivante :

$$q(\lambda x + \mu y) = \lambda^2 q(x) + 2\lambda\mu f_q(x, y) + \mu^2 q(y), \ \forall \lambda, \ \mu \in \mathbb{K}, \ \forall x, y \in E. \tag{2.3}$$

En effet, 1. s'obtient pour $\lambda = \mu = 1$, 2. s'obtient pour $\lambda = 1$ et $\mu = -1$. Puis 3. = 1. + 2.. ■

Remarque 2.2.9
Soit q est une forme quadratique sur E. Alors, (1) : q n'est pas linéaire, (2) : $q(0_E) = 0_{\mathbb{K}}$, (3) : $q(-x) = q(x), \forall x \in E$.

Le corollaire suivant introduit *identité du parallélogramme*. Elle généralise en fait celle connue dans $\mathbb{R}^2$:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Corollaire 2.2.10
Soit q est une forme quadratique sur E. Alors, $\forall x, y \in E$:

$$q(x+y) + q(x-y) = 2q(x) + 2q(y).$$

Preuve.
C'est exactement 1. − 2.. ■

2.2.1 Etude qualitative des formes quadratiques

Comme (autre) conséquence de l'unicité de la forme polaire f_q définissant (ou associée à) q, on transfère les invariants de f_q à q. Ainsi, on obtient :

Définition 2.2.11
Soit q une forme quadratique sur E.

1. *Le rang (resp. le noyau) de q est celui de f_q : $rang(q) := rang(f_q)$ et $N(q) := N(f_q)$.*
2. *La matrice q, dans une base B donnée de E, est celle de f_q : $M(q, B) := M(f_q, B)$.*
   En particulier,
   • $\forall x \in E,\ q(x) = {}^tXM(q, B)X$.
   • *Si B' est une autre base de E et P la matrice de passage de B à B', alors* $M(q, B') = {}^tPM(q, B)P$.
3. *q est dite non dégénérée si f_q est non dégénérée.*
4. *Deux éléments $x, y \in E$ sont q-orthogonaux si ils sont f_q orthogonaux.*
5. *Pour toute partie A (resp. sous espace H) de E, $A^\perp$ (resp. $H^\perp$) pour f_q est appelé orthogonal de A (resp. de H) pour q.*
6. *Une base B de E est q-orthogonale (resp. q-orthonormée) si elle est f_q-orthogonale (resp. f_q-orthonormée).*

Deux autres notions intéressantes pour l'étude des formes bilinéaires symétriques et des formes quadratiques sont définies, sous condition que $\mathbb{K}$ est un corps ordonné, comme suit :

Définition 2.2.12
Soit f est une forme bilinéaire symétrique.

1. *f est dite positive si pour tout $x \in E$, $f(x, x) \geq 0$.*
2. *f est dite définie si pour tout $x \in E$, $f(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$.*

3. f est dite définie positive si elle définie et positive : $\forall x \in E$, $x \neq 0 \Rightarrow f(x,x) > 0$.
Soit q une forme quadratique sur E.

4. q est dite non dégénérée, positive, définie, ou définie positive si f_q l'est.

5. un vecteur $x \in E$ est dit isotrope pour q si $q(x) = f_q(x,x) = 0$.

6. L'ensemble des vecteurs isotropes pour q, noté $I(q)$, est appelé cône isotrope de q.

Quelques conséquences des deux définitions : Soient $f \in S_2(E)$ et $q \in \mathcal{Q}(E)$.

1. Si f est définie, alors elle est non dégénérée : Soit $x \in N(f)$, alors $f(x,x) = 0$ et donc $x = 0$. D'où $N(f) = \{0\}$ est par conséquent f est non dégénérée.
2. Si f est définie positive, alors elle est non dégénérée. La réciproque est fausse : prenez $q(x) = x_1^2 - x_2^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
3. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et E admet une base f-orthonormée, alors f est définie positive : Soit $x = \sum_{i=1}^{i=n} x_i e_i \in E$, alors $f(x,x) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 \geq 0$, donc f est positive. Si de plus $f(x,x) = 0$ alors $x_i = 0, \forall i \in [\![1,n]\!]$, ce qui implique $x = 0$ et f est définie et est donc définie positive.
4. $N(q) := N(f_q) \subseteq I(q)$: Soit $x \in N(q)$, alors $f_q(x,x) = 0$ et donc $x \in I(q)$.
5. q est définie si et seulement si $I(q) = \{0\}$.
6. Deux vecteurs $x, y \in E$ sont q-orthogonaux $\Leftrightarrow q(x+y) = q(x) + q(y) \Leftrightarrow q(x-y) = q(x) + q(y)$.

Le résultat suivant a beaucoup d'intérêts géométriques. Il est appelé : **Inégalité de Cauchy Schwartz**.

Théorème 2.2.13
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et q est une forme quadratique positive, alors

(a) $\forall (x,y) \in E^2$, $|f_q(x,y)| \leq \sqrt{q(x)}\sqrt{q(y)}$.

(b) Si de plus q est définie, on a égalité si et seulement si x et y sont colinéaires : $\exists \alpha \in \mathbb{R} \mid y = \alpha x$.

Preuve.
(a) :
- Supposons $q(x) \neq 0$. Puisque q est positive, on a $q(x) > 0$ et $\forall \lambda,\ \mu \in \mathbb{R},\ q(\lambda x + \mu y) \geq 0$. Par suite (cf. 2.3) $q(x)q(\lambda x + \mu y) \geq 0 \Rightarrow \lambda^2 q(x)^2 + 2\lambda\mu q(x) f_q(x,y) + \mu^2 q(x)q(y) \geq 0 \Rightarrow (\lambda q(x) + \mu f_q(x,y))^2 - \mu^2(f_q(x,y)^2 - q(x)q(y)) \geq 0$. Ainsi, pour $\lambda = f_q(x,y)$ et $\mu = -q(x)$, on obtient $-\mu^2(f_q(x,y)^2 - q(x)q(y)) \geq 0 \Rightarrow f_q(x,y)^2 - q(x)q(y) \leq 0 \Rightarrow (f_q(x,y))^2 \leq q(x)q(y)$. par conséquent, $|f_q(x,y)| \leq \sqrt{q(x)}\sqrt{q(y)}$.
- Supposons $q(x) = 0$. On a alors, $\forall \mu \in \mathbb{R}$, $q(\mu x + y) = 2\mu f_q(x,y) + q(y)$. Si $f_q(x,y) \neq 0$, l'équation $z(\mu) = 2\mu f_q(x,y) + q(y)$ décrit (dans $\mathbb{R}^2$) une droite vectorielle dirigée par $2f_q(x,y) \neq 0$. Il existe donc $\mu_0 \in \mathbb{R}$ tel que $z(\mu_0) = q(\mu_0 x + y) = 2\mu_0 f_q(x,y) + q(y) < 0$, ce qui contredit la positivité de q. Par conséquent, $f_q(x,y) = 0$ et l'inégalité devient donc triviale.
(b) :
Supposons $|f_q(x,y)| = \sqrt{q(x)}\sqrt{q(y)}$. Comme $\sqrt{q(x)}\sqrt{q(y)} \geq 0$, on a alors, $|f_q(x,y)| = f_q(x,y) =$

$\sqrt{q(x)}\sqrt{q(y)}$. Autrement dit, l'équation $q(x)\mu^2+2f_q(x,y)\mu+q(y)=0$ (en mu) a un discriminant $\Delta'=0$. Elle admet donc une solution unique μ_0. Ensuite, q étant définie, $q(y+\mu_0 x)=0 \Rightarrow y+\mu_0 x=0 \Rightarrow y=-\mu_0 x$. D'où x et y sont colinéaires. La réciproque est évidente. ■

Corollaire 2.2.14
Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et q est une forme quadratique positive sur E, alors,

$$q \text{ est définie } \Leftrightarrow q \text{ est non dégénérée.}$$

Preuve.
L'implication directe est démontrée ci-haut. Pour la réciproque, soit $x\in E$. Si $q(x)=0$ alors, d'après le théorème précédent, $f(x,y)=0$, $\forall y\in E$. Ce qui équivaut à $x\in N(f)$. Mais q étant par hypothèse non dégénérée, on a $N(f)=\{0\}$ et donc $x=0$. D'où q est définie. ■

Le résultat suivant, un cas particulier de l'inégalité de Schwartz, est appelé **Inégalité de Minkowski**.

