Cours d'Analyse 2

Filière : MIP

Auteur : Khalid Boutahir

Établissement : Faculté des Science, Meknès

Année universitaire : 2024-2025

Table des matières

Chapitre 1 Formule de Taylor, Développement limité et applications **1**

1.1 Préliminaires . . . 1

1.2 Formules de Taylor . . . 3

1.3 Développements limités d'une fonction . . . 11

Chapitre 2 Intégrale de Riemann **28**

2.1 Fonctions en escalier . . . 29

2.2 L'intégrale de Riemann . . . 31

2.3 Familles de fonctions intégrables . . . 42

Chapitre 3 Calcul des primitives **48**

3.1 Théorème fondamental . . . 48

3.2 Méthodes d'intégration . . . 52

3.3 Intégration des fractions rationnelles . . . 55

Chapitre 4 Intégrales généralisées **60**

4.1 Introduction . . . 60

4.2 Intégrale généralisée (ou impropre) . . . 60

4.3 Critères de convergence . . . 63

Chapitre 1 Formule de Taylor, Développement limité et applications

Motivation

La formule de Taylor et les développements limités sont des outils essentiels en analyse mathématique, motivés par plusieurs besoins, parmi ces besoins on trouve :

- **Approximation des fonctions non polynomiales :** Les fonctions non polynomiales comme e^x, $ln(x)$, $sin(x)$ et $cos(x)$ sont difficiles à manipuler directement. La formule de Taylor permet de les remplacer localement par un polynôme d'ordre n, ce qui simplifie les calculs.
- **Étude locale des fonctions :** Le développement limité donne une approximation précise du comportement d'une fonction autour d'un point. Cela aide à comprendre les propriétés locales, comme les extrema, les points d'inflexion, ou les zéros.
- **Estimation de l'erreur :** Le reste de Taylor (terme d'erreur) permet de quantifier la différence entre la fonction et son approximation.

1.1 Préliminaires

1.1.1 Notation de Landau

Définition 1.1

On dit qu'une fonction f est négligeable (ou « infiniment petit ») devant une fonction g au voisinage de x_0, s'il existe une fonction ε définie sur un voisinage de x_0 telle que : $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ et $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.
Une façon parmi d'autres de noter que f est négligeable devant g au voisinage de x_0 est d'écrire

$$f \underset{x_0}{=} o(g) \text{ ou } f = o_{x_0}(g),$$

Dans le cas où g ne s'annule pas au voisinage de x_0, on a :

$$f \underset{x_0}{=} o(g) \text{ si et seulement si } \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Il est bien entendu que x_0 peut être un nombre ou l'infini. ♣

Propriété *Dans un voisinage de x_0 fini, on a les propriétés suivantes :*

$$\begin{aligned} o(x^n) + o(x^n) &= o(x^n); \qquad x^p.o(x^n) = o(x^{n+p}) \\ \lambda o(x^n) &= o(x^n); \qquad o(\lambda x^n) = o(x^n) \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ o(x^n).o(x^p) &= o(x^{n+p}); \end{aligned}$$

1.1.2 Fonctions équivalentes

Définition 1.2

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I, sauf éventuellement en x_0, $(x_0 \in \mathrm{I})$. On suppose que $g(x)$ et $f(x)$ ne s'annulent pas sur $\mathrm{I} - \{x_0\}$. On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de x_0 s'il existe une fonction h définie sur un voisinage V de x_0 telle que

$$\forall x \in V \setminus \{x_0\}, \quad f(x) = h(x)g(x) \quad \text{et } \lim_{x\to x_0} h(x) = 1.$$

Dans le cas où g ne s'annule pas au voisinage de x_0, alors

$$f \text{ et } g \text{ sont équivalentes au voisinage de } x_0 \iff \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

♣

Notation 1 : Si f et g sont équivalentes au voisinage de x_0 alors on note : $f \underset{x_0}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$ ou $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$.

Exemple 1.1 La fonction $\sin x$ est équivalente à x au voisinage de 0, car $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Note *On peut définir de la même manière la notion de fonctions équivalentes au voisinage de ∞.*

$$f \underset{\infty}{\sim} g \quad ou \quad f(x) \underset{x \to \infty}{\sim} g(x).$$

Exemple 1.2 La fonction $g(x) = x^4 - x^2 + 1$ est équivalente à x^4 au voisinage de $+\infty$, car

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^4} = 1$$

Propriété

- *Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $g \underset{x_0}{\sim} h$, alors $f \underset{x_0}{\sim} h$;*
- *Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ alors $hf \underset{x_0}{\sim} hg$*
- *Si $f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2$ alors $f_1 f_2 \underset{x_0}{\sim} g_1 g_2$ et $\frac{f_1}{f_2} \underset{x_0}{\sim} \frac{g_1}{g_2}$.*

Remarque La relation $\sim$ est une relation d'équivalence, c'est-à-dire que cette relation est réflexive, symétrique et transitive.

Remarque Les équivalents ne s'additionnent pas. Par exemple on a

$$x + x^3 \underset{x \to 0}{\sim} x \quad ; \quad x \underset{x \to 0}{\sim} x - x^2$$

si on soustrait :

$$x + x^3 - x \underset{x \to 0}{\sim} x - (x - x^2)$$

donc $\quad x^3 \underset{x \to 0}{\sim} x^2$ ce qui est impossible ! Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3}{x^2}$?

Exemple 1.3 Quelques équivalences usuels au voisinage de 0

$\sin x \sim x$,	$\arcsin x \sim x$,	$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$,	$\arctan x \sim x$
$\tan x \sim x$,	$e^x - 1 \sim x$,	$\ln(1 + x) \sim x$,	$\cosh(x) \sim 1 + \frac{x^2}{2}$

En effet,

- $e^x - 1 \sim x$ car

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = e^0 = 1$$

- $\arcsin x \sim x$ car

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x - \arcsin 0}{x - 0} = \arcsin'(0) = \frac{1}{\sqrt{1 - 0^2}} = 1$$

- Pour la preuve du reste on peut utiliser la règle de L'Hospital.

1.1.3 Applications au calcul des limites

Les équivalences de fonctions permettent de simplifier des expressions complexes et de calculer des limites indéterminées.

Proposition 1.1

Si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$ et $f \underset{x_0}{\sim} g$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

Remarque Lors de la recherche de limites on peut (quand c'est possible) remplacer une fonction par son équivalent avant de passer à la limite.

Exemple 1.4 Calcul de $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x}$:

On sait que $\sin x \underset{0}{\sim} x$, d'où

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x - x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{0}{x} = 0$$

Exemple 1.5 Calcul de $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$:

Au voisinage de 0, on a les équivalences : $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ et $\sin x \sim x$ et donc $\sin^2 x \sim x^2$. D'où

$$\frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} \underset{0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}$$

et donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2}$$

Remarque Attention !

1. $x \underset{+\infty}{\sim} x + 1$ mais e^x non $\sim e^{x+1}$
2. $1 + x \underset{0}{\sim} 1 - x$ mais $\ln(1 + x)$ non $\sim \ln(1 - x)$

1.2 Formules de Taylor

Parfois, analyser une fonction peut être très difficile. Une méthode très utile et couramment utilisée pour faciliter ce travail consiste à approximer la fonction en question par des polynômes, car ce sont les fonctions réelles les plus faciles à évaluer. Lorsque nous utilisons cette méthode, nous perdons évidemment en exactitude, mais nous gagnons en opérabilité.

Nous pouvons distinguer deux types d'approximations de fonctions par des polynômes : locales et globales. Les premières sont celles où le polynôme que nous construisons coïncide avec la fonction en un seul point et ne nous servira que pour des valeurs proches, car à mesure que nous nous éloignons, il est probable que le polynôme et la fonction divergent de plus en plus. Les approximations globales, en revanche, sont celles où le polynôme et la fonction coïncident sur tout un intervalle. Nous construirons le polynôme de Taylor, qui est une approximation locale d'une fonction qui coïncide avec toutes ses dérivées.

1.2.1 Rappels et préliminaires

- **Formule de Taylor pour un polynôme** : Rappelons que tout polynôme de degré n

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

peut s'écrire en puissance de $(x - a)$ sous la forme :

$$p(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \cdots + c_n(x - a)^n$$

Les coefficients c_i sont tels que

$$p(x) = p(a) + \frac{p'(a)}{1!}(x - a) + \frac{p''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

- Soit f une fonction définie sur un voisinage de a :$]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$. Rappelons que l'approximation linéaire de f au voisinage de a est donnée par :

$$f(x) \underset{a}{\sim} P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

- L'approximation quadratique de f au voisinage de a est donnée par :

$$f(x) \underset{a}{\sim} P_2(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

L'objectif dans la suite de cette section est la recherche d'un polynôme $P(x)$ de degré n qui approche le mieux $f(x)$ au voisinage d'un point donné.

Polynôme de Taylor

Définition 1.3

Étant donnée une fonction f dérivable $n-1$ fois dans un intervalle I et un point $a \in I$ où $f^{(n-1)}$ est dérivable,

- *Le polynôme*

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

  *est appelé **polynôme de Taylor de degré n de f au point** a.*
- *Dans le cas où $a = 0$ le polynôme*

$$P(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

  *est appelé **polynôme de Maclaurin d'ordre n associé à f au point** $x = 0$.*

♣

Exemple 1.6 Le polynôme de Maclaurin de $\ln(1+x)$ à l'ordre n est :

$$p(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}.$$

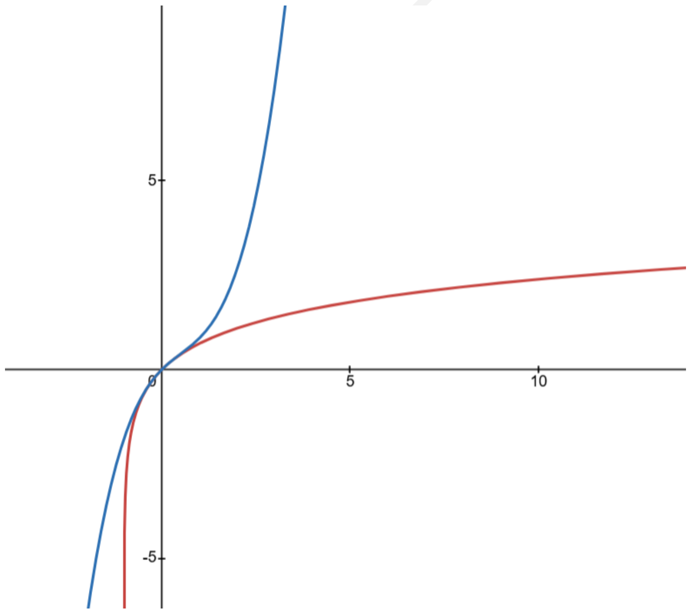

Figure 1.1 – $f(x) = \ln(x+1)$ et son polynôme de Taylor de degré 3 au voisinage de $x = 0$, $P(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

Définition 1.4

Soit f une fonction n fois dérivable dans un intervalle I et soit $x_0 \in I$. Le reste de Taylor d'ordre n de la fonction f au point x_0 est :

$$R(x) = f(x) - P(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$$

♣

Remarque Le terme du reste peut également être vu comme l'erreur d'approximation de f par $P(x)$.

1.2.2 Approximation d'une fonction par le polynôme de Taylor

Proposition 1.2 (Existence et unicité du polynôme de Taylor)

Soit f une fonction n fois dérivable au point x_0, alors il existe un unique polynôme $P(x)$ de degré inférieur ou égal à n vérifiant : $P(x_0) = f(x_0)$, $P'(x_0) = f'(x_0)$, ..., $P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$. Ce polynôme est le polynôme de Taylor de degré n de f au point x_0.

Démonstration Comme $\{1, (x-x_0), (x-x_0)^2, \ldots, (x-x_0)^n\}$ est une base de l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n, on peut écrire tout polynôme de degré inférieur ou égal à n de manière unique comme :

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$

Pour montrer qu'il n'existe qu'un seul polynôme vérifiant les conditions de la proposition, on va montrer que les coefficients de $P(x)$ peuvent être déterminés de manière unique en appliquant les conditions mentionnées précédemment. On a $P(x_0) = a_0$ et on veut que $P(x_0) = f(x_0)$, donc $a_0 = f(x_0)$. En calculant la dérivée de $P(x)$, on obtient :

$$P'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1}$$

et en appliquant la condition $P'(x_0) = f'(x_0)$, on a $a_1 = f'(x_0)$.

On procède de même pour la deuxième dérivée et on obtient $a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}$.

Successivement, on aura $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ pour $k = 0, \ldots, n$.

Par conséquent, il existe un unique polynôme vérifiant les conditions qu'on a demandé, et c'est :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

qui est le polynôme de Taylor de degré n de f au point x_0. □

Note *Ce résultat signifie qu'au voisinage de $x = x_0$, le polynôme de Taylor $P(x)$ d'ordre n est une bonne approximation de la fonction $f(x)$ c-à-d :*

$$f(x) \underset{x_0}{\sim} f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Remarque Les polynômes de Taylor permettent d'approcher beaucoup de fonctions par des fonctions polynômes simples.

1. Si $n = 1$, on retrouve l'approximation linéaire.
2. Si $n = 2$, on retrouve l'approximation quadratique.

Exemple 1.7 Déterminons le polynôme de Taylor d'ordre 4 au voisinage de a $= 0$ associé à $f(x) = e^x$.

D'après la formule de Taylor on a :

$$e^x \underset{0}{\sim} P(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4$$

comme $f'(x) = e^x, f''(x) = e^x, \ldots, f^{(4)}(x) = e^x$, et donc $f'(0) = 1, f''(0) = 1, \ldots, f^{(4)}(0) = 1$, on a :

$$e^x \underset{0}{\sim} P(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

Ci-dessous, sur la même figure, les graphes des fonctions :

- e^x,
- $1 + \frac{x}{1!}$: approximation linéaire,
- $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}$: approximation quadratique,
- $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$: approximation d'ordre 3
- $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$: approximation d'ordre 4.

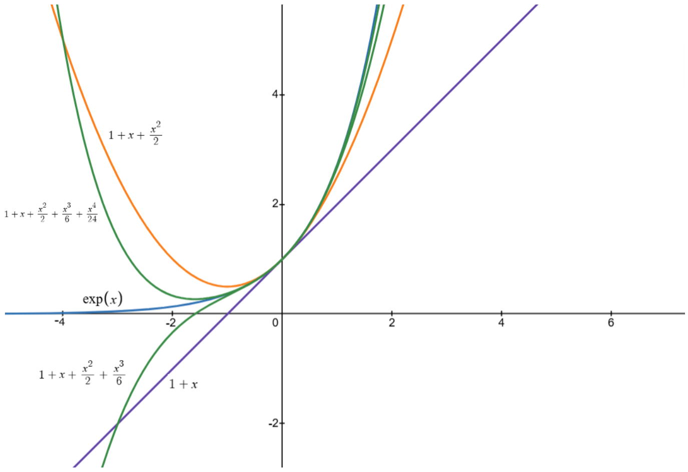

Figure 1.2

Remarquons que les courbes coïncident au voisinage de 0.

Exercice 1.1 Déterminer le polynôme de Taylor d'ordre 3 au voisinage de $a = 0$ associé à $f(x) = \sin x$.

Solution *D'après la formule de Taylor on a :*

$$P(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3$$

Comme

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sin x & f(0) = 0 \\ f'(x) = \cos x & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\sin x & f''(0) = 0 \\ f^{(3)}(x) = -\cos x & f^{(3)}(0) = -1 \end{array}$$

On a donc

$$\sin x \underset{a}{\sim} P(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

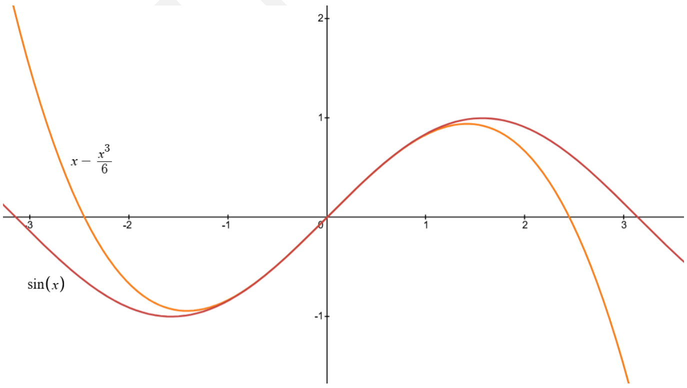

Figure 1.3 – Courbes de $\sin x$ et de $P(x) = x - \frac{x^3}{3!}$

Remarquons que les deux courbes coïncident au voisinage de 0.