Théorème 2.2.15
Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et q est une forme quadratique positive sur E, alors

$$\sqrt{q(x+y)} \leq \sqrt{q(x)}+\sqrt{q(y)}.$$

Si de plus q est définie, on a égalité si et seulement si x et y sont colinéaires : $\exists \alpha\in\mathbb{R} \mid y=\alpha x$.

Preuve.
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz et le fait que $f_q(x,y)\leq |f_q(x,y)|$, on a :

$$\begin{array}{rcl} q(x+y) & = & q(x)+2f_q(x,y)+q(y) \\ & \leq & q(x)+2\sqrt{q(x)}\sqrt{q(y)}+q(y) \\ & = & (\sqrt{q(x)}+\sqrt{q(y)})^2. \end{array}$$

D'où, (puisque $q(x+y)\geq 0$) $\sqrt{q(x+y)} \leq \sqrt{q(x)}+\sqrt{q(y)}$.

Si de plus q est définie, on a alors :
$(\sqrt{q(x+y)})^2=(\sqrt{q(x)}+\sqrt{q(y)})^2 \Leftrightarrow q(x)+2f_q(x,y)+q(y)=q(x)+2\sqrt{q(x)}\sqrt{q(y)}+q(y) \Leftrightarrow f_q(x,y)=\sqrt{q(x)}\sqrt{q(y)}$. Par conséquent, d'après Cauchy-Schwartz, $\exists\alpha\in\mathbb{R} \mid y=\alpha x$. ■

2.2.2 Décomposition des formes quadratiques et Théorème de Sylvester

Dans cette sous-section, on suppose, sauf mention contraire, que E est un espace vectoriel de dimension finie $n\geq 1$ sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique zéro. On commence par la définition suivante :

Définition 2.2.16
Soit q une forme quadratique sur E.
1. Un sous espace H de E est dit q-isotrope si $H \cap H^{\perp} \neq \{0\}$. Il est dit non-q-isotrope sinon.
2. Un sous espace H de E est dit q-totalement isotrope si $H \subseteq H^{\perp}$ ou dune façon équivalente, si $q_{|H} = 0$.

Lemme 2.2.17
Si H est un sous espace non q-isotrope de E, alors $E = H \oplus H^{\perp}$.

Preuve.
H non isotrope $\Leftrightarrow H \cap H^{\perp} = \{0\} \Leftrightarrow H + H^{\perp} = H \oplus H^{\perp}$. D'après Corollaire 2.1.16. $n = \dim E \leq \dim H + \dim H^{\perp} = \dim(H + H^{\perp}) \leq \dim E = n$. Par conséquent, $E = H \oplus H^{\perp}$. ■

Le résultat suivant est un **Théorème principal**.

Théorème 2.2.18
Soit q une forme quadratique sur E. Alors, il existe une base $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ q-orthogonale de E.

Preuve.
On raisonne par récurrence sur $n = \dim E$.
Si $n = 1$, c'est automatique.
Supposons que le théorème est vérifié pour tout espace F de dimension inférieure ou égale à $n - 1$ avec $n \geq 2$.
Si $q = 0$, toute base de E est q-orthogonale.
Sinon, il existe $0 \neq v \in E$ tel que $q(v) \neq 0$. La forme linéaire $\hat{f}_q(v) = f_q(v, -)$ est donc non nulle (car $\hat{f}_q(v)(v) = f_q(v, v) = q(v)$).

$$E = H \oplus Vect(v). \tag{2.4}$$

Soient maintenant $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ dans $\mathbb{R}$. On a alors $f_q(\alpha v, \beta v) = \alpha\beta q(v) \neq 0$. Par suite, $Vect(v) \cap Vect(v)^{\perp} = \{0\}$. Ainsi, $Vect(v)$ est non q-isotrope et d'après le lemme précédent,

$$E = Vect(v) \oplus Vect(v)^{\perp}. \tag{2.5}$$

Appliquons l'hypothèse de récurrence à $Vect(v)^{\perp}$ qui est de dimension $n - 1$, on obtient une base $\{b_1, \ldots, b_{n-1}\}$ $q_{|Vect(v)^{\perp}}$-orthogonale de $Vect(v)^{\perp}$. Puis, on la complète par $\{b_n =: v\}$ pour obtenir ainsi $B = \{b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n\}$ qui est une base de E. Elle est en plus q-orthogonale. ■

Corollaire 2.2.19
Soit q une forme quadratique sur E et $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ une base q-orthogonale de E. Alors,
1. $q(x) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 q(b_i)$, $\forall x = \sum_{i=1}^{i=n} x_i b_i \in E$.
2. $M(q, B)$ est diagonale.

Attention : Si B_0 est une autre de E, elle n'est pas nécessairement semblable à B. Même si c'st le cas, les vecteurs de B ne sont pas nécessairement des vecteurs propres de $M(q, B_0)$. Celle-ci n'est donc pas nécessairement diagonalisable.

La première conséquence du Théorème principal est le suivant, appelé **Loi d'inertie de Sylvester**.

Théorème 2.2.20
On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
Soit q *une forme quadratique sur* E. *Alors, il existe une base* q*-orthogonale* $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ *de* E *telle que :*

$$q(x) = \sum_{i=1}^{i=s} x_i^2 - \sum_{i=s+1}^{i=s+t} x_i^2, \ \ \forall x = \sum_{i=1}^{i=n} x_i e_i \in E$$

avec $r = s + t$ *désigne le rang de* q.
Le couple (s, t) *ne dépend pas de la base choisie. On l'appelle* **signature** *de* q *et on note* $sg(q) = (s, t)$ *et* $rg(q) = s + t$.

Preuve.
D'après le théorème précédent, il existe une base orthogonale $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ dont laquelle

$$q(x) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 q(b_i), \quad \forall x = \sum_{i=1}^{i=n} x_i b_i \in E$$

avec $r = rang(q)$. Notons $\alpha_i = q(b_i), \ 1 \leq i \leq r$ et réordonnons les de sorte que

$$\alpha_i \begin{cases} > 0, \text{ si } 1 \leq i \leq s \\ < 0, \text{ si } s+1 \leq i \leq s+t \\ = 0, \text{ si } s+t+1 \leq i \leq n \end{cases}.$$

On pose alors

$$e_i = \begin{cases} \frac{b_i}{\sqrt{\alpha_i}}, \text{ si } 1 \leq i \leq s \\ \frac{b_i}{\sqrt{-\alpha_i}}, \text{ si } s+1 \leq i \leq s+t \\ b_i, \text{ si } s+t+1 \leq i \leq n \end{cases}.$$

En utilisant la relation $q(\lambda y) = \lambda^2 q(y), \ \forall y \in E$, on obtient que $B = \{e_1, \dots, e_n\}$, ainsi construite, est une base appropriée.

Supposons maintenant qu'il existe une autre base appropriée $B' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ de sorte que l'on ait aussi pour un autre couple (s', t') tel que $s' + t' = r$:

$$q(x) = \sum_{i=1}^{i=s'} {x'_i}^2 - \sum_{i=s'+1}^{i=s'+t'} {x'_i}^2, \ \ \forall x = \sum_{i=1}^{i=n} x'_i e'_i \in E.$$

Notons ensuite $F = Vect(e_1, \dots, e_s)$, $G = Vect(e_{s+1}, \dots, e_n)$, $F' = Vect(e'_1, \dots, e'_{s'})$ et $G' = Vect(e'_{s'+1}, \dots, e'_n)$. Remarquer que $\dim G = n - s$ et $\dim G' = n - s'$.

Il est claire que :

$$x \in F \cap G' \Rightarrow \begin{cases} q(x) \geq 0 \\ q(x) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow q(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

(car : $x \in F \Rightarrow x = x_1e_1 + \ldots + x_se_s$ et $q(x) = x_1^2 + \ldots + x_s^2$). Par suite, $F \cap G' = \{0\}$ et donc $F + G' = F \oplus G' \subseteq E$. Comme $\dim F + \dim G' \leq n = \dim E$, on a alors : $s + (n - s') \leq n$. D'où $s \leq s'$. On montre de la même manière que $F' \cap G = \{0\}$ et on en déduit que $s' \leq s$. D'où, (comme r ne dépend pas de la base) $s = s'$ et $t = r - s = r - s' = t'$. Ceci montre que (s, t) ne dépend pas de la base choisie. ■

Corollaire 2.2.21
Avec les notations du Théorème 2.2.20 :

1. *q est définie positive si et seulement si $sg(q) = (s, 0)$.*
2. *q est définie négative si et seulement si $sg(q) = (0, t)$.*
3. *Il existe une base q-orthonormée de E si et seulement si $sg(q) = (n, 0)$.*

Exercice 2.2.22
Avec les notations du Théorème 2.2.20, montrer que la relation dans $\mathcal{Q}(E)$ définie par :

$$q \sim q' \Leftrightarrow sg(q) = sg(q')$$

est une relation d'équivalence.

Comme conséquence, le Théorème 2.2.20 induit une classification des formes quadratiques sur l'espace vectoriel réel E.

Une méthode pratique pour obtenir une base q-orthogonale de E est donnée par la **décomposition de Gauss** de la forme quadratique q.

Proposition 2.2.23
On suppose que E est un espace vectoriel réel.
Soit q est une forme quadratique sur E de rang $rg(q) = r$. Alors, il existe r formes linéaires φ_i linéairement indépendantes telles que, pour tout $x \in E$:

$$q(x) = \sum_{i=1}^{i=r} \alpha_i(\varphi_i(x))^2 := \sum_{i=1}^{i=r} \alpha_i\varphi_i^2(x), \text{ avec } \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Preuve.
On peux suppose que $q \neq 0$.
Soit $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E et $q(x) = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i x_i^2 + 2\sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_{ij}x_ix_j$ son expression dans B. Si $n = 1$, alors $q(x) = \alpha_1 x^2 = \alpha_1\varphi_1^2(x)$.

On suppose que le théorème est vraie pour tout espace de dimension inférieure ou égale à $n - 1$. On doit discuter deux cas :

1^{er} **cas :** $\exists i \geq 1$ tel que $\alpha_i \neq 0$. Soit i_0 le plus petit indice tel que $\alpha_{i_0} \neq 0$. On écrit alors $q(x) = \alpha_{i_0}x_{i_0}^2 + 2x_{i_0}\theta_1(x_1, \ldots, x_{i_0-1}, x_{i_0+1}, \ldots, x_n) + q_2(x_1, \ldots, x_{i_0-1}, x_{i_0+1}, \ldots, x_n)$ avec θ_1 (resp. q_2) une forme linéaire (resp. une forme quadratique) sur $F = Vect(e_1, \ldots, e_{i_0-1}, e_{i_0+1}, \ldots, e_n)$. Notons pour simplifier $x' = (x_1, \ldots, x_{i_0-1}, x_{i_0+1}, \ldots, x_n)$. Ensuite, on écrit :

$$q(x) = \alpha_{i_0}[x_{i_0} + \frac{1}{\alpha_{i_0}}\theta_1(x')]^2 + q_2(x') - \frac{1}{\alpha_{i_0}}\theta_1^2(x').$$

Posons $\varphi_1(x) = x_{i_0} + \frac{1}{\alpha_{i_0}}\theta_1(x')$, $\lambda_1 = \alpha_{i_0}$ et $q_3(x) = q_2(x') - \frac{1}{\alpha_{i_0}}\theta_1^2(x') := (q_2 - \frac{1}{\alpha_{i_0}}\theta_1^2)(x')$. On a alors

$$q(x) = \lambda_1\varphi_1^2(x) + q_3(x).$$

Mais $q_3(x) = q_3(x')$ étant en fait une forme quadratique sur F qui est de dimension $n-1$, on utilise alors l'hypothèse de récurrence pour conclure dans ce cas.
Pour l'interdépendance des φ_i $(1 \leq i \leq n)$, notez bien que seule φ_1 a une coordonnée non nulle, à savoir x_{i_0} en $e_{i_0}^*$, dans la base duale $B^* = \{e_1^*, \ldots, e_{i_0-1}^*, e_{i_0+1}^*, \ldots, e_n^*\} \cup \{e_{i_0}^*\}$. Ainsi, comme $x_{i_0} = e_{i_0}^*(x)$ et $e_i^*(x') = e_i^*(x)$,

$$\sum_{i=1}^{i=n} \gamma_i\varphi_i(x) = 0 \Rightarrow \gamma_1 e_{i_0}^*(x) + \sum_{i=2}^{i=n} \gamma_i' e_i^*(x') = 0 \Rightarrow \gamma_1 = 0.$$

Il en résulte aussi que $\sum_{i=2}^{i=n} \gamma_i\varphi_i(x) = 0$ et on conclut, par récurrence, que $\gamma_2 = \ldots, \gamma_n = 0$.

2^{eme} **cas :** $\alpha_i = 0$, $\forall i \geq 1$. Alors, $\exists \alpha_{ij} \neq 0$. On peut supposer, pour simplifier, que $\alpha_{12} \neq 0$. On écrit alors

$$q(x) = \alpha_{12}x_1x_2 + x_1\theta_1(x_3, \ldots, x_n) + x_2\theta_2(x_3, \ldots, x_n) + q_3(x_3, \ldots, x_n)$$

avec θ_1 et θ_2 (resp. q_3) deux formes linéaires (resp. une forme quadratique) sur $G = Vect(e_3, \ldots, e_n)$).