Exercice 1.2 Déterminer le polynôme de Taylor d'ordre 4 au voisinage de $a = 0$ associé à $f(x) = \cos x$.

Solution *D'après la formule de Taylor on a :*

$$P(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3$$

Comme

$$\begin{array}{ll} f(x) = \cos x & f(0) = 1 \\ f'(x) = -\sin x & f'(0) = 0 \\ f''(x) = -\cos x & f''(0) = -1 \\ f^{(3)}(x) = \sin x & f^{(3)}(0) = 0 \\ f^{(4)}(x) = \cos x & f^{(4)}(0) = 1 \end{array}$$

On a donc

$$\cos x \underset{0}{\sim} P(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

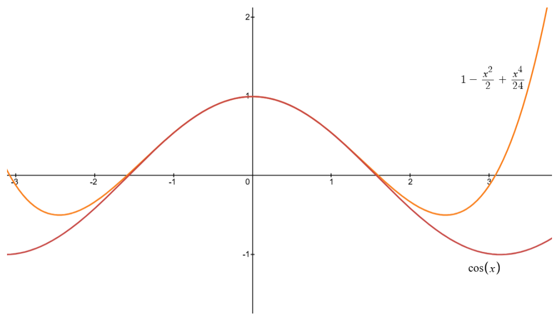

Figure 1.4 – Courbes de $\cos x$ et de $P(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$

Remarquons que les deux courbes coïncident au voisinage de 0*.*

1.2.3 Opérations sur les polynômes de Taylor

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$. Comment obtenir le polynôme de Taylor de $f+g$, de fg, de $\frac{f}{g}$ et $f \circ g$, à partir de ceux de f et g ?

Proposition 1.3

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, et soit $x_0 \in I$. Soit P (resp. Q) le polynôme de Taylor de f (resp. g) à l'ordre n au point x_0. Alors

1. *Le polynôme de Taylor de $f+g$ à l'ordre n en x_0 est $P+Q$.*
2. *Le polynôme de Taylor de fg à l'ordre n en x_0 est PQ tronqué en degré n.*
3. *Si $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de x_0 et le polynôme de Taylor de $\frac{f}{g}$ est le quotient de P par Q selon les puissances croissantes à l'ordre n.*

Démonstration Évidente d'après l'unicité du polynôme de Taylor associé à une fonction. □

Remarque

1. PQ est un polynôme de degré au plus $2n$, son *tronqué en degré n* est le polynôme obtenu en supprimant tous les termes de degré strictement supérieur à n.
2. La *division selon les puissances croissantes* de P par Q à l'ordre n est définie comme suit : si $Q(0) \neq 0$, alors il existe un unique couple (A, B) de polynômes tel que l'on ait
$$P(X) = Q(X)A(X) + X^{n+1}B(X) \quad \text{avec} \quad \deg(A) \leq n$$
On dit que A est le quotient de P par Q selon les puissances croissantes à l'ordre n et que B est le reste.
Cette division, contrairement 'a la division euclidienne des polynômes (que l'on appelle aussi division selon les puissances décroissantes), a pour effet d'augmenter le degré du reste, au lieu de le diminuer. Ainsi, il n'y a pas une seule division selon les puissances croissantes, il y en a une pour chaque ordre n. Plus n augmente, plus le degré du quotient et du reste augmentent.

Exemple 1.8 Le polynôme de Taylor à l'ordre 3 en 0 pour $\sin(x)$ est

$$P(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

et pour $\ln(1+x)$

$$Q(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

d'où l'on déduit :

a) Le polynôme de Taylor à l'ordre 3 en 0 pour la différence est

$$P(x) - Q(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2}$$

b) Le polynôme de Taylor à l'ordre 3 en 0 pour le produit est

$$\begin{aligned} P(x)Q(x) &= \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) \\ &= x^2 - \frac{x^3}{2} \end{aligned}$$

Proposition 1.4

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ telles que $f(I) \subseteq J$, et soit $x_0 \in I$. Soit P le polynôme de Taylor de f à l'ordre n au point x_0, et Q le polynôme de Taylor de g à l'ordre n au point $f(x_0)$. Alors le polynôme de Taylor de $g \circ f$ à l'ordre n au point x_0 est le polynôme composé $Q \circ P$ tronqué en degré n. ♠

1.2.4 Formule de Taylor Lagrange

Définition 1.5 (Rappel)

On dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I si f est n-fois dérivable et la dérivée n-ième, $f^{(n)}$, est continue sur I.
On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I pour tout n. ♣

Théorème 1.1 (Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n)

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et soit f une fonction réelle de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[a, b]$ et admettant sur $]a, b[$ une dérivée d'ordre $n + 1$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f^{(2)}(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c) \\ &= f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c) \end{aligned}$$

Le terme $\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$ est appelé le reste de Lagrange d'ordre n. ♡

Remarque Pour $n = 0$, ce théorème est exactement la formule des accroissements finis.

Démonstration Considérons la fonction ϕ définie sur $[a, b]$ par

$$\phi(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!}f^{(k)}(x)$$

La fonction ϕ est continue sur $[a, b]$, puisque f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[a, b]$. Comme f admet une dérivée d'ordre $(n + 1)$ sur $]a, b[$, la fonction ϕ est dérivable sur $]a, b[$. De plus pour tout $x \in]a, b[$, on a

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= f'(x) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{-k(b-x)^{k-1}}{k!}f^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^k}{k!}f^{(k+1)}(x) \right) \\ &= f'(x) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{-(b-x)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^k}{k!}f^{(k+1)}(x) \right) \\ &= \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x) \end{aligned}$$

Posons $\psi(x) = \frac{-(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$. La fonction ψ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Donc, d'après le théorème des accroissements finis généralisés, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{\phi(b) - \phi(a)}{\psi(b) - \psi(a)} = \frac{\phi'(c)}{\psi'(c)}$$

.

Or $\phi'(c) = \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)\psi'(x)$, on obtient donc

$$\frac{\phi(b) - \phi(a)}{\psi(b) - \psi(a)} = \frac{\phi'(c)}{\psi'(c)} f^{(n+1)}(c).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\phi(b) - \phi(a) &= (\psi(b) - \psi(a))\, f^{(n+1)}(c)\\ &= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)\end{aligned}$$

ce qui montre que

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

□

Note *Un tel nombre c est souvent désigné par $a + \theta(b-a)$ avec $\theta \in]0, 1[$.*

Cas particulier : Lorsque $a = 0$, et en posant $b = x$, on obtient la formule dite de **Mac-Laurin** :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \quad (0 < \theta < 1).$$

Exemple 1.9

- La fonction $x \longmapsto f(x) = \exp(x)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et l'on a $f^{(k)}(x) = \exp(x)$ pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$. Donc pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, il existe un nombre réel c entre 0 et x tel que

$$\exp(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \exp(c)$$

- La fonction $x \longmapsto f(x) = \sin(x)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et l'on a $f^{(k)}(x) = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$ pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, et pour $x = 0$, on a $f^{(k)}(0) = \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$, donc,

$$f^{(2k)}(0) = \sin^{(2k)}(0) = \sin(2k\pi/2) = 0$$

et

$$f^{(2k+1)}(0) = \sin^{(2k+1)}(0) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \cos(k\pi) = (-1)^k$$

et

$$\sin\left(c + \frac{(2k+2)\pi}{2}\right) = (-1)^{k+1}\sin(c).$$

Par conséquent, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ avec $n = 2p+1$, il existe un nombre réel c entre 0 et x tel que

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + (-1)^{p+1} \frac{x^{2p+2}\sin(c)}{(2p+2)!}$$

- De même pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ avec $n = 2p$, il existe un nombre réel c entre 0 et x tel que

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + (-1)^{p+1} \frac{x^{2p+1}\cos(c)}{(2p+1)!}$$

1.2.5 Formule de Taylor-Young

Théorème 1.2

Soit $f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ et soit $a \in I$. Alors il existe une fonction réelle ε définie sur un voisinage de a telle que

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x) \textit{ avec } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$$

- *Partie principale :*

$$f(a) + (x-a)f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

- *Reste de Young :*

$$o((x-a)^n) = (x-a)^n \varepsilon(x) \quad \textit{avec } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$$

♡

Cas particulier : Pour $a = 0$, on obtient la formule de **Mac-Laurin avec reste de Young**

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^n \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Exemple 1.10 En prenant $a = 0$ dans la formule de Taylor avec reste Young on obtient les formules suivantes :

1. $\exp(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} + x^n \varepsilon(x)$.
2. $\cosh(x) = 1 + \sum_{k=1}^{p} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2p+1} \varepsilon(x)$.
3. $\sinh = \sum_{k=0}^{p} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2p+2} \varepsilon(x)$.
4. $\sin(x) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2p+2} \varepsilon(x)$.
5. $\cos(x) = 1 + \sum_{k=1}^{p} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2p+1} \varepsilon(x)$.

1.2.6 Applications

Extremums relatifs de fonctions

Soit f une fonction $n-1$ fois dérivable dans un intervalle I et soit $x_0 \in I$. Supposons également que f est n fois dérivable en x_0 avec $f^{(k)}(x_0) = 0$ pour $0 \leq k < n$ et $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Alors, le polynôme de Taylor de f au voisinage de x_0 est :

$$P(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

et

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

On peut observer que, puisque $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, lorsque x est très proche de x_0, le signe de $f(x) - f(x_0)$ dépend de la parité de n et du signe de $f^{(n)}(x_0)$. Formellement, nous dirions qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ est inclus dans I et

$$|x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} f^{(n)}(x_0) \geq 0$$

Par conséquent, nous avons trois cas possibles :

a) Si n est pair et $f^{(n)}(x_0) > 0$, alors $\forall x \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$, $f(x) \geq f(x_0)$ et f a un minimum relatif en x_0.
b) Si n est pair et $f^{(n)}(x_0) < 0$, alors $\forall x \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$, $f(x) \leq f(x_0)$ et f a un maximum relatif en x_0.
c) Si n est impair, alors f n'a aucun extremum relatif en x_0. Si $f^{(n)}(x_0) > 0$, f est strictement croissante en x_0. Mais si $f^{(n)}(x_0) < 0$, f est strictement décroissante en x_0.

Proposition 1.5

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction indéfiniment dérivable et $x_0 \in I$, et soit n le plus petit entier non nul tel que $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Alors on a :

*(a) Si n est pair et $f^{(n)}(x_0) < 0$, alors f admet un **maximum relatif** au point x_0.*

*(b) Si n est pair et $f^{(n)}(x_0) > 0$, alors f admet un **minimum relatif** au point x_0.*

(c) Si n est impair, alors f n'admet pas d'extremum relatif au point x_0.

Allure d'une courbe au voisinage d'un point

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction indéfiniment dérivable et $x_0 \in I$. On se propose d'étudier la position de la courbe C_f par rapport à la tangente T_{x_0} à cette courbe au point x_0. l'équation de T_{x_0} est donné par :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Soit n le plus petit entier supérieur ou égal à 2 tel que $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. On a alors 4 cas :

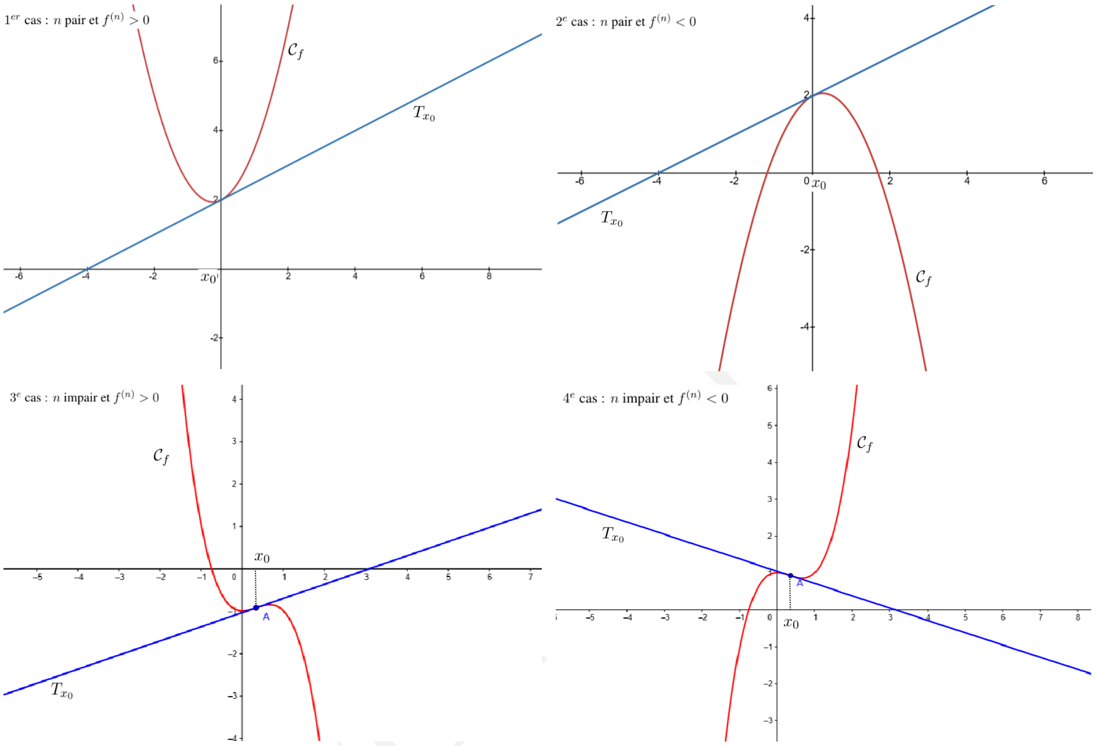

Figure 1.5

1.3 Développements limités d'une fonction

1.3.1 Développements limités

Un développement limité est une approximation polynomiale d'une fonction au voisinage d'un point x_0, (développement limité en x_0).

Définition 1.6 (Développement limité)

*Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$. On dit que f admet un **développement limité** au voisinage de x_0 à l'ordre n, (qu'on note $DL_n(x_0)$), s'il existe $n+1$ réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et une fonction ε définie sur I tels que pour tout $x \in I$*

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

- *$P_n = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n$ est la **partie régulière** (ou **partie principale**) de f,*

- $o((x-x_0)^n) = (x-x_0)^n\varepsilon(x)$ *avec* $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$ *est le* ***reste*** *à l'ordre* n.

Autre formulation : *en posant* $h = x - x_0$,

$$f(x_0+h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n + o(h^n).$$

On peut également définir des développements limités à droite et à gauche en x_0.

Remarque

1. Si $x_0 = 0$ le DL au voisinage de 0 s'écrit : $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n) = P_n(x) + o(x^n)$.
2. La notion du DL en x_0 à l'ordre n permet d'approcher une fonction par un polynôme de degré au plus n.

Proposition 1.6

Si f admet un DL à l'ordre n au voisinage de x_0, c-à-d, $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$, *alors les coefficients a_i sont uniques,*

Démonstration Par identification. □

Proposition 1.7

Si f est une fonction paire (resp. impaire) qui possède un développement limité à l'ordre n en 0, alors la partie principale ne contient que des puissances paires (resp. impaires) de la variable x. C-à-d, si

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n),$$

alors

1. *si en plus f est paire, alors* $a_1 = a_3 = \cdots = a_{2k+1} = \cdots = 0$,
2. *si en plus f est impaire, alors* $a_0 = a_2 = \cdots = a_{2k} = \cdots = 0$.

Démonstration En effet, soit $f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x)$ le développement limité de f à l'ordre n en 0.

- Si f est paire : Posons $\phi(x) = f(x) - f(-x)$, on a : $\phi(x) = P(x) - P(-x) + x^n\varepsilon(x) - (-1)^n x^n \varepsilon(-x)$. Soit $Q(x) = P(x) - P(-x)$ et $\varepsilon_1(x) = \varepsilon(x) - (-1)^n\varepsilon(-x)$
$$\phi(x) = Q(x) + x^n\varepsilon_1(x), \quad \text{avec } \deg Q \le n \text{ et } \lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = 0, \tag{1.1}$$
(1.1) est donc le développement limité de ϕ à l'ordre n en 0, mais comme $\phi = 0$ on a aussi $\phi(x) = 0 + x^n \times 0$, on actionne le théorème d'unicité : $Q = 0$ et donc le polynôme P est pair, et par suite $a_1 = a_3 = \ldots = a_{2k+1} = 0$
- Si f est impaire : De la même façon que le premier cas.

□

Proposition 1.8

Si f admet un développement limité à l'ordre n alors f admet un DL à l'ordre m pour tout $m \le n$.