Notons $x' = (x_3, \ldots, x_n)$. On a alors

$$q(x) = \alpha_{12}(x_1 + \frac{1}{\alpha_{12}}\theta_2(x'))(x_2 + \frac{1}{\alpha_{12}}\theta_1(x')) + q_3(x') - \frac{1}{\alpha_{12}}\theta_1(x')\theta_2(x').$$

Ensuite, on pose $u_1(x) = x_1 + \frac{1}{\alpha_{12}}\theta_2(x')$ et $u_2(x) = x_2 + \frac{1}{\alpha_{12}}\theta_1(x')$ et on remarque que

$$\alpha_{12}u_1(x)u_2(x) = \frac{\alpha_{12}}{4}(u_1(x) + u_2(x))^2 - \frac{\alpha_{12}}{4}(u_1(x) - u_2(x))^2.$$

Posons enfin, $\varphi_1 = u_1 + u_2$, $\lambda_1 = \frac{\alpha_{12}}{4}$, $\varphi_2 = u_1 - u_2$, $\lambda_2 = -\frac{\alpha_{12}}{4}$ et $q_4(x') = q_3(x') - \frac{1}{\alpha_{12}}\theta_1(x')\theta_2(x')$. Il en résulte que

$$q(x) = \lambda_1\varphi_1^2(x) + \lambda_2\varphi_2^2(x) + q_4(x').$$

On termine alors en appliquant l'hypothèse de récurrence à $q_4(x')$ qui est une forme quadratique sur $G = Vect(e_3, \ldots, e_n)$.
Pour l'interdépendance dans ce cas, on procède comme dans le premier cas (à faire comme exercice). ■

Comme application à cette décomposition de Gauss, on obtient une base orthogonale de E de la manière suivante :
Complétons (si nécessaire) la famille libre $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_r\}$ en une base $C = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_r, \varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_n\}$ de E^*. Notons R la matrice de passage de B^* à C. Notons enfin, P la matrice de passage de la base canonique $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de E à la base préduale $B' = \{e_1', \ldots, e_n'\}$ de C. On sait alors que ${}^tP$ est la matrice de passage de C à B^*. Par suite $R = ({}^tP)^{-1}$ ce qui équivaut à $P = ({}^tR)^{-1}$. La base orthogonale est alors formée par les vecteurs colonnes de P.

Exemple 2.2.24
1. Décomposer la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$q(x) = 2x_1^2 - 2x_2^2 - 6x_3^2 + 3x_1x_2 - 4x_1x_3 + 7x_2x_3.$$

On procède "comme dans la preuve du la proposition" :

$$\begin{array}{rcl} q(x) & = & 2x_1^2 + x_1(3x_2 - 4x_3) - 2x_2^2 - 6x_3^2 + 7x_2x_3 \\ & = & 2[x_1 + \frac{1}{2}(3x_2 - 4x_3)]^2 - \frac{1}{2}(3x_2 - 4x_3)^2 - 2x_2^2 - 6x_3^2 + 7x_2x_3 \\ & = & 2[x_1 + \frac{1}{2}(3x_2 - 4x_3)]^2 - \frac{13}{2}x_2^2 - 14x_3^2 + 19x_2x_3 \\ & = & 2[x_1 + \frac{1}{2}(3x_2 - 4x_3)]^2 - \frac{13}{2}[x_2 - \frac{38}{13}x_3]^2 + (\frac{38^2}{26} - 14)[x_3]^2. \end{array}$$

Notez que $sg(q) = (2, 1)$ et $rg(q) = 3$. Elle n'est donc ni positive, ni négative.

Pour déterminer la base q-orthogonale, on note tout d'abord $\varphi_1 = e_1^* + \frac{3}{2}e_2^* - 2e_3^*$, $\varphi_2 = e_2^* - \frac{38}{13}e_3^*$ et $\varphi_3 = e_3^*$. Ensuite, on a deux méthodes :
Première méthode : D'après ce qui précède,

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ -2 & -\frac{38}{13} & 1 \end{pmatrix}.$$

Il reste à calculer $P = ({}^tR)^{-1}$. La base orthogonale $B' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ est alors formée des vecteurs colonnes de P.
Deuxième méthode : Comme $P = ({}^tR)^{-1} = {}^t(R^{-1})$, pour trouver P, on résoud le système (d'incinnu X) $RX = Y$ on obtient $X = R^{-1}Y$. Donc, si on note $P_1 = R^{-1}$, alors $P = {}^tP_1$ et on prend ses vecteurs collonnes **on bien** *on prend directement les vecteurs lignes de P_1.*

2. Décomposer la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^4$ par :

$$q(x) = x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + x_2x_3 + 4x_2x_4 + 2x_3x_4.$$

On procède "comme dans la preuve du la proposition" :

$$\begin{array}{rcl} q(x) & = & x_1x_2 + 2x_1(x_3 + x_4) + x_2(x_3 + 4x_4) + 2x_3x_4 \\ & = & (x_1 + x_3 + 4x_4)(x_2 + 2(x_3 + x_4)) - (x_3 + 4x_4)(2(x_3 + x_4)) + 2x_3x_4 \\ & = & (x_1 + x_3 + 4x_4)(x_2 + 2(x_3 + x_4)) - 2(x_3^2 + 5x_3x_4 + 4x_4^4) + 2x_3x_4 \\ & = & \frac{1}{2}[x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4]^2 - \frac{1}{2}[x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4]^2 - 2[x_3 + 2x_4]^2. \end{array}$$

Ainsi, $sg(q) = (1, 2)$ et $rg(q) = 3$. Elle n'est donc ni positive, ni négative.

On termine ce chapitre par

Théorème 2.2.25
On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Soit q une forme quadratique sur E. Alors il existe une base orthogonale $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ dont laquelle

$$q(x) = \sum_{i=1}^{i=r} x_i^2, \quad \forall x = \sum_{i=1}^{i=n} x_i b_i \in E$$

avec $r = rang(q)$.

Preuve.
La preuve est identique à celle du cas réel, sauf que pour $\mathbb{C}$ la racine d'un complexe existe toujours. ∎

Chapitre 3

Espaces pré-hilbertiens réels et Espaces euclidiens

Dans tout le chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et E est, sauf mention contraire, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque.

Définition 3.0.1
Une forme bilinéaire symétrique **définie positive** $f : E \times E \to \mathbb{R}$ *est appelée,* **produit scalaire sur** E. *On note pour tout* $(x, y) \in E^2$ *:*

$$f(x, y) =< x, y > .$$

La **racine carrée** *de la forme quadratique* q *associée au produit scalaire* $< \, , \, >$ *est appelée,* **norme euclidienne** *sur* E. *On note, pour tout* $x \in E$ *:*

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >}.$$

3.1 Propriétés générales

Définition 3.1.1

(1) On appelle espace pré-hilbertien réel, tour $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* E*, muni d'un produit scalaire.*

(2) On appelle espace euclidien, tout $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension finie* E*, muni d'un produit scalaire.*

Notation : Un espace pré-hilbertien réel ou euclidien E est noté $(E, < \, , \, >)$ ou tout simplement E.

Définition 3.1.2
Soit E *un espace pré-hilbertien réel ou euclidien. En plus de la norme sur* E*, on a aussi la distance* $d : E \times E \to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$\forall x, y \in E, \; d(x, y) = \|x - y\|.$$

Proposition 3.1.3
Soit E un espace pré-hilbertien réel ou euclidien. La norme $\| \| : E \to \mathbb{R}^+$ vérifie les propriétés suivantes :

1. $\forall x \in E, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$
2. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$
3. $\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Preuve.
(1) et (2) viennent de la définition de $\| \|$. (3) est l'inégalité de Minkowski. ∎

Proposition 3.1.4
Soit E un espace pré-hilbertien réel ou euclidien. La distance $d : E^2 \to \mathbb{R}^+$ vérifie les propriétés suivantes :

1. $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = d(y, x).$
2. $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$
3. $\forall (x, y, z) \in E^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$

Preuve.
(1) découle de la définition, (2) viens de (1) de la proposition précédente et pour (3) écrire $z - x = (z - y) + (y - x)$. ∎

Le théorème suivant donne les propriétés déjà démontrées dans le chapitre précédent :

Théorème 3.1.5
Soit E un espace pré-hilbertien réel. Alors :

1. *Si E est euclidien, alors, il admet au moins une base orthonormée.*
2. *Si E est euclidien, alors, pour tout sous espace vectoriel F de E, on a $E = F \oplus F^\perp$.*
3. *(Théorème de Pythagore) :* $\forall (x, y) \in E^2, \|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \;\Leftrightarrow\; x \perp y.$
4. *(Inégalité de Cauchy-Schwartz) :* $\forall (x, y) \in E^2, \; < x, y >^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$ *; avec égalité si et seulement si x et y sont liés.*

Définition 3.1.6
Soit E un espace pré-hilbertien réel. Deux sous espaces vectoriels F et G de E sont dits supplémentaires orthogonaux, si $E = F \oplus G$ et $F \perp G$.
On dira aussi que F admet un supplémentaire orthogonal.

Proposition 3.1.7
Soit E un espace pré-hilbertien réel et F un sous espace vectoriel de E. Alors, F admet un supplémentaire orthogonal si et seulement si $E = F \oplus F^\perp$.

Preuve.
($\Rightarrow$) : Supposons qu'il existe G sous espace de E tel que $E = F \oplus G$ et $F \perp G$. On a alors

$$F \perp G \Rightarrow G \subseteq F^\perp \Rightarrow E = F \oplus G \subseteq F + F^\perp \subseteq E \Rightarrow E = F + F^\perp.$$

Or $F \cap F^\perp = \{0\}$ (car $<\,,\,>$ est défini positif), donc $E = F \oplus F^\perp$.
$(\Leftarrow)$: Par définition du supplémentaire orthogonal, prendre $G = F^\perp$. ■

Lemme 3.1.8
Soit E un espace pré-hilbertien réel et G et F deux sous espaces qui sont supplémentaires orthogonaux. Alors $F = G^\perp$ et $F = F^{\perp\perp}$.

Preuve.
On a $F \perp G \Rightarrow G \subseteq F^\perp$. Soit maintenant $x \in F^\perp$. Par conséquent, $F^\perp \subseteq E = F \oplus G \Rightarrow \exists!\ a \in F\ ,\ \exists!\ b \in G \mid x = a + b \Rightarrow x - b \in F$ *et* $b \in F^\perp \Rightarrow x - b \in F \cap F^\perp = \{0\} \Rightarrow x = b \in G$. D'où $G = F^\perp$. On montre de la même manière que $F = G^\perp$, ce qui implique $F = F^{\perp\perp}$. ■

Corollaire 3.1.9
Soit E un espace pré-hilbertien réel. Alors, pour chaque sous espace vectoriel F ayant un supplémentaire orthogonal dans E, celui-ci est unique et est égal à $F^\perp$.

3.1.1 Projection et symétrie orthogonales

Soit E un espace pré-hilbertien réel et soit F un sous espace vectoriel F ayant un supplémentaire orthogonal G dans E. D'après le corollaire précédent, $G = F^\perp$. Ainsi, $\forall x \in E$, $\exists! (x_1, x_2) \in F \times F^\perp, \mid x = x_1 + x_2$. On a alors :

Définition 3.1.10
• *La projection orthogonale p_F de E sur F (ou parallèlement à $F^\perp$) est définie par :*

$$p_F(x) = x_1.$$

• *La symétrie orthogonale s_F de E par rapport à F est définie par :*

$$s_F(x) = x_1 - x_2.$$

Premières propriétés :

1. $p_F^2 = p_F \circ p_F = p_F$; $p_F(-x) = -p_F(x),\ \forall x \in E.$
2. $s_F^2 = s_F \circ s_F = Id_E$; $s_F(-x) = -s_F(x),\ \forall x \in E.$
3. $s_F \circ p_F = p_F = p_F \circ s_F.$

Proposition 3.1.11
Soit E un espace euclidien et F un sous espace vectoriel de E. Alors :

$$\forall x \in E,\ \forall y' \in F - \{p_F(x)\},\ \|x - p_F(x)\| < \|x - y'\|.$$

Preuve.
Puisque E est euclidien, alors, $E = F \oplus F^\perp$. Soit donc $x \in E$. Posons $x = y + z$ avec $y \in F$ et

$z \in F^{\perp}$. Soit $y' \in F - \{y\}$ un vecteur quelconque. On a alors $x - y = z \in F^{\perp}$ et $y - y' \in F - \{0\}$. Par suite, d'une part, $y = p_F(x)$ et $\|y - y'\| \neq 0$ et d'autre part,

$$x - y' = (x - y) + (y - y') \Rightarrow \|x - y'\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - y'\|^2.$$

D'où, $\|x - p_F(x)\| < \|x - y'\|$. ∎

On a alors la définition suivante :

Définition 3.1.12
Soit E un espace euclidien, F un sous espace vectoriel de E et $x \in E$.

$$d(x, F) := \inf\{\|x - z\|, z \in F\} = \|x - p_F(x)\|$$

est appelée distance de x à F.

Notez bien que :

$$d(-, F) : E \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto d(x, F) := \inf\{\|x - z\|, z \in F\} = \|x - p_F(x)\|$$

définie une application de E dans $\mathbb{R}^+$.

Les deux propositions précédentes ainsi que la notion de distance se généralisent pour tout sous espace de dimension finie d'un espace pré-hilbertien réel grâce à :

Théorème 3.1.13
Dans E un espace pré-hilbertien réel, tout sous espace F de dimension finie admet un supplémentaire orthogonal. i.e. $E = F \oplus F^{\perp}$.

Preuve.
Notons que $< \, , \, >_{|F}$ défini un produit scalaire sur F (car elle reste définie positive). Soit donc $B = \{e_1, \ldots, e_p\}$ une base orthonormée de F. Soit $x \in E$, considérons $y = \sum_{i=1}^{i=p} < x, e_i > e_i$. On a donc, $< y, e_j >= \sum_{i=1}^{i=p} < x, e_i >< e_i, e_j >=< x, e_j >, \forall j \in [\![1, p]\!]$, par suite $< y - x, e_j >= 0, \forall j \in [\![1, p]\!]$ ce qui implique $y - x \in F^{\perp}$. D'où, comme $y \in F$, $x \in F + F^{\perp}$. Mais, $F \cap F^{\perp} = \{0\}$ entraine alors que $E = F \oplus F^{\perp}$. ∎

Proposition 3.1.14
Soit E un espace pré-hilbertien réel et F un sous espace de dimension finie mini d'une base orthonormée $B = \{e_1, \ldots, e_p\}$. Alors, $\forall x \in E$:

1. $p_F(x) = \sum_{i=1}^{i=p} < x, e_i >$.
2. $\sum_{i=1}^{i=p} < x, e_i >^2 \leq \|x\|^2$. *(**Inégalité de Bessel**).*

Preuve.
Soit $x \in E$.

1. D'après le théorème précédent, pour $y = \sum_{i=1}^{i=p} < x, e_i > e_i$, on a montré que $x - y \in F^{\perp}$ et comme $x = y + (x - y)$, alors $p_F(x) = y$. En particulier (puisque B est orthonormée) $\|p_F(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{i=p} < x, e_i >^2$.
2. On a, $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2 \Rightarrow \|p_F(x)\|^2 \leq \|x\|^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{i=p} < x, e_i >^2 \leq \|x\|^2$.

c.q.f.d. ∎

3.1.2 Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt est une méthode pratique qui permet d'obtenir une base orthonormée d'un espace euclidien E à partis de n'importe quelle autre de celui-ci.