Démonstration Évident. □

Remarque Si f est un polynôme, f admet un DL à l'ordre n (pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Exemple 1.11 Soit $f(x) = 1 + 2x + 7x^5$

1. DL à l'ordre 4 : $f(x) = 1 + 2x + o(x^4)$
2. DL à l'ordre 9 : $f(x) = 1 + 2x + 7x^5 + o(x^9)$

Théorème 1.3 (Taylor-Young)

Si f est n fois dérivable au voisinage de x_0, alors :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

Autre formulation : *En posant $h = x - x_0$,*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + o(h^n)$$

♡

Théorème 1.4 (Maclaurin)

Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $]-\alpha, \alpha[$ alors :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + x^n\frac{f^{(n)}(0)}{n!} + o(x^n)$$

♡

Remarque La formule de Taylor (resp. la formule de Maclaurin) donne un procédé commode pour obtenir le DL en x_0 (respectivement en 0) des fonctions usuelles.

1.3.2 Développements limités des fonctions usuelles

DL de $f(x) = e^x$ au voisinage de 0

On sait que $f^{(n)}(x) = e^x$ ce qui donne $f^{(n)}(0) = 1$. D'où le DL de e^x à l'ordre n :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$$

DL de $\sin x$ et $\cos x$ au voisinage de 0

- DL de $f(x) = \sin x$:

$$f^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2}), \quad \text{donc} \quad f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 \text{ si } n = 2p \\ (-1)^p \text{ si } n = 2p+1 \end{cases}$$

d'où

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^p\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1})$$

- DL de $g(x) = \cos x$:
De la même manière que ci-dessus, on obtient

$$g^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2}), \quad \text{donc} \quad g^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^p \text{ si } n = 2p \\ 0 \text{ si } n = 2p+1 \end{cases}$$

d'où

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p})$$

DL de $(1+x)^\alpha$ au voisinage de 0

En prenant $f(x) = (1+x)^\alpha, \quad (\alpha \in \mathbb{Q})$ on a

$$\begin{array}{ll} f(x) = (1+x)^\alpha, & f(0) = 1 \\ f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, & f'(0) = \alpha \\ f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, & f''(0) = \alpha(\alpha-1) \\ \vdots & \\ f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}, & f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-(n-1)) \end{array}$$

d'où

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n+o(x^n)\\ &= 1+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\cdots+\binom{\alpha}{n}x^n+o(x^n)\end{aligned}$$

Cas particuliers

- Si $\alpha=-1$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n)$$

- En remplaçant x par $-x$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+o(x^n)$$

- Si $\alpha=2$, $n\geq 2$:

$$(1+x)^2=1+2x+x^2+o(x^2)$$

Autres développements limités usuels Au voisinage de 0

$$\begin{aligned}
\arctan x &= x-\tfrac{x^3}{3}+\tfrac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n\tfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+2}\right)\\
\arcsin x &= x+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{x^3}{3}+\tfrac{1.3}{2.4}\cdot\tfrac{x^5}{5}+\cdots+\tfrac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2.4\cdot 6\ldots(2n)}\tfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+2}\right)\\
\ln(1+x) &= x-\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\tfrac{x^n}{n}+o\left(x^n\right)\\
\sinh x &= x+\tfrac{x^3}{3!}+\tfrac{x^5}{5!}+\cdots+\tfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right)\\
\cosh x &= 1+\tfrac{x^2}{2!}+\tfrac{x^4}{4!}+\cdots+\tfrac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n+1}\right)\\
\arg\sinh x &= x-\tfrac{1}{2}\tfrac{x^3}{3}+\tfrac{1.3}{2.4}\tfrac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n\tfrac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\tfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+2}\right)\\
\arg\tanh x &= x+\tfrac{x^3}{3}+\tfrac{x^5}{5}+\cdots+\tfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+2}\right)\\
\tanh x & \quad x-\tfrac{x^3}{3}+\tfrac{2x^5}{15}+o\left(x^6\right)
\end{aligned}$$

1.3.3 Opérations sur les développements limités

Proposition 1.9 (Dérivation des développements limités)

Soit f une fonction indéfiniment dérivable sur un intervalle ouvert I contenant a. Alors, si f admet au voisinage de a un développement limité d'ordre n, $\forall n\in\mathbb{N}$, $f(a+h)=\sum_{k=0}^n b_k h^k+\underset{h\to 0}{o}(h^n)$, alors

$$f'(a+h)=\sum_{k=1}^n k b_k h^{k-1}+\underset{h\to 0}{o}\left(h^{n-1}\right).$$

♠

Proposition 1.10 (Intégration des développements limités)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I contenant a, dont la dérivée admet un développement limité d'ordre n, soit :

$$f'(t)=b_0+b_1(t-a)+\cdots+b_n(t-a)^n+o\left((t-a)^n\right).$$

Alors f admet, au voisinage de a, le développement limité d'ordre $n+1$ suivant :

$$f(t)=f(a)+b_0(t-a)+b_1\frac{(t-a)^2}{2}+\cdots+b_n\frac{(t-a)^{n+1}}{n+1}+o\left((t-a)^{n+1}\right).$$

♠

Exemple 1.12 Chercher le DL de $f(x)=\ln(1+x)$ au voisinage de 0 à l'ordre $(n+1)$.

Donnons d'abord le DL de $\frac{1}{1+x}$ à l'ordre n

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n+o\left(x^n\right)$$

en intégrant des deux côtés, on obtient

$$\ln(1+x)=f(0)+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+o\left(x^{n+1}\right)$$

or $f(0)=\ln(1+0)=0$ d'où

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+o\left(x^{n+1}\right)$$

Exemple 1.13 DL de $\arcsin x$ à l'ordre n :

$$\begin{aligned}(1-u)^{-\frac{1}{2}}=&1+\left(-\frac{1}{2}\right)(-u)+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)(-u)^2+\cdots\\&+\frac{1}{n!}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)(-u)^n+o\left(u^n\right)\\=&1+\frac{1}{2}u+\frac{1.3}{2.4}u^2+\cdots+\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)}u^n+o\left(u^n\right)\end{aligned}$$

On remplace u par x^2 et on intègre pour obtenir le développement limité de $\arcsin x$ au voisinage de 0 .

Proposition 1.11 (Addition)

Si f et g admettent un développement limité au voisinage de 0, à l'ordre n, alors $(f+g)$ admet aussi un développement limité au voisinage de 0, à l'ordre n, et ce DL s'obtient en additionnant les deux polynômes, c-à-d, si

$$f(x)=p_n(x)+o\left(x^n\right)\quad \text{et}\quad g(x)=q_n(x)+o\left(x^n\right)$$

alors

$$(f+g)(x)=[p_n(x)+q_n(x)]+o\left(x^n\right)$$

Exemple 1.14

- DL de $\cosh x$ au voisinage de 0. Notons que

$$2\cosh x=e^x+e^{-x}=f(x)+g(x)$$

$$\begin{aligned}e^x&=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right)\\e^{-x}&=1+\frac{-x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^n}{n!}+o\left(x^n\right)\end{aligned}$$

donc

$$2\cosh x=e^x+e^{-x}=2+2\frac{x^2}{2!}+\cdots+2\frac{x^{2p}}{(2p)!}+o\left(x^{2p}\right)$$

d'où

$$\cosh x=1+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2p}}{(2p)!}+o\left(x^{2p}\right)$$

- DL de $\sinh x$ au voisinage de 0. De la même manière que ci-dessus, on obtient :

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o\left(x^{2p+1}\right)$$

Proposition 1.12 (Multiplication)

Si f et g admettent un développement limité au voisinage de 0, à l'ordre n, alors fg admet aussi un développement limité au voisinage de 0, à l'ordre n. Il s'obtient en multipliant les deux polynômes et en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n, c-à-d, si

$$f(x) = p_n(x) + o\left(x^n\right) \quad \text{et} \quad g(x) = q_n(x) + o\left(x^n\right)$$

alors

$$(f \cdot g)(x) = \left[p_n(x) \cdot q_n(x)\right] + o\left(x^n\right).$$

Exemple 1.15 Cherchons le DL à d'ordre 4 au voisinage de 0 de $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$.

On a $f(x) = e^x \cdot \frac{1}{1+x}$. Ainsi le DL de $f(x)$ s'obtient à partir des DL de e^x et de $\frac{1}{1+x}$.

On a

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^4\right) \\ \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o\left(x^4\right) \end{aligned}$$

donc

$$e^x \cdot \frac{1}{1+x} = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right)\left(1 - x + x^2 - x^3 + x^4\right) + o\left(x^4\right)$$

On fait le produit des deux polynômes ci-dessus et on ne garde que les termes de puissance ≤ 4. D'où

$$\frac{e^x}{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{8}x^4 + o\left(x^4\right)$$

Proposition 1.13 (Division)

Soient f et g deux fonctions admettant des développements limités au voisinage de 0, à l'ordre n :

$$f(x) = P(x) + o\left(x^n\right) \quad \text{et} \quad g(x) = Q(x) + o\left(x^n\right)$$

On suppose $Q(0) \neq 0$, $(g(0) \neq 0)$. Alors $\frac{f}{g}$ admet aussi un DL au voisinage de 0, à l'ordre n, et il s'obtient en effectuant la division selon les puissances croissantes, à l'ordre n, de P par Q.

Exemple 1.16

1. Calculons le développement limité d'ordre 6 de la fonction $x \longmapsto \tan(x)$ au voisinage de 0.
   Cette fonction étant impaire, donc il suffit de chercher son développement limité d'ordre 5. On a

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right) \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right) \end{aligned}$$

   La division suivant les puissances croissantes jusqu'à l'ordre 5 de $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ par $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$:

$$\begin{array}{r|l} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \\ \cline{2-2} x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} & x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} \\ \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} & \\ \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{6} & \\ \frac{2x^5}{15} & \end{array}$$

ce qui donne

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{15} + o\left(x^5\right)$$

2. De la même façon on trouve le DL de $f(x) = \frac{e^x}{\cos x}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0. On a

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + o\left(x^2\right)$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$$

En utilisant la division suivant les puissance croissantes on trouve :

$$\frac{e^x}{\cos x} = 1 + x + x^2 + o\left(x^2\right)$$

Exemple 1.17 DL de $f(x) = (1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x}$ à l'ordre n au voisinage de 0.
La division suivant les puissance croissantes du DL de 1 par celui de $1+x$ à l'ordre n donne

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o\left(x^n\right)$$

Proposition 1.14 (Composée de fonctions)

Soient f et g deux fonctions admettant des développements limités au voisinage de 0 à l'ordre n :

$$f(x) = P(x) + o\left(x^n\right), \quad \text{et} \quad g(x) = Q(x) + o\left(x^n\right) \quad \text{avec } g(0) = Q(0) = 0$$

Alors, $f \circ g$ admet un DL à l'ordre n au voisinage de 0, obtenu en prenant les monômes de $P(Q(x))$ de degré inférieur ou égal à n.

Exemple 1.18

1. Cherchons le DL au voisinage de 0, à l'ordre 3, de $f(x) = e^{\sin x}$.
   On sait que

$$\sin x = \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + o\left(x^3\right) \quad \text{et} \quad e^y = 1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + o\left(y^3\right)$$

   donc

$$e^{\sin x} = 1 + \underbrace{(x - \frac{x^3}{6})}_{y} + \frac{1}{2!}\underbrace{(x - \frac{x^3}{6})}_{y}^2 + \frac{1}{3!}\underbrace{(x - \frac{x^3}{6})}_{y}^3 + o\left(x^3\right)$$

   On ne garde que les termes de degré ≤ 3, d'où

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^3\right)$$

2. Déterminons le développement limité d'ordre 5 de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{1-(\sinh(x))^2}$ au voisinage de 0, on a

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + o\left(x^5\right),$$

   et comme $\sinh(0) = 0$ donc $x \longmapsto \frac{1}{1-(\sinh(x))^2}$ possède un développement limité d'ordre 5 au voisinage de 0, et la partie principale de ce développement de cette fonction s'obtient en conservant que les termes d'ordre ≤ 5 de

$$1 + \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^2 + \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^4,$$

   par conséquent,

$$\frac{1}{1-(\sinh(x))^2} = 1 + x^2 + \frac{7x^4}{6} + o\left(x^5\right).$$

1.3.4 Développements limités au voisinage de a

Exemple 1.19 Développement limité de $x \longmapsto \sin x$ au voisinage de $x = a$ à l'ordre 3.

Ce DL peut être obtenu de deux manières différentes :

Méthode 1 : En se ramène au voisinage de 0 , en écrivant

$$\sin x = \sin(x-a+a) = \sin a \cos(x-a) + \cos a \sin(x-a)$$

on s'est ramené donc à chercher le DL de $\cos y$ et $\sin y$, avec $y = x - a$, au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}
\sin y &= y - \frac{y^3}{3!} + o\left(y^3\right) = (x-a) - \frac{(x-a)^3}{3!} + o\left((x-a)^3\right) \\
\cos y &= 1 - \frac{y^2}{2!} + o\left(y^3\right) = 1 - \frac{(x-a)^2}{2!} + o\left((x-a)^3\right)
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\sin x &= \sin a \left[1 - \frac{(x-a)^2}{2!} + o\left((x-a)^3\right)\right] + \cos a \left[(x-a) - \frac{(x-a)^3}{3!}\right] \\
&= \sin a + \cos a \cdot (x-a) - \frac{\sin a}{2!}(x-a)^2 - \frac{\cos a}{3!}(x-a)^3 + o\left((x-a)^3\right)
\end{aligned}$$

Méthode 2 : En appliquant la formule de Taylor

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + x^3\frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + o\left((x-a)^3\right)$$

on a donc

$$\begin{array}{ll}
f(x) = \sin x & f(a) = \sin a \\
f'(x) = \cos x & f'(a) = \cos a \\
f''(x) = -\sin x & f''(a) = -\sin a \\
f^{(3)}(x) = -\cos x & f^{(3)}(a) = -\cos a
\end{array}$$

et on obtient le même résultat qu'avec la méthode 1.

Exemple 1.20 Déterminons le développement limité de $x \longmapsto e^x$ au voisinage de $x = a$ à l'ordre 3.

Ce DL peut être obtenu donc de deux manières :

Méthode 1 : En se ramène au voisinage de 0 , en écrivant

$$e^x = e^{x-a+a} = e^{x-a} \cdot e^a$$

Noter que quand x est voisin a, le réel $y = x - a$ est voisin de 0 . On se ramène donc à chercher le DL de e^y, avec $y = x - a$, au voisinage de 0 :

$$e^y = 1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + o\left(x^2\right)$$

donc

$$e^{x-a} = 1 + \frac{x-a}{1!} + \frac{(x-a)^2}{2!} + \frac{(x-a)^3}{3!} + o\left((x-a)^3\right)$$

d'où

$$\begin{aligned} e^x = e^a \cdot e^{x-a} &= e^a \left[1 + \frac{x-a}{1!} + \frac{(x-a)^2}{2!} + \frac{(x-a)^3}{3!} + o\left((x-a)^3\right) \right] \\ &= e^a + \frac{e^a}{1!}(x-a) + \frac{e^a}{2!}(x-a)^2 + \frac{e^a}{3!}(x-a)^3 + o\left((x-a)^3\right) \end{aligned}$$

Méthode 2 : En appliquant la formule de Taylor

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + x^3\frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + o\left((x-a)^3\right)$$

on a

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^x & f(a) = e^a \\ f'(x) = e^x & f'(a) = e^a \\ f^{(2)}(x) = e^x & f^{(2)}(a) = e^a \\ f^{(3)}(x) = e^x & f^{(3)}(a) = e^a \end{array}$$

D'où

$$e^x = e^a + \frac{e^a}{1!}(x-a) + \frac{e^a}{2!}(x-a)^2 + \frac{e^a}{3!}(x-a)^3 + o\left((x-a)^3\right)$$

1.3.5 Développement au voisinage de l' ∞

Définition 1.7

Soit f une fonction définie sur $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, a]$. On dit que la fonction f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de l'∞ si $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ admet un développement limité d'ordre n à droite (resp. à gauche) en 0. Dans ce cas :

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \varepsilon(\frac{1}{x}) = 0$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} \varepsilon(\frac{1}{x}) = 0$). ♣

Exemple 1.21 Cherchons le DL à l'ordre 4 de $f(x) = \frac{x}{1+x}$ au voisinage de l'infini.

Effectuons le changement de variable : $X = \frac{1}{x}$ (quant x est voisin de l'∞ X est voisin de 0)

$$f(x) = f\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{\frac{1}{X}}{1+\frac{1}{X}} = \frac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 - X^3 + X^4 + o\left(X^4\right)$$

d'où

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

1.3.6 Développement limité généralisé ou asymptotique

Définition 1.8

Soit $f : \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle.

1. *On dit que f admet un **développement limité généralisé** (ou **développement asymptotique**) en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ si :*

$$f(x) = \frac{b_p}{(x-x_0)^p} + \frac{b_{p-1}}{(x-x_0)^{p-1}} + \cdots + \frac{b_1}{x-x_0} + a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right)$$

au voisinage de x_0. On parle aussi de développements limités généralisés à droite et à gauche de x_0.

2. *Si $\mathcal{D}_f$ contient un intervalle $]a, +\infty[$, on dit que f admet un développement généralisé en $+\infty$ à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ si*

$$f(x) = b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + \cdots + b_1 x + a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

au voisinage de $+\infty$ (c'est à dire pour x assez grand). On a la définition analogue au voisinage de $-\infty$. ♣

Remarque

1. Pour obtenir un développement limité (généralisé ou non), on pose $x = x_0 + h$, en utilisant les développements limités classiques quand h tend vers 0.
2. Pour obtenir un développement limité généralisé au voisinage de l'infini, on pose $X = \frac{1}{x}$, et on utilise les développements limités classiques quand X tend vers 0.
3. Dans les deux cas, le résultat final doit être exprimé en la variable x (c'est à dire à l'aide de puissances positives ou négatives de $(x - x_0)$ dans le premier cas, et à l'aide de puissances positives ou négatives de x dans le deuxième cas).

1.3.7 Applications des développements limités

A. Recherche d'équivalent à l'aide du DL :

Proposition 1.15

Si f admet un DL au voisinage de 0 tel que :

$$f(x) = a_k x^k + o\left(x^k\right) \quad \text{et} \quad a_k \neq 0$$

alors

$$f(x) \underset{0}{\sim} a_k x^k$$

♠

Exemple 1.22

(a). La fonction $e^x - 1 - x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ car $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$ et donc $e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$ d'où

$$e^x - 1 - x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

(b). La fonction $\sin x - x \underset{0}{\sim} -\frac{x^3}{6}$. En effet, $\sin x = \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + o\left(x^3\right)$, donc $\sin x - x = -\frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$ d'où le résultat.

B. Recherche des limites à l'aide du DL :

Exemple 1.23 Calculons $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos(x^2) - \cosh(x^2)}{x^4}$:

Cette forme est indéterminée $0/0$. Utilisons les DL :

$$\cos(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} - \frac{u^6}{720} + o(u^8)$$

et

$$\cosh(u) = 1 + \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} + \frac{u^6}{720} + o(u^8).$$

Pour $u = x^2$: on trouve

$$\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{24} - \frac{x^{12}}{720} + o(x^{16})$$

et

$$\cosh(x^2) = 1 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{24} + \frac{x^{12}}{720} + o(x^{16})$$

donc
$$\cos(x^2)-\cosh(x^2)=\left(1-\frac{x^4}{2}+\frac{x^8}{24}-\frac{x^{12}}{720}+o(x^{16})\right)-\left(1+\frac{x^4}{2}+\frac{x^8}{24}+\frac{x^{12}}{720}+o(x^{16})\right)$$
$$\cos(x^2)-\cosh(x^2)=-x^4-\frac{x^{12}}{360}+o(x^{16})$$
$$\frac{\cos(x^2)-\cosh(x^2)}{x^4}=\frac{-x^4-\frac{x^{12}}{360}+o(x^{16})}{x^4}=-1-\frac{x^8}{360}+o(x^{12})$$
D'où
$$\lim_{x\to 0}\left(-1-\frac{x^8}{360}+o(x^{12})\right)=-1$$
car $\frac{x^8}{360}\to 0$ et $o(x^{12})\to 0$.

Exemple 1.24 Calculons $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(x)-x-\frac{x^3}{3}}{x^5}$:
Le développement limité d'ordre 5 de la fonction tan au voisinage de 0 donne
$$\tan(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+x^5\varepsilon(x,)\quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$$
donc
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)-x-\frac{x^3}{3}}{x^5}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{15}+\varepsilon(x)\right)=\frac{2}{15}.$$

Exemple 1.25 Calculons $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{\arctan x-x}$ (Forme indéterminée)
On commence par la recherche d'équivalents
$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\quad \text{et}\quad \arctan x=x-\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)$$
d'où
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{\arctan x-x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{6}}{-\frac{x^3}{3}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$
Remarquez qu'on a fait un DL à l'ordre 3 car si on le fait à l'ordre 1 ou 2 on aura une forme indéterminée.

Exemple 1.26 Calculons $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin x-1}{2\cos x-3}$:
Remarquons qu'on est pas au voisinage de 0. On se ramène au voisinage de 0 en faisant le changement de variable : $X=x-\frac{\pi}{6}$, ainsi quand $x\to\frac{\pi}{6}$ on a $X\to 0$. En tenant compte du changement de variable, on a
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin x-1}{2\cos x-3}=\lim_{X\to 0}\frac{2\sin\left(X+\frac{\pi}{6}\right)-1}{2\cos\left(X+\frac{\pi}{6}\right)-3}=\lim_{X\to 0}\frac{\sin\left(X+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}}{\cos\left(X+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{3}{2}}$$
or
$$\sin\left(X+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin X+\frac{1}{2}\cos X-\frac{1}{2}$$
$$\cos\left(X+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos X-\frac{1}{2}\sin X-\frac{3}{2}$$
En considérant les DL à l'ordre 1 au voisinage de 0 de $\sin X$ et $\cos X$, on a :
$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin X+\frac{1}{2}\cos X-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}X+o(X)$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos X-\frac{1}{2}\sin X-\frac{3}{2}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{2}X+o(X)$$
d'où

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x - 1}{2\cos x - 3} = \lim_{X\to 0} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin X + \frac{1}{2}\cos X - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos X - \frac{1}{2}\sin X - \frac{3}{2}} = \lim_{X\to 0} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}X}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}X} = 0$$

Exemple 1.27 Calculons $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$
Notons d'abord qu'on a :

$$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = \frac{\sin x - x}{x^2 \sin x}$$

or, au voisinage de 0, on a

$$\sin x - x = x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right) - x = -\frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$$
$$x^2 \sin x = x^2(x + o(x)) = x^3 + o\left(x^3\right)$$

d'où

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{6}}{x^3} = -\frac{1}{6}$$

Exemple 1.28
Calculons $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.
En utilisant le DL de e^x à l'ordre 2 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

On obtient :

$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - x}{x^2} = \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} \to \frac{1}{2}.$$

C. Équation de la tangente à l'aide du DL :

Proposition 1.16

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un intervalle $[a, b]$ et $x_0 \in]a, b[$. Si

$$f(x) = f\left(x_0\right) + a_1\left(x - x_0\right) + a_2\left(x - x_0\right)^2 + o\left(\left(x - x_0\right)^2\right) \qquad \textit{avec } a_2 \neq 0$$

alors

$$y = f\left(x_0\right) + a_1\left(x - x_0\right)$$

est l'équation de la tangente à la courbe au point $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$;

Exemple 1.29 On a $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$, donc l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction sin au point d'abscisse 0 est donnée par $y = x$.
Exemple 1.30 Déterminons la tangente à la courbe de $f(x) = \ln(1 + x)$ en $x = 0$.
Le DL de $\ln(1 + x)$ à l'ordre 1 est :

$$\ln(1 + x) = x + o(x).$$

La tangente en $x = 0$ est donc $y = x$.

D. Étude de la concavité et point d'inflexion à l'aide du DL :

Rappelons que si f est une fonction continûment dérivable deux fois sur un intervalle $[a, b]$, alors

- si $f'' < 0$ la courbe tourne sa concavité vers les $y < 0$ (vers le bas),
- si $f'' > 0$ la courbe tourne sa concavité vers les $y > 0$ (vers le haut).
- Si f'' s'annule en changeant de signe en $x_0 \in [a, b]$. Alors, le point $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ est un point d'inflexion.

Proposition 1.17

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un intervalle $[a,b]$ et $x_0 \in]a,b[$. Si

$$f(x) = f(x_0) + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + o\left((x-x_0)^2\right) \quad \text{avec } a_2 \neq 0$$

alors

- *si $a_2 > 0, C_f$ tourne sa concavité vers les $y > 0$ au point $(x_0, f(x_0))$;*
- *si $a_2 < 0, C_f$ tourne sa concavité vers les $y < 0$ au point $(x_0, f(x_0))$;*

Proposition 1.18

Soient f une fonction de classe $\mathscr{C}^3$ sur un intervalle $[a,b]$ et $x_0 \in]a,b[$. Si

$$f(x) = f(x_0) + a_1(x-x_0) + a_3(x-x_0)^3 + o\left((x-x_0)^3\right) \quad \text{avec } a_3 \neq 0$$

alors, le point $(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion.

Plus généralement, soit une fonction f définie au voisinage de x_0 et admet un DL tel que :

$$f(x) = f(x_0) + a_1(x-x_0) + a_p(x-x_0)^p + (x-x_0)^p \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

avec $a_p \neq 0$ (on s'arrête au premier terme non nul de degré ≥ 2). Rappelons que l'équation de la tangente au point $(x_0, f(x_0))$ est :

$$y = f(x_0) + a_1(x-x_0)$$

donc

$$f(x) - y = a_p(x-x_0)^p + o\left((x-x_0)^p\right)$$

et

$$f(x) - y \underset{x_0}{\sim} a_p(x-x_0)^p$$

Suivant le signe de a_p et la parité de p, on peut en déduire la position de la tangente par rapport à la courbe au point $(x_0, f(x_0))$. Deux cas se présentent :

(a). Si p est paire

  I. si $a_p > 0$, $(x_0, f(x_0))$ est un point où la concavité est tournée vers $y > 0$.

  II. si $a_p < 0$, $(x_0, f(x_0))$ est un point où la concavité est tournée vers $y < 0$.

(b). Si p est impaire $(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion et la courbe traverse la tangente.

Exemple 1.31 Étudions $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$ au voisinage du point $(0,1)$.
Déterminons le DL de $f(x)$ à l'ordre 2,
on a

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \text{ et } \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$$

en effectuant la multiplication on trouve

$$f(x) = e^x \frac{1}{1+x} = \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)(1 - x + x^2) + o(x^2) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2),$$

donc on est dans le cas où p pair et $a_p > 0$. D'où $(0,1)$ est un point où la concavité est tournée vers $y > 0$.

Exemple 1.32 Étudions $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ au voisinage de 0.
On a

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$$

et

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+o\left(x^3\right) \text{ et } \frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+o\left(x^3\right)$$

en intégrant des deux cotés les deux DL ci-dessus et en tenant compte du fait que $\ln(1+0)=0$ et $\ln(1-0)=0$, on obtient :

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right) \text{ et } \ln(1-x)=-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)$$

En faisant la différence entre les deux DL ci-dessus, on obtient

$$f(x)=2x+\frac{2}{3}x^3+o\left(x^3\right)$$

le terme x^2 n'apparaît pas dans le DL, donc $(0,0)$ est un point d'inflexion. La courbe traverse la tangente.

E. Étude des branches infinies à l'aide du DL :

Définition 1.9

On considère un intervalle I et une fonction $f: I\to\mathbb{R}$. On dit que f possède une branche infinie en un élément a si $\lim_{x\to a} f(x)=l$ et si l'un au moins des deux éléments a ou l est égal à $+\infty$ ou $-\infty$. ♣

Proposition 1.19

Soit f une fonction.

(a). *Si $\lim_{x\to\infty} f(x)=l\in\mathbb{R}$ la branche infinie est asymptote horizontale, d'équation $y=l$.*

(b). *Si $\lim_{x\to a\in\mathbb{R}} f(x)=\infty$ La branche infinie est une asymptote verticale d'équation $x=a$.* ♠

Proposition 1.20

Soit f une fonction telle que $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

(a). *Si $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$, la branche infinie est une branche parabolique horizontale. (exp. $\ln x$)*

(b). *Si $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$, la branche infinie est une branche parabolique verticale. (exp. $\exp(x)$)*

(c). *Si $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a\in\mathbb{R}^*$, on dit que la courbe représentative de f présente une branche infinie dans la direction " $y=ax$ ".*

   i) *Si en plus $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=b$, alors on a une asymptote d'équation $y=ax+b$.*

   ii) *Si $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\pm\infty$, alors on a une branche parabolique.* ♠

Exemple 1.33 On considère la fonction $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{x}$. Déterminons les asymptotes à sa courbe. Commençons par la recherche de la limite suivantes

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{2}+\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{2}$$

par ailleurs $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{1}{2}\cdot x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2}\cdot x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$. Donc la droite d'équation $y=\frac{1}{2}\cdot x$ est une asymptote à la courbe.

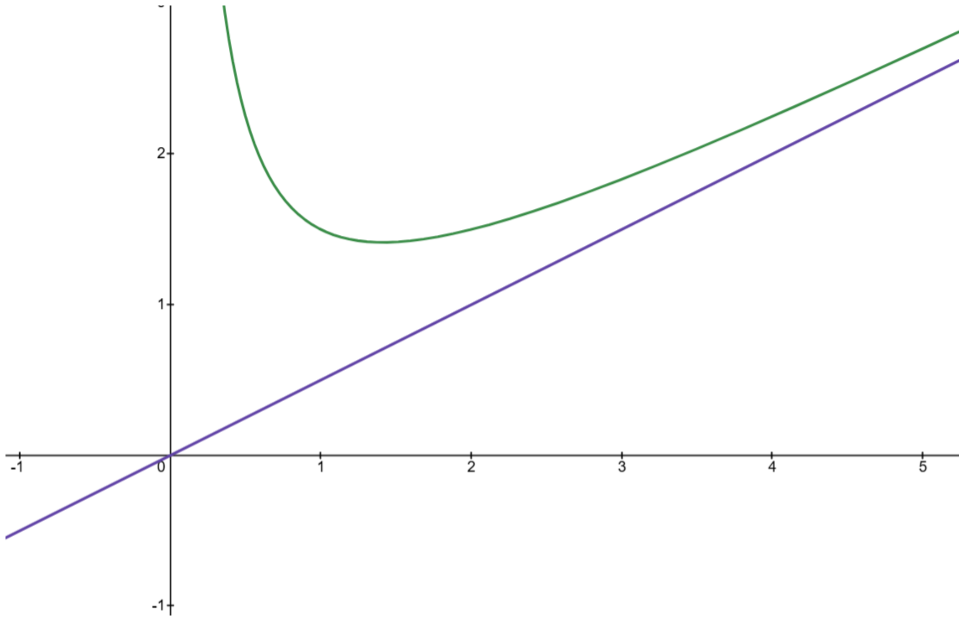

Figure 1.6

Exemple 1.34 On considère la fonction $f(x) = \ln x$. Déterminons les asymptotes à sa courbe. Commençons par la recherche de la limite suivantes

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

par ailleurs $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - 0.x) = +\infty$. Donc on a une branche parabolique dans la direction Ox

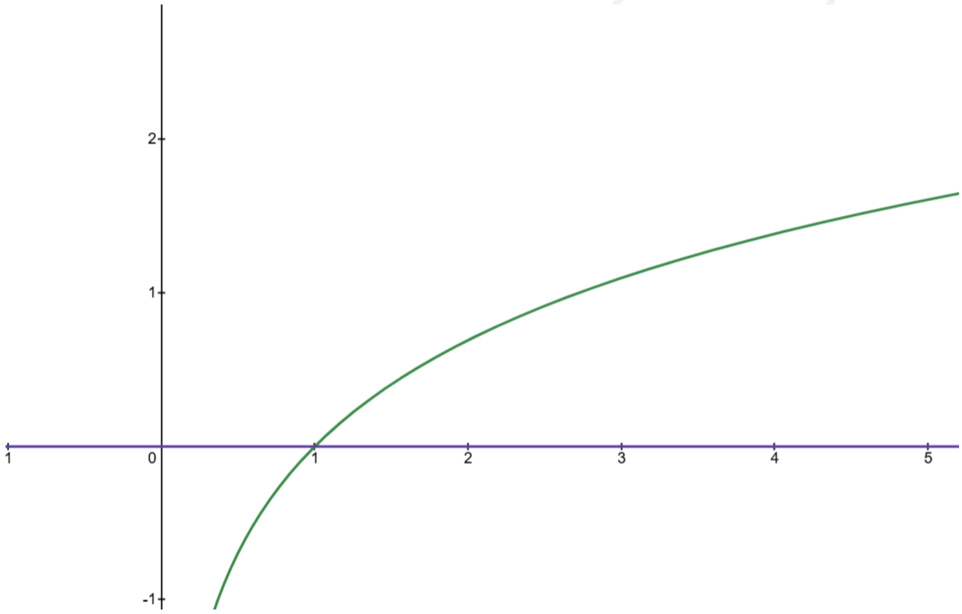

Figure 1.7

Proposition 1.21

Supposons que f admet un développement généralisé au voisinage de $+\infty$ de la forme :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x^\alpha} + o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \qquad \text{avec } \alpha > 0$$

Alors, la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative de f. De plus, suivant le signe de $\frac{c}{x^\alpha}$, la courbe est au-dessus ou en-dessous l'asymptote.