Théorème 3.1.15
Soit E un espace euclidien. Si $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est une famille libre de E, alors, il existe une unique famille $\{e_1, \ldots, e_p\}$ (avec $p \leq n$) orthogonale (resp. une unique orthonormée) de vecteurs de E telle que :

(i) $Vect\{e_1, \ldots, e_p\} = Vect\{v_1, \ldots, v_p\}$.

(ii) $< e_k, v_k >> 0, \ \ \forall k \in [\![1, p]\!]$.

Preuve.
Notons $F = Vect\{v_1, \ldots, v_p\}$. Muni du produit scalaire induit $< \ , \ >_{|F}$, il devient aussi un espace euclidien. On raisonne alors par récurrence sur $p = \dim F$.

- Si $p = 1$, $F = Vect\{v_1\}$. Alors, $\{v_1\}$ est orthogonale (car $< v_1, v_1 >= \|v_1\|^2 \neq 0$) et pour $e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$, $\{e_1\}$ est l'unique orthonormée et $< e_1, v_1 >= \|v_1\| > 0$.

- Supposons que le résultat est acquis pour toute famille libre de $p-1$ vecteurs de E. On procède pour la famille $\{v_1, \ldots, v_p\}$ (avec $p \geq 2$) comme suit : Posons $H = Vect\{v_1, \ldots, v_{p-1}\}$. Par récurrence, il existe $\{e_1, \ldots, e_{p-1}\}$ orthogonale telle que (i) $H = Vect\{e_1, \ldots, e_{p-1}\}$ et (ii) $< e_k, v_k >> 0, \ \ \forall k \in [\![1, p-1]\!]$. Ensuite, F étant un espace euclidien et $v_p \in F = H \oplus H^{\perp}$, il existe donc un unique p-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1}, \lambda'_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $v_p = \sum_{i=1}^{i=p-1} \lambda_i e_i + \lambda'_p e'_p$ avec $H^{\perp} = Vect\{e'_p\}$ et $\lambda'_p \neq 0$. Ainsi $p_H(v_p) = \sum_{i=1}^{i=p-1} \lambda_i e_i$ et donc $e'_p = \frac{v_p - p_H(v_p)}{\lambda'_p}$. Posons alors

$$e_p = \frac{\lambda'_p}{\|v_p - p_H(v_p)\|} e'_p = \frac{v_p - p_H(v_p)}{\|v_p - p_H(v_p)\|}.$$

D'une part, il est claire que $F = Vect\{e_1, \ldots, e_p\}$ et que $\{e_1, \ldots, e_p\}$ est orthogonale car $\{e_1, \ldots, e_{p-1}, e'_p\}$ l'est. D'où (i).
D'autre part, on a :

$$< e_p, v_p >=< \frac{v_p - p_H(v_p)}{\|v_p - p_H(v_p)\|}, v_p >= \frac{1}{\|v_p - p_H(v_p)\|}(< v_p, v_p > - < v_p, p_H(v_p) >).$$

Or $< v_p, v_p >= \|v_p\|^2$ et $< v_p, p_H(v_p) >=< (v_p - p_H(v_p)) + p_H(v_p), p_H(v_p) >= \|p_H(v_p)\|^2$, par suite

$$< e_p, v_p >= \frac{1}{\|v_p - p_H(v_p)\|}(\|v_p\|^2 - \|p_H(v_p)\|^2).$$

Enfin, $\|v_p\|^2 = \|v_p - p_H(v_p)\|^2 + \|p_H(v_p)\|^2 \Rightarrow \|v_p\|^2 - \|p_H(v_p)\|^2 > 0$. Par suite, $< e_p, v_p >> 0$. D'où (ii). Il reste que, $\{e_1, \ldots, e_p\}$ est clairement orthonormée et qu'elle est unique par construction. ■

Corollaire 3.1.16
Soit E un espace euclidien. Alors,

1. *Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est une base quelconque de E, alors, elle définit une base orthonormée unique $\{e_1, \ldots, e_n\}$ (avec $p \leq n$) définie par :*

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}, \text{ et } e_p = \frac{v_p - \sum_{i=1}^{i=p-1} < e_i, v_p > e_i}{\|v_p - \sum_{i=1}^{i=p-1} < e_i, v_p > e_i\|}, \quad \forall p = 2, \ldots, n. \tag{3.1}$$

2. *Toute famille orthonormée de E peut être complétée en une base orthonormée de E.*
3. *E admet une base orthonormée.*

3.2 Deux types d'endomorphismes dans les espaces euclidiens

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Étant donné un endomorphisme $u : E \to E$, la matrice $M(u, B_0)$ dans la base canonique B_0 de E est diagonalisable, **ssi**, il existe une base B', formée des vecteurs propres de f, telle que $M(u, B') = P^{-1}M(u, B_0)P$ est diagonale. Si on applique Gram-Schmit à B', on obtient une base orthonormée B de E. La question naturelle est :

$M(u, B)$ reste-t-elle diagonale ?

La réponse n'est pas vraie en général car, les vecteurs de B ne sont plus nécessairement des vecteurs propres.

3.2.1 Opérateur adjoint

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$ un endomorphisme de E. On définit le transposé ${}^t u : E^* \to E^*$ de u par la relation :

$${}^t u(\varphi) = \varphi \circ u, \ \forall \varphi \in E^*.$$

Il est facile de vérifier que si B est une base de E alors

$$M({}^t u, B^*) = {}^t M(u, B).$$

On définit ensuite l'adjoint $u^* : E \to E$ de u par le diagramme commutative suivant :

$$\begin{array}{ccc} E^* & \xrightarrow{{}^t u} & E^* \\ I \uparrow & & I^{-1} \downarrow \\ E & \xrightarrow{u^*} & E. \end{array}$$

où $I = \widehat{<,>}$ désigne l'isomorphisme défini par $\forall x, y \in E, \ I(x)(y) =< x, y >$. Autrement dit :

$$u^* = I^{-1} \circ {}^t u \circ I.$$

Considérons alors <u>une base orthonormée</u> B de E. Ainsi, $M(I, B) =^t M(<, >, B) =^t I_n = I_n$ et par suite

$$M(u^*, B) = M({}^t u, B^*) =^t M(u, B).$$

Ceci est en concordance avec la définition générale (la plus répondue) de l'adjoint :

Définition 3.2.1
Soit E un espace pré-hilbertien réel et $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$ un endomorphisme de E. L'adjoint, s'il existe, de u est défini par :

$$\forall x, y \in E, \ < u(x), y >=< x, u^*(y) > . \tag{3.2}$$

Remarquer que si $v \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$ vérifie la même propriété que u^*, alors, $v = u^*$. En effet : $< x, u^*(y) >=< x, v(y) >\Rightarrow< x, u^*(y) - v(y) >= 0, \ \forall x \in E \Rightarrow u^*(y) - v(y) = 0 \Rightarrow u^*(y) = v(y), \ \forall y \in E \Rightarrow v = u^*$. Ainsi, u^* est bien définie (c. à. d. l'unique endomorphisme vérifiant (3.2)).

Vérifier que si $\dim E$ et finie, alors (3.2) entraine que dans une base orthonormée B, $M(u^*, B) =^t M(u, B)$.

Remarque 3.2.2
Dans une base non nécessairement orthonormée B', notons $M(<, >, B') = A$, on a alors,

$$M(u^*, B') = ({}^tA)^{-1} \, {}^tM(u, B') \, {}^tA =^t (AM(u, B')A^{-1}).$$

3.2.2 Endomorphismes symétriques

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.