Exemple 1.35 Considérons la fonction $y = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$. En utilisant son DL au voisinage de l'infini, déterminons ces asymptotes si elles existent.
On pose $u = \frac{1}{x}$:

$$(1+e^u)^{-1} = \left(2+u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}+o\left(u^3\right)\right)^{-1} = 2^{-1}\left[1+\left(\frac{u}{2}+\frac{u^2}{4}+\frac{u^3}{12}\right)+o\left(u^3\right)\right]^{-1}$$

donc

$$(1+e^u)^{-1} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{u}{2}+\frac{u^3}{24}+o\left(u^3\right)\right)$$

d'où

$$\frac{1}{u}(1+e^u)^{-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{u}-\frac{1}{4}+\frac{1}{48}u^2+o\left(u^2\right)$$

par suite

$$f(x) = \frac{x}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{48}\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

ainsi, la droite d'équation $y=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$ est une asymptote à la courbe de f.

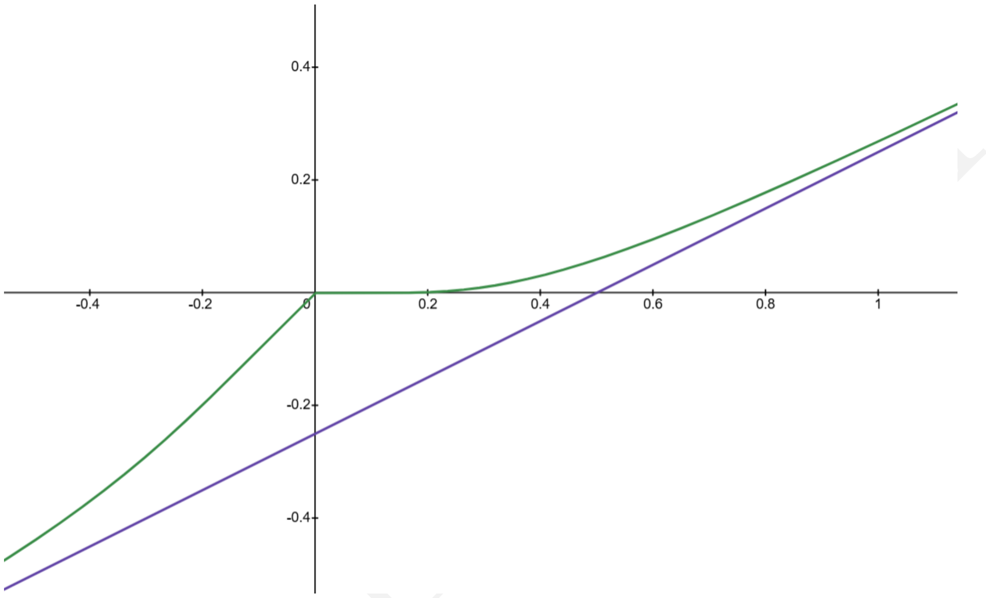

Figure 1.8

Exemple 1.36 Étudions la fonction suivante au voisinage de $+\infty$: $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x^2}=\left(x^3+x^2\right)^{1/3}$. Notons qu'on a

$$f(x) = x\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/3}$$

Quand x est voisin de l' ∞ $\frac{1}{x}$ est voisin de 0. On cherche le DL de $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/3}$ en posant $X=\frac{1}{x}$

$$(1+X)^{1/3} = 1+\frac{1}{3}X-\frac{1}{9}X^2+o\left(X^2\right)$$

soit

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/3} = 1+\frac{1}{3}\frac{1}{x}-\frac{1}{9}\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

d'où

$$f(x) = x+\frac{1}{3}-\frac{1}{9x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donc la droite d'équation $y=x+\frac{1}{3}$ est une asymptote la courbe de f.

$$f(x) - y \sim -\frac{1}{9x}$$

- Au voisinage de $+\infty$ la fonction $-\frac{1}{9x} < 0$ donc la courbe est au dessous de l'asymptote.
- Au voisinage de $-\infty$ la fonction $-\frac{1}{9x} > 0$ donc la courbe est au dessus de l'asymptote.

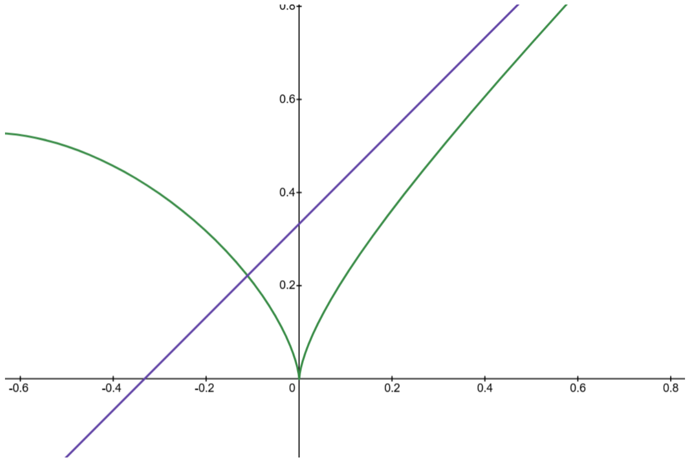

Figure 1.9

F. Résolution d'équations différentielles à l'aide du DL :

Les développements limités sont utilisés aussi pour trouver des solutions approchées d'équations différentielles (Voir Chapitre 5).

Exemple 1.37

Résoudre $y' = y$ avec $y(0) = 1$ en utilisant un DL.

On suppose $y(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. En substituant dans l'équation, on retrouve le DL de e^x.

Chapitre 2 Intégrale de Riemann

Motivation

La notion d'intégrale a été bien formalisée au 19e siècle grâce à Riemann qui s'est intéressé à une fonction f donnée sur un segment $[a, b]$ et a essayé d'approcher l'aire $\mathscr{A}$ sous le graphe de f par les aires $\mathscr{A}^-$ et $\mathscr{A}^+$ de deux familles de rectangles qui approche par défaut et par excès l'aire $\mathscr{A}$,

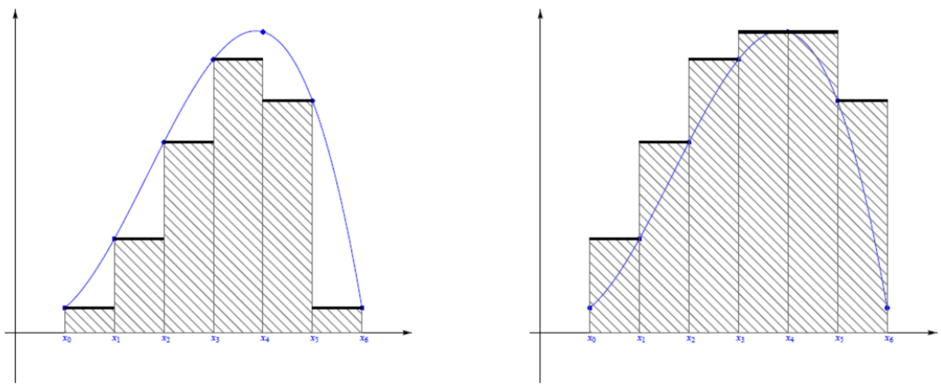

Figure 2.1 – à gauche les aires inférieurs $\mathscr{A}^-$, et à droite les aires supérieurs $\mathscr{A}^+$

Une fonction est intégrable au sens de Riemann si la différence des aires $\mathscr{A}^-$ et $\mathscr{A}^+$ tend vers 0 quand le pas de subdivision (la largeur des rectangles considérés) tend vers 0.

Exemple 2.1 Considérons la fonction exponentielle $f(x) = e^x$. On souhaite calculer l'aire $\mathscr{A}$ en-dessous du graphe de f et entre les droites d'équation $x = 0$, $x = 1$ et l'axe (Ox).

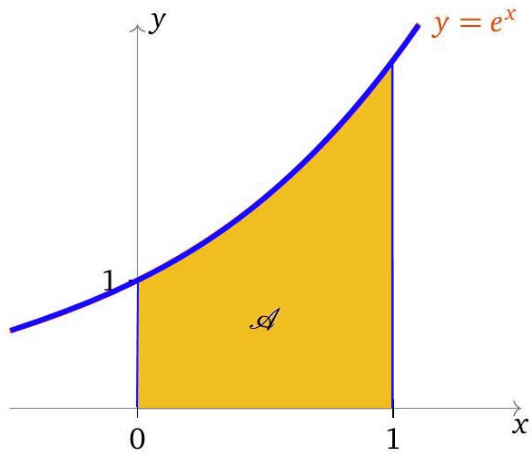

Figure 2.2

Nous approchons cette aire par des sommes d'aires des rectangles situés sous la courbe. Plus précisément, soit $n \geqslant 1$ un entier, découpons notre intervalle $[0, 1]$ à l'aide de la subdivision $\left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{i}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1\right)$. On considère les «rectangles inférieurs» $\mathscr{R}_i^-$, chacun ayant pour base l'intervalle $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ et pour hauteur $f\left(\frac{i-1}{n}\right) = e^{(i-1)/n}$. L'entier i varie de 1 à n.

L'aire $\mathscr{A}_i^-$ de $\mathscr{R}_i^-$ est égal à $\mathscr{A}_i^- = \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) \times e^{(i-1)/n} = \frac{1}{n} e^{\frac{i-1}{n}}$.

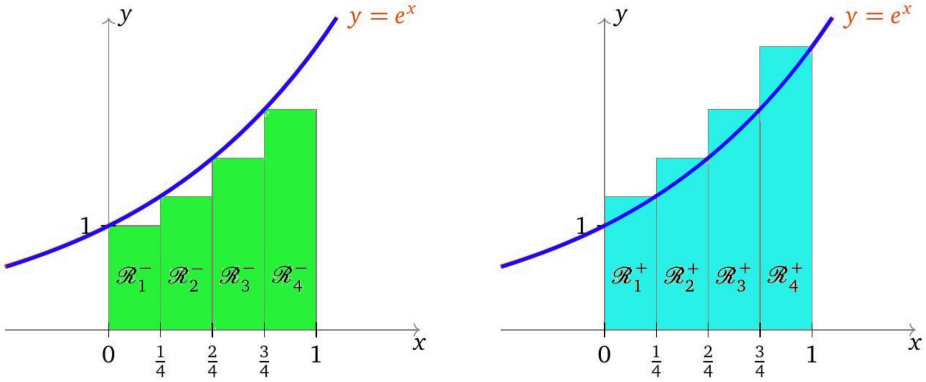

Figure 2.3

La somme des aires des $\mathscr{R}_i^-$ se calcule alors comme somme d'une suite géométrique :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{e^{\frac{i-1}{n}}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{i-1} = \frac{1}{n} \frac{1-\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{n}}{1-e^{\frac{1}{n}}} = \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1}(e-1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e-1$$

Pour la limite on a reconnu l'expression du type $\frac{e^x-1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ (avec ici $x = \frac{1}{n}$).

Soit maintenant les «rectangles supérieurs» $\mathscr{R}_i^+$, ayant la même base $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ mais la hauteur $f\left(\frac{i}{n}\right) = e^{i/n}$. Un calcul similaire montre que $\sum_{i=1}^{n} \frac{e^{\frac{i}{n}}}{n} \to e-1$ lorsque $n \to +\infty$.

L'aire $\mathscr{A}$ de notre région est supérieure à la somme des aires des rectangles inférieurs ; et elle est inférieure à la somme des aires des rectangles supérieurs. Lorsque l'on considère des subdivisions de plus en plus petites (c'est-à-dire lorsque l'on fait tendre n vers $+\infty$) alors on obtient à la limite que l'aire $\mathscr{A}$ de notre région est encadrée par deux aires qui tendent vers $e-1$. Donc l'aire de notre région est $\mathscr{A} = e-1$.

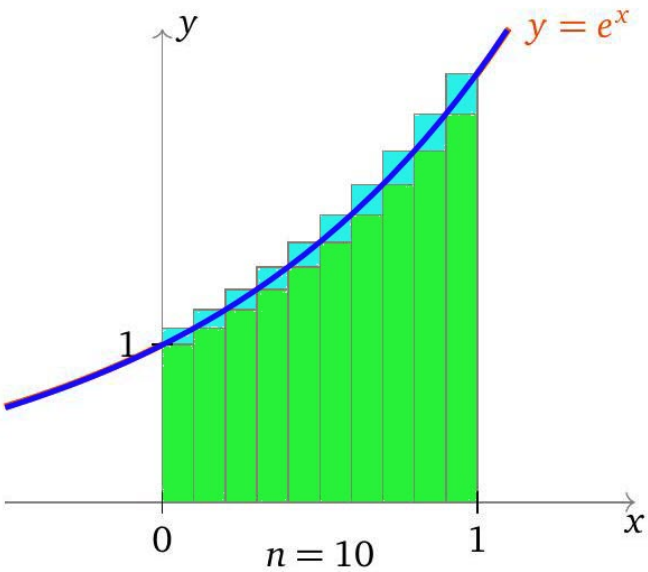

Figure 2.4

2.1 Fonctions en escalier

2.1.1 Subdivision d'un intervalle

Définition 2.1

Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ $(-\infty < a < b < +\infty)$.

- *On appelle une **subdivision** de $[a, b]$ toute suite finie, strictement croissante, de nombres $S = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ telle que $x_0 = a$ et $x_n = b$. Autrement dit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.*

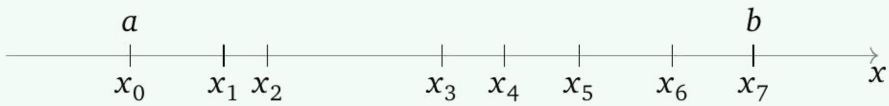

Figure 2.5

- *On appelle **pas** ou **diamètre** de la subdivision S la quantité :*

$$\delta = \max_{0 \leq i \leq n-1} \{x_{i+1} - x_i\}$$

- *Une subdivision S_1 de $[a,b]$ est dite plus fine qu'une subdivision S_0 de $[a,b]$ si $S_0 \subset S_1$. Cela veut dire que S_1 découpe $[a,b]$ en plus de morceaux. En particulier dans ce cas, on a évidement $\delta(S_0) \geqslant \delta(S_1)$.*
- *Une subdivision de $[a,b]$ est **régulière** si tous les $x_{i+1} - x_i$ sont égaux.*

♣

Exemple 2.2

- $I = [0,2]$; $S_1 : x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{2} < x_2 = 1 < x_3 = \frac{3}{2} < x_4 = 2$ est une subdivision régulière de pas $\frac{1}{2}$.
- $I = [0,2]$; $S_2 : x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{4} < x_2 = \frac{1}{2} < x_3 = 1 < x_4 = \frac{3}{2} < x_5 = 2$ est une subdivision de pas $\frac{1}{2}$, mais S_1 n'est pas régulière.

Remarque Si $\sigma : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ est une subdivision régulière d'un intervalle $I = [a,b]$, alors $x_i = x_0 + ih$; $i = 1, 2, 3, \cdots, n$, ce qui donne que $x_n = x_0 + nh$ donc $b - a = nh$ et $h = \frac{b-a}{n}$.

2.1.2 Fonctions en escalier

Définition 2.2

*Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une **fonction en escalier** sur le segment $[a,b]$ s'il existe une subdivision $S : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ et des nombres réels $c_1, \ldots, c_n$ tels que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ on ait*

$$\forall x \in]x_{i-1}, x_i[\quad f(x) = c_i$$

Autrement dit, f est une fonction constante sur chacun des sous-intervalles de la subdivision.
*La subdivision S est dite **subordonnée** à la fonction f.*

♣

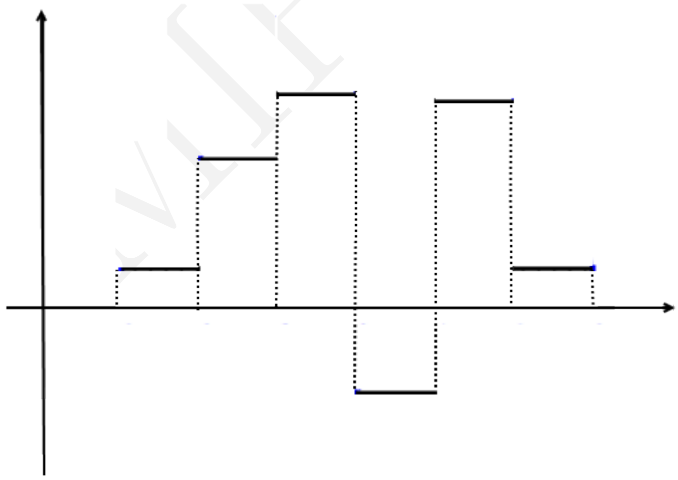

Figure 2.6 – Fonction en escalier

Proposition 2.1

Soient f et g deux fonctions en escalier sur $[a,b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ Alors $|f|$, $f+g$, λf et fg sont des fonctions en escalier sur $[a,b]$.

♠

Démonstration Si S_0 et S_1 sont des subdivisions associées respectivement à f et g alors $S = S_0 \cup S_1$ est associée à f et à g. On peut donc supposer que f et g sont en escalier sur la même subdivision $S = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$.

Ainsi f et g sont constantes, égales respectivement à c_i et d_i sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$. Donc $|f|$, λf, $f+g$ et fg sont égales à $|c_i|$, λc_i, $c_i + d_i$ et $c_i d_i$ sur $]x_i, x_{i+1}[$. D'où la proposition. □

2.2 L'intégrale de Riemann

2.2.1 Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 2.3

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction en escalier, c-à-d il existe une subdivision $\sigma : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ de $[a,b]$, et des constantes c_i tel que $f(x) = c_i$ pour tout $i = 1, 2, \cdots, n$ et $x \in]x_{i-1}, x_i[$. On appelle intégrale de Riemann de f le réel $\int_a^b f(x)dx$ défini par

$$\int_a^b f(x)dx = I_S(f) = \sum_{i=1}^{n} c_i \left(x_i - x_{i-1}\right)$$

♣

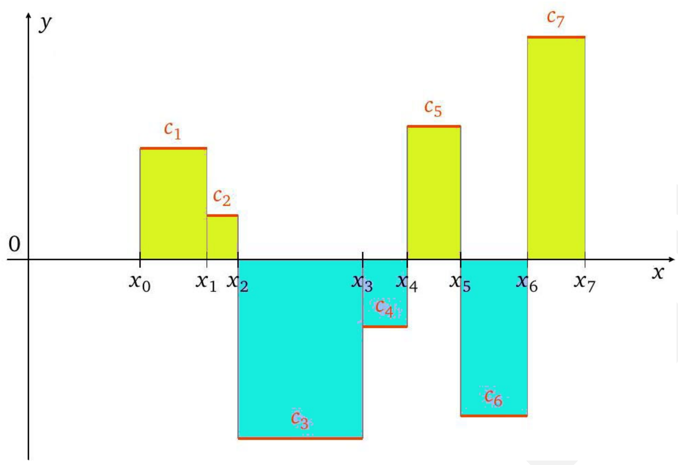

Figure 2.7

Remarque

- Remarquons que chaque terme $c_i \left(x_i - x_{i-1}\right)$ est l'aire du rectangle compris entre les abscisses x_{i-1} et x_i et de hauteur c_i. Il faut juste prendre garde que l'on compte l'aire avec un signe « + » si $c_i > 0$ et un signe « - » si $c_i < 0$.
- L'intégrale d'une fonction en escalier est l'aire de la partie située au-dessus de l'axe des abscisses moins l'aire de la partie située en-dessous. L'intégrale d'une fonction en escalier est bien un nombre réel qui mesure l'aire algébrique (c'est-à-dire avec signe) entre la courbe de f et l'axe des abscisses.

Exemple 2.3 Soit la fonction f définie par $f(x) = E(x)$ sur $[-1, 2]$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x. Donc

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i \left(x_i - x_{i-1}\right) = -1(0+1) + 0(1-0) + 1(2-1) = 0.$$

Proposition 2.2

La quantité $I_S(f)$ ne dépend pas du choix de la subdivision S associée à f, elle ne dépend que de f et de $[a,b]$. ♠

Démonstration Considérons deux subdivisions $S = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ et $S' = (y_j)_{0 \leqslant j \leqslant m}$ associées à f.

- 1^{er} cas $S \subset S'$: sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ la fonction f est constante égale à c_i. Mais cet intervalle se découpe en union de certains intervalles $]y_k, y_{k+1}[$, $k = l_0, l_0+1, l_0+2, \ldots, l_1$ oú f prend des valeurs d_l qui sont forcément toutes égales à c_i. Donc $\sum_{l=l_0}^{l_1-1} d_l \left(y_{l+1} - y_l\right) = \sum_{l=l_0}^{l=l_1-1} c_i \left(y_{l+1} - y_l\right) = c_i \sum_{l=l_0}^{l=l_1-1} \left(y_{l+1} - y_l\right) = c_i \left(x_{i+1} - x_i\right)$ En faisant la somme sur tous les $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ on aura

$$\sum_{l=0}^{l=m-1} d_l \left(y_{l+1} - y_l\right) = \sum_{i=0}^{i=n-1} c_i \left(x_{i+1} - x_i\right)$$

Ainsi, dans ce cas, $I_{S'}(f) = I_S(f)$

- $2^{\text{ème}}$ cas : si S et S' sont quelconques, associées à f alors $S'' = S \cup S'$ est une subdivision associée à f vérifiant $S \subset S''$ et $S' \subset S''$, et d'après le cas premier, on a :

$$I_S(f) = I_{S''}(f) = I_{S'}(f)$$

□

2.2.2 Propriétés

Proposition 2.3 (Linéarité)

Soient f et g deux fonctions en escalier sur $[a,b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

1. $\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt.$
2. $\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt.$

En d'autre termes :

$$\chi : f \mapsto \chi(f) = \int_a^b f(t)dt$$

est une forme linéaire sur l'espace vectorielle des fonctions en escalier sur $[a,b]$. ♠

Démonstration

1. Si $S = (x_j)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une subdivision associée à f alors elle est aussi associé à λf. Si f prend les valeurs c_i sur les intervalles $]x_i, x_{i+1}[$ alors λf prend les valeurs λc_i sur ces mêmes intervalles. On obtient donc

$$\int_a^b \lambda f(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda c_i \left(x_{i+1} - x_i\right) = \lambda \sum_{i=0}^{n-1} c_i \left(x_{i+1} - x_i\right) = \lambda \int_a^b f(t)dt$$

2. Soit $S = (x_j)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une subdivision associée à f et à g. Chacune de ces fonctions vaut c_i et d_i respectivement sur les intervalles $]x_i, x_{i+1}[$. Ainsi $f+g$ vaut $c_i + d_i$ sur ces intervalles et on aura :

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f+g)(t)dt &= \sum_{i=0}^{n-1} (c_i + d_i)\left(x_{i+1} - x_i\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} c_i \left(x_{i+1} - x_i\right) + \sum_{i=0}^{n-1} d_i \left(x_{i+1} - x_i\right) \\
&= \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.4 (Croissance)

Soient f et g deux fonctions en escalier sur un intervalle $[a,b]$, alors

1. *Si f est positive sur $[a,b]$, alors :* $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0.$
2. *Si $f \geqslant g$ sur $[a,b]$, alors :* $\int_a^b f(t)dt \geqslant \int_a^b g(t)dt.$
3. *On a* $\int_a^b |f(t)|dt \geqslant \left|\int_a^b f(t)dt\right|.$
4. *Si pour tout $a \leq x \leq b$ on a : $m \leq f(x) \leq M$ alors*

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx.$$

♠

Démonstration

1. Soit $S = (x_j)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une subdivision associée à f alors toutes les valeurs c_i de f sur les intervalles $]x_i, x_{i+1}[$ sont positives. Comme les $(x_{i+1} - x_i)$ sont tous positifs, alors :

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} c_i\left(x_{i+1}-x_i\right) \geqslant 0$$

2. Il suffit d'appliquer 1) à $f-g$.
3. Pour tout $x \in [a,b]$ on a, $|f(x)| \geqslant f(x) \geqslant -|f(x)|$, l'assertion 2) implique :

$$\int_a^b |f(x)|dt \geqslant \int_a^b f(t)dt \geqslant -\int_a^b |f(x)|dt$$

d'où

$$\int_a^b |f(t)|dt \geqslant \left|\int_a^b f(t)dt\right|$$

4. Il suffit d'utiliser 2).

□

Proposition 2.5 (Relation de Chasles)

Soit f est une fonction en escalier sur $[a,b]$, alors pour tout $c \in]a,b[$ on a :

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt.$$

2.2.3 Fonctions continues par morceaux

Définition 2.4

Soit $[a,b]$ un segment. On dit qu'une fonction $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ lorsqu'il existe une subdivision $\sigma : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ du segment $[a,b]$ telle que

1. *Pour tout $k \in [0, n-1]$, la restriction de f à $]x_k, x_{k+1}[$ est continue.*
2. *Pour tout $k \in [0, n-1]$, la restriction de f à $]x_k, x_{k+1}[$ est prolongeable par continuité sur $]x_k, x_{k+1}[$, autrement dit, f restreinte à $]x_k, x_{k+1}[$ admet une limite finie à droite en x_k et à gauche en x_{k+1}.*

Une telle subdivision est dite adaptée ou subordonnée à f

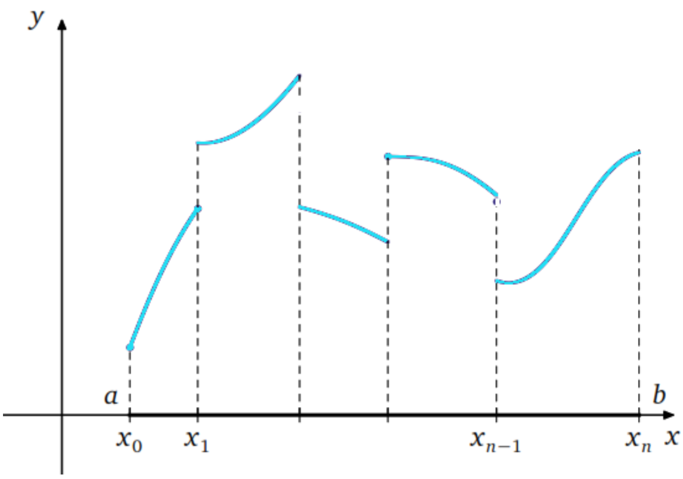

Figure 2.8 – Fonction continue par morceaux sur un segment

Remarque Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$, alors f n'a qu'un nombre fini de points de discontinuité, en chacun desquels elle présente une limite à droite, et une limite à gauche finies. Autrement dit il existe une subdivision $\sigma : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ de $[a,b]$, tel que la restriction de f à chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ soit continue sur cet intervalle et prolongeable par continuité à l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$.

Remarque

- Toute fonction en escalier sur $[a,b]$ est continue par morceaux sur $[a,b]$.

- Comme pour les fonctions en escaliers, si σ est une subdivision de $[a, b]$ subordonnée à f continue par morceaux sur $[a, b]$ et si σ' est une autre subdivision de $[a, b]$ plus fine que σ alors σ' est aussi subordonnée à f.

Théorème 2.1 (Théorème d'approximation uniforme (admis))

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction φ en escalier sur $[a, b]$ telle que : $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$.

Corollaire 2.1

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions φ et ψ en escalier sur $[a, b]$ telles que pou tout $x \in [a, b]$ on a : $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ et $\psi(x) - \varphi(x) \leq \varepsilon$.

Démonstration D'après le théorème d'approximation uniforme on a pour tout $\varepsilon > 0$ il existe g une fonction en escalier sur $[a, b]$ telle que $|f(x) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, donc pour tout $x \in [a, b]$ on a $g(x) - \frac{\varepsilon}{2} \leq f(x) \leq g(x) + \frac{\varepsilon}{2}$. Si on pose $\varphi(x) = g(x) - \frac{\varepsilon}{2}$ et $\psi(x) = g(x) + \frac{\varepsilon}{2}$ on aura φ et ψ deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ et vérifient $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ et $\psi(x) - \varphi(x) \leq \varepsilon$. □

2.2.4 Fonction intégrable

Notations

Soit f une fonction définie et bornée sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$. On note :

$$E_-(f) = \{\varphi : [a, b] \to \mathbb{R} \;/\; \varphi \text{ en escalier et } \varphi \leqslant f\}, \quad \text{et} \quad I_-(f) = \left\{\int_a^b \varphi(t)dt : \varphi \in E_-(f)\right\},$$
$$E_+(f) = \{\psi : [a, b] \to \mathbb{R} \;/\; \psi \text{ en escalier et } f \leqslant \psi\}, \quad \text{et} \quad I_+(f) = \left\{\int_a^b \psi(t)dt : \psi \in E_+(f)\right\}.$$

Comme f est bornée, alors il existent $m, n \in \mathbb{R}$ tels que $m = \min\{f(x) : x \in [a, b]\}$ et $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$, et les fonctions constantes $m : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $M : [a, b] \to \mathbb{R}$ définies par $m(x) = m$ et $M(x) = M$ vérifiant $m \leqslant f \leqslant M$. Donc $m \in E_-(f)$ et $M \in E_+(f)$, ainsi :

$$m(b-a) = \int_a^b m\,dt \in I_-(f) \Rightarrow I_-(f) \neq \emptyset$$

et

$$M(b-a) = \int_a^b M\,dt \in I_+(f) \Rightarrow I_+(f) \neq \emptyset$$

Clairement $M(b-a)$ est un majorant de $I_-(f)$ et $m(b-a)$ est un minorant de $I_+(f)$. Donc

$$i_a^b(f) = \sup\left(I_-(f)\right) \text{ et } I_a^b(f) = \inf\left(I_+(f)\right)$$

existent dans $\mathbb{R}$ et vérifient évidemment :

$$i_a^b(f) \leqslant I_a^b(f)$$

Définition 2.5

*On dit qu'une fonction bornée f sur $[a, b]$ est **intégrable au sens de Riemann** si $i_a^b(f) = I_a^b(f)$. Cette valeur commune est notée :*

$$\int_a^b f(t)dt$$

*et appelée **intégrale** de f entre a et b.*

Théorème 2.2

Une fonction f définie et bornée sur $[a,b]$ est intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si il existe deux suites de fonctions $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ en escaliers telles que :

- $\varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n$ *pour tout* n,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b (\psi_n - \varphi_n)(t)dt = 0.$

Dans ce cas on a

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(t)dt.$$

♡

Démonstration

- Supposons que $i_a^b(f) = I_a^b(f) = \int_a^b f(t)dt$.
  Par définition de la borne inférieure et supérieure on a :

$$\begin{cases} \forall \varphi \in E_-(f) & \int_a^b \varphi(t)dt \leqslant i_a^b(f) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists \varphi_\varepsilon \in E_-(f) & i_a^b(f) - \varepsilon < \int_a^b \varphi_\varepsilon(t)dt \end{cases}$$

  et

$$\begin{cases} \forall \psi \in E_+(f) & \int_a^b \psi(t)dt \geqslant I_a^b(f) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists \psi_\varepsilon \in E_+(f) & I_a^b(f) + \varepsilon > \int_a^b \psi_\varepsilon(t)dt \end{cases}$$

  Ainsi pour $\varepsilon = \frac{1}{n}, n \geqslant 1$ il existe alors deux fonctions $\varphi_n \in E_-(f)$ et $\psi_n \in E_+(f)$ telles que

$$i_a^b(f) - \frac{1}{n} < \int_a^b \varphi_n(t)dt \leqslant i_a^b(f)$$

  et

$$I_a^b(f) \leqslant \int_a^b \psi_n(t)dt < I_a^b(f) + \frac{1}{n}$$

  Si on fait tendre n vers l'infini, on aura

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(t)dt = i_a^b(f) = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(t)dt = I_a^b(f)$$

  Par construction, les fonctions φ_n et ψ_n sont bien en escalier et satisfont $\varphi_n \leqslant f \leqslant \omega_n$. Ainsi la preuve dans un sens est faite.
- Réciproquement, si il existe deux suites $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ telles que :

$$\varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \int_a^b (\psi_n - \varphi_n)(t)dt = 0$$

  alors on a l'implication suivante :

$$\int_a^b \varphi_n(t)dt \leqslant i_a^b(f) \leqslant I_a^b(f) \leqslant \int_a^b \psi_n(t)dt \Rightarrow 0 \leqslant I_a^b(f) - i_a^b(f) \leqslant \int_a^b (\psi_n(t) - \varphi_n(t))\, dt$$

  Ce qui montre que $I_a^b(f) = i_a^b(f)$.
  De plus on a :

$$0 \leqslant i_a^b(f) - \int_a^b \varphi_n(t)dt \leqslant \int_a^b (\psi_n(t) - \varphi_n(t))\, dt$$

  et

$$0 \leqslant \int_a^b \psi_n(t) - I_a^b(f) \leqslant \int_a^b (\psi_n(t) - \varphi_n(t))\, dt$$

  Il suffit alors de faire tendre n vers l'infini pour conclure.