Définition 3.2.3
Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$ est dit symétrique si :

$$< u(x), y >=< x, u(y) > \ \forall x, y \in E. \tag{3.3}$$

Proposition 3.2.4
Soit $u : E \to E$ une application de E dans E. Alors, u est un endomorphisme symétrique si et seulement si $< u(x), y >=< x, u(y) > \ \forall x, y \in E$.

Preuve.
Facile. ■

Théorème 3.2.5
Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$ et B une base orthonormée de E. Alors u est symétrique **ssi** $u^* = u$ **ssi** *$M(u, B)$ est symétrique.*

Preuve.
Facile. ■

Théorème 3.2.6
Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$ un endomorphisme symétrique. Alors

1. *Les sous espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux.*
2. *Le polynôme caractéristique de u est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.*
3. *u est diagonalisable et il existe une base orthonormée formée de vecteurs propres.*

Preuve.

1. Considérons $x, y \in E$ deux vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres λ et μ supposée différentes. On a alors $< u(x), y >=< x, u(y) >\Rightarrow< \lambda x, y >=< x, \mu y >\Rightarrow (\lambda - \mu) < x, y >= 0 \Rightarrow< x, y >= 0$. D'où $x \perp y$ et donc $E_\lambda \perp E_\mu$.
2. On considère polynôme caractéristique à coefficients dans $\mathbb{C}$ et on étend le produit scalaire $<,>: E \times E \to \mathbb{R}$ à $<,>: E \times E \to \mathbb{C}$ en posant en plus de la bilinéarité par rapport à l'addition et la linéarité par rapport à la première variable :

$$< x, \mu y >= \bar{\mu} < x, y >, \quad \forall x, y \in E, \mu \in \mathbb{C}.$$

$<,>$ ainsi étendu est appelé *forme sesquilinéaire hermitienne.*

Pour toute valeur propre λ de u, si x est un vecteur propre associé, alors $< u(x), y >= \lambda < x, x >$ et $< u(x), x >=< x, u(x) >= \bar{\lambda} < x, x >$ ce qui entraine (puisque $x \neq 0$) que $\lambda = \bar{\lambda}$ et par suite λ est un réel. Le polynôme caractéristique étant scindé dans $\mathbb{C}[X]$ (Puisque $\mathbb{C}$ est algébriquement clos) il en résulte qu'il est plutôt scindé dans $\mathbb{R}[X]$. En particulier u admet au moins une valeur propre.
3. On raisonne par récurrence sur n.

Si $n = 1$, c'est évident.

Supposons que c'est vrais pour tout espace euclidien F de dimension inférieur ou égale à $n - 1$ $(n \geq 2)$. On considère alors E, un espace euclidien de dimension n. D'après la propriété précédente, il existe un vecteur propre $\{b_1\}$ de u. On note alors $F = Vect\{b_1\}^\perp$ et on on utilise l'hypothèse de récurrence pour $u_{|F}$ qui est alors un endomorphisme symétrique sur l'espace euclidien F muni du produit scalaire induit. On obtient ainsi une base $\{b_2, \ldots, b_n\}$ formée de vecteurs propres de $u_{|F}$. Il est alors claire que $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ est une base de vecteurs propres de u. D'où u est diagonalisable.

Enfin, pour induire une base orthonormée formée de vecteurs propres, il suffit d'appliquer Gram-Schmidt à chaqu'une des bases des sous espace propre (les vecteurs ainsi obtenus sont encore des vecteurs propres) et utiliser (1) pour conclure.

■

3.2.3 Automorphisme ortogonaux

Une autre application du produit scalaire est l'étude des isométries vectorielles.

Définition 3.2.7

Soit E un espace euclidien. Un endomorphisme $u : E \to E$ préserve le produit scalaire de E si :

$$< u(x), u(y) >=< x, y >, \; \forall\, x, y \in E. \tag{3.4}$$

On a alors :

Théorème 3.2.8
Soit E un espace euclidien et $u : E \to E$ un endomorphisme de E. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *u préserve le produit scalaire de E.*
2. *u préserve la norme de E.*
3. *u préserve la distance dans E.*

Preuve.
Soient $x, y \in E$. On a successivement, (3.4) $\Rightarrow$ $\|u(x)\|^2 = \|x\|^2 \Rightarrow \|u(x)\| = \|x\| \Rightarrow \|u(x-y)\| = \|x-y\| \Rightarrow \|u(x)-u(y)\| = \|x-y\| \Rightarrow \|u(x)\| = \|x\|$. D'où (1) $\Rightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3). Ensuite, en appliquant l'une des identités de polarisation (Proposition 2.2.8) on obtient (2) $\Rightarrow$ (1). ∎

Définition 3.2.9
Soit E un espace euclidien. Tout endomorphisme $u : E \to E$ de E satisfaisant l'une des propriétés du théorème est dit endomorphisme orthogonal ou isométrie vectorielle (i.e. un endomorphisme qui préserve la métrique).

Proposition 3.2.10
Soit E un espace euclidien et $u : E \to E$ un endomorphisme de E. Soit B une base orthonormée de E et $A = M(u, B)$. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *u est orthogonal.*
2. *u est un automorphisme orthogonal.*
3. *${}^tAA = I_n$.*
4. *Pour toute base orthonormée $B' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ de E, $u(B') = \{u(e'_1), \dots, u(e'_n)\}$ est aussi orthonormée.*

Preuve.
-(1) $\Leftrightarrow$ (2) : Si u est orthogonal, alors ($\|u(x)\| = \|x\|$, $\forall x \in E$) entraine que u est injective et est donc bijective par finitude de la dimension de E.
- (1) $\Leftrightarrow$ (3) : Puisque B est orthonormée, la matrice de produit scalaire $M(< , >, B) = I_n$ et donc, ($\|u(x)\| = \|x\|$, $\forall x \in E$) équivaut (${}^tX({}^tAA)X =^t X(I_n)X$, $\forall X =^t x$). Mais, ${}^tAA$ étant symétrique, elle définie une forme bilinéaire symétrique qui a alors une écriture matricielle unique, donc (${}^tX({}^tAA)X =^t X(I_n)X$, $\forall X =^t x$) équivaut ${}^tAA = I_n$.
- (1) $\Leftrightarrow$ (4) : Soit $B' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ est une base orthonormée de E. En supposant (1), on a $< u(e'_i), u(e'_j) >=< e'_i, e'_j >= 0$, $\forall i \neq j \in [\![1, n]\!]$ et $< u(e'_i), u(e'_i) =< e'_i, e'_i >= 1$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$ et donc $u(B') = \{u(e'_1), \dots, u(e'_n)\}$ est aussi orthonormée. Réciproquement, supposons (4) et soit $B' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ est une base orthonormée de E telle que $u(B') = \{u(e'_1), \dots, u(e'_n)\}$ soit aussi orthonormée. On a donc, $\forall x = \sum_{i=1}^{i=n} x_i e'_1 \in E$, $\|u(x)\|^2 = \|\sum_{i=1}^{i=n} x_i u(e'_i)\| = \sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 = \|x\|^2$. Par suite, u conserve la norme et donc le produit scalaire. ∎

Proposition 3.2.11
Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$ un endomorphisme de E. Alors, u est orthogonal **ssi** $u^* \circ u = id_E$ **ssi** $u^* = u^{-1}$ **ssi** u^* *est orthogonal. En particulier, tout endomorphisme orthogonal est un automorphisme.*

Preuve.
u est orthogonal **ssi** $< u(x), u(y) >=< x, y >,\ \forall\, x, y \in E$ **ssi** $< x, u^* \circ u(y) >=< x, y >,\ \forall\, x, y \in E$ **ssi** $\forall x \in E,\ < x, u^* \circ u(y) - y >= 0,\ \forall y \in E$ **ssi** $\forall y \in E,\ < u^* \circ u(y) - y, x >= 0,\ \forall x \in E$ **ssi** $\forall y \in E,\ u^* \circ u(y) = y$ **ssi** $u^* \circ u = id_E$ **ssi** $u^* = u^{-1}$.
Pour la dernière équivalence, remarquer que $(u^*)^* = u$ (cf. TD) et donc $u^* \circ u = id_E$ **ssi** $u \circ u^* = id_E$ **ssi** $(u^*)^* \circ u^* = id_E$ **ssi** u^* est orthogonal. ■

Définition 3.2.12
Soit $A \in M(n, \mathbb{R})$ $(n \geq 1)$. A est une matrice orthogonale si ${}^tAA = I_n$.