$\square$

Exemple 2.4

- Les fonctions en escalier sont intégrables ! En effet si f est une fonction en escalier alors la borne inférieure $I_a^b(f)$ et supérieure $i_a^b(f)$ sont atteintes avec la fonction $\phi = f$. Bien sûr l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ coïncide avec l'intégrale de la fonction en escalier.
- Nous verrons dans la suite que les fonctions continues et les fonctions monotones sont intégrables.
- Soit la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ est rationnel} \\ 0 & \text{si sinon} \end{cases}$$

On a $i_0^1(f) \leqslant 0 < 1 \leqslant I_0^1(f) \Rightarrow i_0^1(f) \neq I_0^1(f)$, (Les bornes inférieure et supérieure ne coïncident pas) donc f n'est pas Riemann intégrable sur $[0,1]$.

Exemple 2.5 Soit la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Montrons qu'elle est intégrable et calculons $\int_0^1 f(x)dx$.

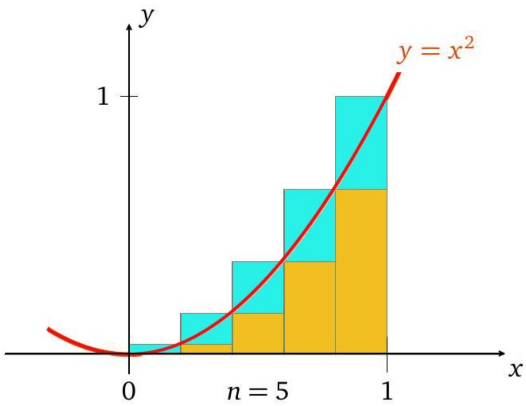

Figure 2.9

En effet, soit $n \geqslant 1$ et considérons la subdivision régulière de $[0,1]$, $S = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{i}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1\right)$. Sur l'intervalle $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ on a

$$\forall x \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right], \quad \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \leqslant x^2 \leqslant \left(\frac{i}{n}\right)^2.$$

On définit une fonction en escalier ϕ^- au-dessous de f par $\phi^-(x) = \frac{(i-1)^2}{n^2}$ si $x \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right[$ (pour chaque $i = 1, \ldots, n$) et $\phi^-(1) = 1$. De même on construit une fonction en escalier ϕ^+ au-dessus de f définie par $\phi^+(x) = \frac{i^2}{n^2}$ si $x \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right[$ (pour chaque $i = 1, \ldots, n$) et $\phi^+(1) = 1$. ϕ^- et ϕ^+ sont des fonctions en escalier et l'on a $\phi^- \leqslant f \leqslant \phi^+$.
L'intégrale de la fonction en escalier ϕ^+ est par définition

$$\int_0^1 \phi^+(x)dx = \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^2}\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) = \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^2}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^n i^2.$$

On a $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (on peut vérifier cette formule par récurrence), donc

$$\int_0^1 \phi^+(x)dx = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

De même pour la fonction ϕ^- :

$$\int_0^1 \phi^-(x)dx = \sum_{i=1}^n \frac{(i-1)^2}{n^2}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}.$$

Maintenant $i_0^1(f)$ est la borne supérieure sur toutes les fonctions en escalier inférieures à f donc en particulier

$i_0^1(f) \geqslant \int_0^1 \phi^-(x)dx$. De même $I_0^1(f) \leqslant \int_0^1 \phi^+(x)dx$. En résumé :

$$\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \int_0^1 \phi^-(x)dx \leqslant i_0^1(f) \leqslant I_0^1(f) \leqslant \int_0^1 \phi^+(x)dx = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

Lorsque l'on fait tendre n vers $+\infty$ alors les deux extrémités tendent vers $\frac{1}{3}$. On en déduit que $i_0^1(f) = I_0^1(f) = \frac{1}{3}$. Ainsi f est intégrable et $\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$.

2.2.5 Opérations sur les fonctions intégrables

Proposition 2.6

Si f et g sont deux fonctions bornées et intégrables sur $[a,b]$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors λf et $f+g$ sont intégrables sur $[a,b]$ et on a :
- $\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt,$
- $\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt.$

Démonstration Comme f et g sont intégrables alors il existe des suites $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$, $(\psi_n)_{n\geqslant 1}$, $(\varphi'_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\psi'_n)_{n\geqslant 1}$ de fonctions en escalier telles que pour tout $n \geqslant 1$:

$$\varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n \text{ et } \varphi'_n \leqslant g \leqslant \psi'_n$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b (\psi_n - \varphi_n)(t) = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b (\psi'_n - \varphi'_n)(t) = 0$$

Il s'en suit que :
- Si $\lambda > 0$, alors : $\lambda\varphi_n \leqslant \lambda f \leqslant \lambda\psi_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b (\lambda\psi_n - \lambda\varphi_n)(t)dt = 0$.
- si $\lambda < 0$, alors : $\lambda\psi_n \leqslant \lambda f \leqslant \lambda\varphi_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b (\lambda\varphi_n - \lambda\psi_n)(t) = 0$.
- Pour $\lambda = 0$ c'est trivial.

Donc λf est intégrable sur $[a,b]$.

On a déjà vu que, pour les fonctions en escalier, l'intégrale est linéaire et de la linéarité de la limite on déduit que :

$$\begin{aligned}
\int_a^b \lambda f(t)dt &= \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \lambda\varphi_n(t)dt \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\lambda \int_a^b \varphi_n(t)dt\right) \\
&= \lambda \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(t)dt \\
&= \lambda \int_a^b f(t)dt
\end{aligned}$$

Par ailleurs on a $\varphi_n + \varphi'_n \leqslant f + g \leqslant \psi_n + \psi'_n$, et

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \int_a^b (\psi_n + \psi'_n)(t)dt &= \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n dt + \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi'_n dt \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n dt + \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi'_n dt \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_a^b (\varphi_n + \varphi'_n)(t)dt \\
&= \int_a^b (f+g)(t)dt.
\end{aligned}$$

C'est ce qu'il fallait démontrer. □

2.2.6 Intégrales et inégalités

Les inégalités liées aux intégrales de fonctions en escalier vont s'étendre sans difficulté aux fonctions Riemann intégrables.

Proposition 2.7

Soient f et g deux fonctions bornées et intégrables sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.

1. *Si $f \geqslant 0$ sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.*
2. *Si $f \geqslant g$ sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant \int_a^b g(t)dt$.*

Démonstration

1. Comme f est intégrable, on sait qu'il existe une suite $(\psi_n)_n$ de fonctions en escalier telles que $f \leqslant \psi_n$ pour tout n et

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(t)dt$$

Comme f est positive, toutes les fonctions ψ_n le sont aussi, donc les intégrales $\int_a^b \psi_n(t)dt$ sont positives et leur limite aussi.

2. Il suffit d'appliquer 1) à $f - g \geqslant 0$

□

Considérons une fonction f bornée sur un intervalle $[a,b]$ et posons

$$f_-(x) = \max\{-f(x), 0\} \;\text{ et }\; f_+(x) = \max\{f(x), 0\} \quad \text{pour tout } x \in [a,b]$$

Il est clair que ces deux fonctions sont positives et que

$$f = f_+ - f_- \;\text{ et }\; |f| = f_+ + f_-$$

Proposition 2.8

Soit f une fonction bornée intégrable sur $[a,b]$, alors f_+, f_- et $|f|$ sont aussi intégrables et

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|dt$$

Démonstration Comme f est intégrable alors il existe des fonctions en escalier $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ vérifiant $\varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n$ et dont les intégrales convergent vers celle de f. On vérifie alors facilement que

$$(\varphi_n)_+ \leqslant f_+ \leqslant (\psi_n)_+$$

et que $(\psi_n)_+ - (\varphi_n)_+ \leqslant \psi_n - \varphi_n$. Donc f_+ est intégrable sur $[a,b]$. Par la même méthode, f_- est intégrable sur $[a,b]$, d'où $|f| = f_+ + f_-$ est intégrable sur $[a,b]$.

L'inégalité des intégrales découle de 2) de la proposition (2.7) appliquée à $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$ □

Théorème 2.3 (Première Formule de la moyenne)

Soit f une fonction bornée et intégrable sur un intervalle $[a,b]$ avec $a < b$. Si pour tout $x \in [a,b]$ on a $m \leq f(x) \leq M$, alors

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \leq M.$$

Démonstration Comme on a $m \leqslant f \leqslant M$ on en déduit $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant M(b-a)$, d'où

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \leq M.$$

□

Application

Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\int_0^x \frac{e^{t^2}}{2+\cos(t)} dt \right)$

Solution

Pour calculer cette limite, il suffit d'appliquer la formule de la moyenne à $[a,b] = [0,x]$ *et à la fonction* $t \mapsto f(t) = \frac{e^{t^2}}{2+\cos(t)}$ *qui est continue sur* $\mathbb{R}$*. Pour* x *au voisinage de* 0^+ *on a* $[0,x] \subset [0,1]$*. Soient alors* $m = \min\{f(t), t \in [0,1]\}$ *et* $M = \max\{f(t), t \in [0,1]\}$*. La formule de la moyenne nous mène à*

$$m \leqslant \frac{1}{x-0} \int_0^x \frac{e^{t^2}}{2+\cos(t)} \leqslant M$$

Par suite

$$xm \leqslant \int_0^x \frac{e^{t^2}}{2+\cos(t)} dt \leqslant xM$$

D'où

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\int_0^x \frac{e^{t^2}}{2+\cos(t)} dt \right) = 0$$

Théorème 2.4 (Formule de la moyenne (Généralisation))

Soient f *une fonction réelle continue sur* $[a,b]$ *et* g *intégrable sur* $[a,b]$ *avec* g *de signe constant. Alors il existe* $c \in [a,b]$ *tel que*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

♡

Démonstration On peut supposer que g est positive (sinon on peut considérer $-g$). La fonction f est continue sur $[a,b]$, donc elle est bornée et atteint ses bornes :

$$m = \min\{f(x) : a \leqslant x \leqslant b\}, \quad M = \max\{f(x) : a \leqslant x \leqslant b\}$$

Par ailleurs on a ;

$$m \int_a^b g(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M \int_a^b g(x)dx$$

- Si $\int_a^b g(x)dx = 0$, d'après la dernière inégalité, $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ et le théorème devient trivial.
- Si $\int_a^b g(x)dx \neq 0$ alors $\int_a^b g(x)dx > 0$ et les inégalités précédentes nous donnent

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leqslant M$$

Le théorème des valeurs intermédiaires nous assure l'existence d'un $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$. Ce qu'il fallait démontrer.

□

Théorème 2.5 (Deuxième Formule de la moyenne)

Soient f et g deux fonctions numériques continues sur $[a,b]$ telles que f est positive et décroissante et g est de signe constant sur $[a,b]$, alors

$$\text{il existe } c \in [a,b] \text{ tel que } \int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^c g(x)dx.$$

Démonstration Considérons le cas où g est continue et négative sur $[a,b]$. Comme f est positive et décroissante, on a : $0 \leq f(x) \leq f(a)$ pour tout $x \in [a,b]$ et par suite : $0 \geq f(x)g(x) \geq f(a)g(x)$.

Par conséquent on a : $f(a)\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(a)g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq 0$

En posant $F(x) = f(a)\int_a^x g(x)dx$ on vérifie facilement que :

- La fonction F est continue sur $[a,b]$
- $F(a) = 0$ et $F(b) = f(a)\int_a^b g(x)dx \leq 0$

donc

$$F(b) \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq F(a) = 0$$

Alors d'après le TVI , il existe $c \in [a,b]$ tel que :

$$F(c) = \int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^c g(x)dx.$$

□

2.2.7 Intégrales et produits

Proposition 2.9

Si f et g sont deux fonctions bornées et intégrables sur $[a,b]$ alors fg est bornée et intégrable sur $[a,b]$.
En général $\int_a^b (fg)(t)dt \neq \left(\int_a^b f(t)dt\right)\left(\int_a^b g(t)dt\right)$.

Démonstration

- Cas où f et g sont toutes les deux positives. On pose

$$M = \max\{f(x), a \leqslant x \leqslant b\} \text{ et } N = \max\{g(x), a \leqslant x \leqslant b\}$$

Par définition, il existe des fonctions en escalier $(\varphi_n)_n, (\psi_n)_n, (u_n)_n$ et $(v_n)_n$ telles que

$$\varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n \text{ et } u_n \leqslant g \leqslant v_n$$

Posons

$$\varphi_n'(x) = \max\{\varphi_n(x), 0\}, \psi_n'(x) = \min\{\psi_n(x), M\}$$
$$u_n'(x) = \max\{u_n(x), 0\}, v_n'(x) = \min\{v_n(x), N\}$$

Ce sont toutes des fonctions en escaliers qui vérifient bien :

$$\varphi_n \leqslant \varphi_n' \text{ et } 0 \leqslant \varphi_n' \leqslant f \leqslant \psi_n' \leqslant \psi_n$$
$$u_n \leqslant u_n' \text{ et } 0 \leqslant u_n' \leqslant g \leqslant v_n' \leqslant v_n$$

A cause de la positivité, on aura donc

$$\varphi_n' u_n' \leqslant fg \leqslant \psi_n' v_n'$$

le fonctions qui encadrent fg sont en escalier. Montrons la convergence

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b \left(\psi_n' v_n' - \varphi_n' u_n'\right)(t)dt = 0$$

Pour cela on va utiliser les assertion satisfaites suivantes

$$\begin{aligned}
v_n' \leqslant N, \quad \varphi_n' \leqslant \psi_n' \leqslant M \\
0 \leqslant \psi_n' - \varphi_n' \leqslant \psi_n - \varphi_n \\
0 \leqslant v_n' - u_n' \leqslant v_n - u_n \\
\lim_{n \to +\infty} \int_a^b (\psi_n - \varphi_n)(t) dt = 0 \\
\lim_{n \to +\infty} \int_a^b (v_n - u_n)(t) dt = 0
\end{aligned} \tag{2.1}$$

donc :

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \int_a^b \left(\psi_n' v_n' - \varphi_n' u_n'\right)(t) dt &= \int_a^b \left(\psi_n' v_n' - \varphi_n' v_n' + \varphi_n' v_n' - \varphi_n' u_n'\right)(t) dt \\
&= \int_a^b \left(\psi_n' v_n' - \varphi_n' v_n'\right)(t) dt + \int_a^b \left(\varphi_n' v_n' - \varphi_n' u_n'\right)(t) dt \\
&= \int_a^b v_n'(t) \left(\psi_n' - \varphi_n'\right)(t) dt + \int_a^b \varphi_n'(t) \left(v_n' - u_n'\right)(t) dt \\
&\leqslant \int_a^b v_n'(t) \left(\psi_n' - \varphi_n'\right)(t) dt + \int_a^b \psi_n'(t) \left(v_n' - u_n'\right)(t) dt \\
&\leqslant N \int_a^b \left(\psi_n' - \varphi_n'\right)(t) dt + M \int_a^b \left(v_n' - u_n'\right)(t) dt \\
&\leqslant N \int_a^b \left(\psi_n - \varphi_n\right)(t) dt + M \int_a^b \left(v_n - u_n\right)(t) dt
\end{aligned}$$

(2.1) montre que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b \left(\psi_n' v_n' - \varphi_n' u_n'\right)(t) dt = 0$$

Donc fg est intégrable.

- Cas où f et g bornées intégrables non nécessairement positive. Posons

$$m = \min\{f(x), a \leqslant x \leqslant b\} \text{ et } m' = \min\{g(x), a \leqslant x \leqslant b\}$$

Les fonctions $f - m$ et $g - m'$ qui sont bornées et intégrables sont positives. D'après le cas précédent, $(f - m)(g - m')$, est intégrable. Puisque

$$fg = (f - m)\left(g - m'\right) + mg + m'f - mm'$$

on en déduit que fg est bornée Riemann intégrable.

Pour voir qu'on n'a pas toujours l'égalité, il suffit de prendre l'exemple où $[a, b] = [0, 2]$ et $f = g = 1$

$$\int_0^2 (fg)(t) dt = \int_0^2 dt = 2 \neq 4 = \left(\int_0^2 dt\right)^2 = \int_0^2 (f)(t) dt \times \int_0^2 (g)(t) dt$$

$\square$

Théorème 2.6 (Inégalité de Cauchy-Schwartz)

Soient f et g deux fonctions bornées et intégrables sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, alors

$$\left(\int_a^b f(x) g(x) dx\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f(x)^2 dx\right)\left(\int_a^b g(x)^2 dx\right)$$

♡

Démonstration Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction $f + \lambda g$ est intégrable, donc $(f + \lambda g)^2$ l'est aussi. Comme c'est une fonction positive, alors

$$\int_a^b (f(x)+\lambda g(x))^2 dx \geqslant 0$$

Ainsi

$$\lambda^2 \int_a^b (g(x))^2 dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b (f(x))^2 dx \geqslant 0$$

est un polynôme de degré deux en λ et qui est toujours du signe du coefficient $\int_a^b (g(x))^2 dx$ de λ^2, donc son discriminant est négatif, c'est-à-dire :

$$4\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 - 4\left(\int_a^b (f(x))^2 dx\right)\left(\int_a^b (g(x))^2 dx\right) \leqslant 0$$

d'où

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f(x)^2 dx\right)\left(\int_a^b g(x)^2 dx\right)$$

□

2.3 Familles de fonctions intégrables

2.3.1 Manipulation de fonctions intégrables

Proposition 2.10

Soient f une fonction bornée et intégrable et g une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et égale à f sauf sur un nombre finis de points, alors g est intégrable et

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

♠

Démonstration Par hypothèse il existe une subdivision $S=(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ de $[a,b]$ telle que $f=g$ sur chacun des intervalles $]x_i,x_{i+1}[$. La fonction $f-g$ est donc nulle sur chacun des intervalles $]x_i,x_{i+1}[$. En d'autres termes, la fonction $f-g$ est en escalier. Elle est donc intégrable et son intégrale est clairement nulle. La fonction $g=f-(f-g)$ est donc intégrable et son intégrale est égale à celle de f. □

Remarque Cette proposition signifie que si on change les valeurs d'une fonction intégrable sur $[a,b]$ en un nombre fini de points de $[a,b]$ alors elle reste encore intégrable et garde la même intégrale.

2.3.2 Monotonie

Théorème 2.7

Toute fonction monotone sur un compact $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ est intégrable.

♡

Démonstration Supposons que $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est croissante (sinon il suffit de considérer $-f$ qui sera croissante).

Pour tout $n\geqslant 1$ considérons la subdivision : $S_n=\left\{x_0=a, x_1=a+\frac{b-a}{n},\ldots,x_i=a+i\frac{b-a}{n},\ldots,x_n=b\right\}$, qui permet de construire les fonctions en escalier :

$$\varphi_n(t)=f(x_i),\forall t\in]x_i,x_{i+1}[, i=0,1,2,\ldots,n-1$$

et

$$\psi_n(t)=f(x_{i+1}),\forall t\in]x_i,x_{i+1}[, i=0,1,2,\ldots,n-1$$

On a évidemment $\varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n$ et :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \int_a^b (\psi_n - \varphi_n)(t)dt &= \sum_{i=0}^{i=n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i))(x_{i+1} - x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{i=n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{i=n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) \\ &= \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) \end{aligned}$$

ce qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b (\psi_n - \varphi_n)(t)dt = 0$, par suite f est intégrable sur $[a,b]$. □

2.3.3 Continuité

Définition 2.6

Une fonction f est continue en un point a d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_{a,\varepsilon} > 0, |x-a| < \eta_{a,\varepsilon} \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

f est dite continue sur I si f est continue en tout point a de I. ♣

Remarque Dans cette définition, il faut noter que le $\eta_{a,\varepsilon} > 0$ dépend de ε et de a.

Définition 2.7

Une fonction f est dite uniformément continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0, \quad |x-y| < \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

♣

Théorème 2.8 (Heine)

Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a,b]$ est uniformément continue sur $[a,b]$ ♡

Démonstration Si f est continue, montrons qu'elle est uniformément continue, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0, \quad |x-y| < \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Raisonnons par absurde, et supposons que $\exists \varepsilon_0 > 0$ tel que $\forall \eta > 0$ on peut trouver x_η, y_η dans $[a,b]$ tels que $|x_\eta - y_\eta| < \eta$ et $|f(x_\eta) - f(y_\eta)| \geqslant \varepsilon_0$, ceci étant vrai pour tout $\eta > 0$ en particulier pour les $\frac{1}{n}$, $n \geqslant 1$. Il existe donc des suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ et $(y_n)_{n\geqslant 1}$ dans $[a,b]$ telles que

$$|x_n - y_n| < 1/n \quad \text{et} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon_0 \qquad (\star)$$

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite extraite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\geqslant 1}$ qui converge dans $[a,b]$ vers c.

Alors $\left(y_{\varphi(n)}\right)_{n\geqslant 1}$ converge aussi vers c si $n \to +\infty$, puisque

$$\left|y_{\varphi(n)} - c\right| \leqslant \left|y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}\right| \leqslant \left|x_{\varphi(n)} - c\right| < \frac{1}{\varphi(n)} + \left|x_{\varphi(n)} - c\right| \to 0$$

écrivons $(\star)$ pour $\varphi(n)$, on aura : $\left|f\left(x_{\varphi(n)}\right) - f\left(y_{\varphi(n)}\right)\right| \geq \varepsilon$, ce qui mène à la contradiction avec la continuité de f en c si on fait tendre n vers l'infini. □

Théorème 2.9

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue alors f est intégrable.

Démonstration Par hypothèse, f est continue, d'après le théorème de Heine, f est aussi uniformément continue, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ telle que

$$|x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

On considère une subdivision $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant m-1}$ telles que $\max(x_{i+1} - x_i) < \eta$, puisque $\frac{b-a}{m}$ converge vers zéro, soit $m \geqslant 1$ tel que $\frac{b-a}{m} < \eta$, Il suffit de prendre $S = \left\{x_i = a + i\frac{b-a}{m}\right\}_{0 \leqslant i \leqslant m-1}$, on définit les fonctions en escalier :

$$\varphi_\varepsilon(t) = f(x_i) - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \text{et} \quad \psi_\varepsilon(t) = f(x_i) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad x_i < t < x_{i+1}, 0 < i < n-1$$

Pour tout $t \in]x_i, x_{i+1}[$ on a $0 < t - x_i < x_{i+1} - x_i < \eta$ donc $|f(x_i) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ ce qui signifie que

$$f(x_i) - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} < f(t) < f(x_i) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

c'est-à-dire

$$\varphi_\varepsilon(t) < f(t) < \psi_\varepsilon(t)$$

par ailleurs

$$\begin{aligned}
\int_a^b (\psi_\varepsilon(t) - \varphi_\varepsilon(t))\, dt &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(x_i) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} - f(x_i) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \right)(x_{i+1} - x_i) \\
&= \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{\varepsilon}{(b-a)} \right) \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

Pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on aura alors des fonctions en escalier $(\varphi_n)_n$, $(\psi_n)_n$ telles que :

$$\varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \int_a^b (\psi_n - \varphi_n)(t) dt = 0$$

□

2.3.4 Relation de Chasles

Proposition 2.11 (Relation de Chasles)

Soit f une fonction bornée sur $[a,b]$ et $c \in [a,b]$.

(i) Si f est intégrable sur $[a,b]$ alors f est intégrable sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$

(ii) Si f est intégrable sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$ alors f est intégrable sur $[a,b]$

*(iii) Si f est intégrable sur $[a,b]$ alors on a la **relation de Chasles***

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Démonstration La relation de Chasles est valable pour les fonctions en escalier.

(i) Si pour $\varepsilon > 0$ il existe φ et ψ en escalier sur $[a,b]$ telles que

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi \quad \text{et} \quad \int_a^b (\psi - \varphi)(t)dt < \varepsilon$$

alors les restrictions ψ_1 et φ_1 (respectivement ψ_2 et φ_2 de φ et ψ à $[a,c]$ (respectivement à $[c,b]$) sont en escalier et encadrent f avec

$$0 \leqslant \int_a^b (\psi_1 - \varphi_1)(t)dt < \varepsilon \text{ et } 0 \leqslant \int_a^b (\psi_2 - \varphi_2)(t)dt < \varepsilon$$

alors f est intégrable sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$.

(ii) Si f est intégrable sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$ alors pour $\varepsilon > 0$ il existe ψ_1, φ_1 et ψ_2, φ_2 respectivement sur $[a,c]$ et $[c,b]$ telles que $\varphi_1 \leqslant f \leqslant \psi_1$ et $\varphi_2 \leqslant f \leqslant \psi_2$ avec $0 \leqslant \int_a^c (\psi_1 - \varphi_1)(t)dt < \varepsilon/2$ et $0 \leqslant \int_c^b (\psi_2 - \varphi_2)(t)dt < \varepsilon/2$.

Considérons les fonctions φ et ψ données sur $[a,b]$ par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{si } a \leqslant x < c \\ \varphi_2(x) & \text{si } c \leqslant x \leqslant b \end{cases}$$

et

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_1(x) & \text{si } a \leqslant x < c \\ \psi_2(x) & \text{si } c \leqslant x \leqslant b \end{cases}$$

Il est claire que φ et ψ sont en escalier sur $[a,b]$ avec

$$0 \leqslant \int_a^b (\psi - \varphi)(t)dt = \int_a^c (\psi_1 - \varphi_1)(t)dt + \int_c^b (\psi_2 - \varphi_2)(t)dt < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

ainsi f est intégrable sur $[a,b]$

(iii) Pour les fonctions en escalier on a si

$$\varphi_{1,n} \leqslant f \leqslant \psi_{1,n} \text{ sur } [a,c] \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} \int_a^c (\psi_{1,n} - \varphi_{1,n})(t)dt = 0$$

et

$$\varphi_{2,n} \leqslant f \leqslant \psi_{2,n} \text{ sur } [c,b] \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} \int_c^b (\psi_{2,n} - \varphi_{2,n})(t)dt = 0$$

alors φ_n et ψ_n définie comme φ et ψ ci-dessus satisfont

$$\varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n \text{ sur } [c,b] \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} \int_c^b (\psi_n - \varphi_n)(t)dt = 0$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)dt &= \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(t)dt \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^c \psi_n(t)dt + \int_c^b \psi_n(t)dt \right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_a^c \psi_n(t)dt + \lim_{n\to+\infty} \int_c^b \psi_n(t)dt \\ &= \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt \end{aligned}$$

□

Corollaire 2.2

Si f est intégrable sur $[a,b]$ alors

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

En particulier, la relation

$$\int_e^d f(x)dx = \int_e^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx$$

est vraie quelques que soient les relations d'ordre entre e, c et d dans $[a, b]$. ♡

Démonstration Puisque $0 = \int_a^a f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^a f(t)dt$ alors $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ □

Théorème 2.10

Si f est continue (respectivement monotone) par morceaux sur $[a, b]$ alors f est intégrable sur $[a, b]$. ♡

Démonstration Se déduit d'après la relation de Chasles et la propriété de la continuité et de la monotonie. □

Proposition 2.12

Soient f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et a un réel.

- *Si f est impaire, alors $\int_{-a}^a f(t)dt = 0$.*
- *Si f est paire, alors $\int_{-a}^a f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$.*
- *Si f est périodique de période $T > 0$, alors $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$.* ♠

Démonstration

- Une fonction f est impaire donc $f(-t) = -f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
$$\int_{-a}^a f(t)\,dt = \int_{-a}^0 f(t)\,dt + \int_0^a f(t)\,dt.$$
Effectuons un changement de variable dans la première intégrale : posons $u = -t$, donc $du = -dt$, et les bornes passent de $t = -a$ à $t = 0$ à $u = a$ à $u = 0$:
$$\int_{-a}^0 f(t)\,dt = \int_a^0 f(-u)(-du).$$
Puisque f est impaire, $f(-u) = -f(u)$, donc :
$$\int_{-a}^0 f(t)\,dt = \int_a^0 -f(u)(-du) = \int_a^0 f(u)\,du = -\int_0^a f(u)\,du.$$
D'où :
$$\int_{-a}^a f(t)dt = -\int_0^a f(u)du + \int_0^a f(t)dt = -\int_0^a f(t)dt + \int_0^a f(t)dt = 0.$$
- Si f est paire alors $f(-t) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
$$\int_{-a}^a f(t)dt = \int_{-a}^0 f(t)dt + \int_0^a f(t)dt.$$
Effectuons le même changement de variable $u = -t$ dans la première intégrale :
$$\int_{-a}^0 f(t)dt = \int_a^0 f(-u)(-du).$$
Puisque f est paire, $f(-u) = f(u)$, donc :
$$\int_{-a}^0 f(t)\,dt = \int_a^0 f(u)(-du) = \int_a^0 -f(u)\,du = -\int_a^0 f(u)\,du = \int_0^a f(u)\,du.$$
Donc :
$$\int_{-a}^a f(t)\,dt = \int_0^a f(u)\,du + \int_0^a f(t)\,dt = \int_0^a f(t)\,dt + \int_0^a f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt.$$
- Si f est périodique de période T alors $f(t+T) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. montrons que :
$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt.$$
Effectuons un changement de variable dans lintégrale $\int_a^{a+T} f(t)\,dt$: posons $u = t - a$, donc $du = dt$, et

les bornes passent de $t = a$ à $t = a + T$ à $u = 0$ à $u = T$:

$$\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(u+a)\,du.$$

Posons $g(u) = f(u + a)$. Puisque f est périodique de période T,

$$g(u + T) = f(u + a + T) = f(u + a) = g(u),$$

Ainsi, g est aussi périodique de période T. L'intégrale devient :

$$\int_0^T f(u+a)du = \int_0^T g(u)du.$$

Pour une fonction périodique continue, l'intégrale sur un intervalle de longueur T est indépendante du point de départ. Considérons la différence :

$$\int_a^{a+T} f(t)dt - \int_0^T f(t)dt = \int_0^T f(u+a)du - \int_0^T f(u)du = \int_0^T [f(u+a) - f(u)]du.$$

Puisque $f(u+T) = f(u)$, l'intégrale d'une différence sur une période complète dépend de la translation a. Cependant, posons $F(x) = \int_0^x f(t)dt$:

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = F(a+T) - F(a), \qquad \int_0^T f(t)dt = F(T) - F(0).$$

Comme $f(t+T) = f(t)$, $F'(t+T) = F'(t)$, et $F(t+T) = F(t)+C$ (où C est constant sur une période). Puisque $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ et f est continue :

$$F(T) = \int_0^T f(t)\,dt, \quad F(a+T) = F(a) + \int_a^{a+T} f(t)\,dt,$$

mais $\int_a^{a+T} f(t)\,dt$ doit être invariant.

$$\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(u+a)\,du = \int_0^T f(u)\,du,$$

car les valeurs de f se répètent sur une période T. Donc :

$$\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt.$$

$\square$

Annexes

Annexe A Identités algébriques

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + b^n \quad \text{avec} \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$a^{2m+1} + b^{2m+1} = (a+b)(a^{2m} - a^{2m-1}b + \cdots - ab^{2m-1} + b^{2m})$$

Cas particuliers (a = 1) $\quad 1 - x^{n+1} = (1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n)$

Annexe B Trigonométrie

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$
$0 = 0°$	0	1	0	$-$
$\pi/6 = 30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\pi/4 = 45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\pi/3 = 60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\pi/2 = 90°$	1	0	$-$	0

$$\sin(x+2\pi) = \sin x$$

$$\sin(x+\pi) = -\sin x$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$$

$$\cos(x+2\pi) = \cos x$$

$$\cos(x+\pi) = -\cos x$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$$

$$\tan(x+2\pi) = \tan x$$

$$\tan(x+\pi) = \tan x$$

$$\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\cot x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cot x$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

$$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$$

$$\cos(n\pi) = (-1)^n$$

$$\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{1+(-1)^{n+1}}{2}$$

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$$

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1-\tan x\tan y}$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1+\tan x\tan y}$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

$$\sin mx\sin nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right]$$

$$\sin mx\cos nx = \frac{1}{2}\left[\sin(m-n)x + \sin(m+n)x\right]$$

$$\cos mx\cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right]$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\arg\sinh x = \log(x+\sqrt{x^2+1})$$

$$\arg\cosh x = \log(x+\sqrt{x^2-1})$$

Annexe C Développements limités usuels

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p})$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$$

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1})$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p})$$

$$\tanh(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{R},$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{2 \times 3} + \frac{1 \times 3}{2^2 \times 2!} \times \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2^n n!} \times \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$