En liaisons avec ce qui précède, on cite les propriétés équivalentes suivantes :

Proposition 3.2.13
Soit $A \in M(n, \mathbb{R})$ $(n \geq 1)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *A est une matrice orthogonale.*
2. *$A^{-1} = {}^tA$.*
3. *${}^tA$ est une matrice orthogonale.*
4. *A est la matrice d'un automorphisme orthogonal dans une base orthonormée.*
5. *Les vecteurs colonnes de A sont orthogonaux deux à deux.*
6. *Les vecteurs lignes de A sont orthogonaux deux à deux.*
7. *A est la matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée.*
   En particulier, toute matrice orthogonale est inversible.

Preuve.
- (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) sont évidentes.
Pour les autres équivalences, E étant euclidien, il admet une base orthonormée qu'on note $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Notons alors $e'_i = u(e_i)$ pour le i^{eme} vecteur colonne de A. Ainsi $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$, $A = M(u, B)$ et ${}^tA = M(u^*, B)$.
- ${}^tAA = I_n \Leftrightarrow u^* \circ u = id_E \Leftrightarrow$ u est orthogonal $\Leftrightarrow \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ est une base orthonormée. D'où (1) $\Leftrightarrow$ (4) $\Leftrightarrow$ (5) $\Leftrightarrow$ (7).
- (1) $\Leftrightarrow$ (6) : On a (1) $\Leftrightarrow$ (3) **ssi** les vecteurs colonnes de ${}^tA$ sont orthogonaux **ssi** les vecteurs lignes de A sont orthogonaux. ■

3.2.4 Groupe orthogonal

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.

Théorème 3.2.14
L'ensemble des automorphismes orthogonaux de E est un groupe, appelé **groupe orthogonal** *(ou groupe des isométries) de E. Il est noté $\mathcal{O}(E)$.*

Preuve.
Notons $GL(E)$ le groupe des automorphismes (ou groupe linéaire) de E.
$\mathcal{O}(E) \subseteq GL(E)$ et $\mathcal{O}(E) \neq \emptyset$ car Id_E est orthogonal. Ensuite, si u, v sont orthogonaux alors $\|u \circ v^{-1}(x)\| = \|v^{-1}(x)\|$ (car u conserve la norme) et $\|v^{-1}(x)\| = \|v \circ v^{-1}(x)\| = \|x\|$ (car v conserve la norme) et donc $u \circ v^{-1}$ est orthogonal. D'où, $\mathcal{O}(E)$ est un sous groupe de $GL(E)$. ■

Corollaire 3.2.15
$\mathcal{O}(E) = \mathcal{O}^+(E) \cup \mathcal{O}^-(E)$, où :

$$\mathcal{O}^+(E) = \{u \in \mathcal{O}(E) \mid \det(u) = +1\}$$

noté aussi $\mathcal{SO}(E)$ et appelé **groupe spécial orthogonal** *et*

$$\mathcal{O}^-(E) = \{u \in \mathcal{O}(E) \mid \det(u) = -1\}.$$

Preuve.
Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. On a alors $u^* \circ u = Id_E$ et donc, $\det(u^* \circ u) = \det({}^tAA) = \det(A)^2 = +1 \Rightarrow \det(u) = \pm 1$. Comme conséquence, $\det : (\mathcal{O}(E), \circ) \to (\{+1, -1\}, \times) \cong (\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}, +)$ est un homomorphisme de groupes.
D'une part, $\mathcal{O}^+(E) = (\det)^{-1}(\{1\})$, étant l'image réciproque d'un sous groupe, c'est aussi un sous groupe. D'une part, $\mathcal{O}^-(E) = (\det)^{-1}(\{-1\})$, n'étant pas image réciproque d'un sous groupe, c'est seulement un sous ensemble de $\mathcal{O}(E)$ (il n'est pas stable par la loi $\circ$). ■ Les éléments de $\mathcal{O}^+(E)$ sont aussi appelés **rotations vectorielles**. Remarquer que $\mathcal{O}(E)$ est en fait un sous groupe du groupe spécial linéaire $SP(E)\{u \in GL(E) \mid \det(u) = +1\}$.

Par analogie à ce qui précède, on a

Théorème 3.2.16

1. *L'ensemble des matrices orthogonales, noté $\mathcal{O}(n)$, est un sous groupe de $GL(n, \mathbb{R})$.*
2. *$\mathcal{O}(n) = \mathcal{O}^+(n) \cup \mathcal{O}^-(n)$, avec $\mathcal{SO}(n) = \{A \in \mathcal{O}(n) \mid \det(A) = +1\}$ est un sous groupe de $\mathcal{O}(n)$ et $\mathcal{O}^-(n) = \{u \in \mathcal{O}(n) \mid \det(u) = -1\}$.*

Définition 3.2.17
Soit B une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire usuel, et B_0 sa base canonique. La matrice de passage P de B_0 à B est alors orthogonale. On a alors :
• *B est dite une* **base orthonormée directe** *si $P \in \mathcal{O}^+(n)$.*
• *B est dite une* **base orthonormée indirecte** *si $P \in \mathcal{O}^-(n)$.*

3.2.5 Remarques finales

D'après ce qui précède, on a le résultat essentiel suivant

Théorème 3.2.18
Soit $A \in M(n, \mathbb{R})$. Alors,
il existe une matrice orthogonale $P \in M(n, \mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP$ soit diagonale **ssi** *A est symétrique.*

Preuve.
Dans un sens, noter que toute matrice diagonale est symétrique. L'autre sens est due au fait que toute matrice symétrique est diagonalisable et en plus il existe une base orthonormée formée de vecteurs propres qui et donc la matrice de passage de la base canonique à celle-ci est orthogonale (voir Théorème 3.2.6). ■

On termine par la détermination de générateurs particuliers de $\mathcal{O}(E)$.

Définition 3.2.19
Soit E un espace euclidien. On appelle réflexion, toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

Proposition 3.2.20
L'ensemble $\mathcal{O}^-(E)$ contient toutes les réflexions.

Preuve.
Soit H un hyperplan de E et x un vecteur orthogonal à H. Si B' est une base orthonormée de H, la matrice de $s_{|H}$ dans $\{x\} \cup B'$ est $Diag(-1, 1, \ldots, 1)$. Par conséquent $\det(s_{|H}) = -1$; c'est donc une réflexion. ■

Noter bien que $s_{|H}$ est à la fois orthogonale et symétrique (voir TD). On termine par le résultat intéressant suivant due à **Cartan-Dieudonné :**

Théorème 3.2.21
Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$ un endomorphisme orthogonal. Alors u s'écrit comme la composée d'au plus $r = rang(u)$ réflexions. En outre, $\mathcal{O}(E)$ est engendré par les réflexions.

Preuve.
A admettre. ■