Département de mathématiques

Année universitaire 2024-2025
SMA-LNG S IV - Analyse 5

Analyse 5

Y. Mazigh

Table des matières

Chapitre 1

Intégrale curviligne

1.1 Intégrale curviligne

La notion d'intégrale curviligne, apparaît naturellement, comme une généralisation de l'intégrale d'une fonction d'une variable réelle. En effet, cette dernière peut être considérée comme une intégrale le long d'un segment AB. L'intégrale curviligne elle, sera une intégrale le long d'un arc de courbe joignant deux points du plan ou de l'espace.

Définition 1 *Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on appelle arc paramétré (ou **chemin**) de classe $\mathcal{C}^k$ de $\mathbb{R}^n$ toute application γ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ qui est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I. On note $\gamma \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$.*

Considérons un arc paramétré $\gamma : t \in I \mapsto (\gamma_1(t), \cdots, \gamma_n(t))$. Si on note $M(t)$ le point de $\mathbb{R}^n$ dont les coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ sont $(\gamma_1(t), \cdots, \gamma_n(t))$ alors lorsque le paramètre t parcourt I, le point $M(t)$ décrit un sous-ensemble C de $\mathbb{R}^n$, appelé courbe paramétrée de (ou associée à) γ. On dit que l'arc paramétré γ est un paramétrage de la courbe paramétrée C.
Nous considérons dans cette partie l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique défini par

$$\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ et $\mathbf{y} = (y_1, \cdots, y_n)$. On note $||\mathbf{x}|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ la norme euclidienne d'un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

1.1.1 Intégrale curviligne d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$

On se donne une application f d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ continue (une telle application est qualifiée de champ de vecteurs sur U) et une courbe paramétrée C de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dont un paramétrage est $\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b], U)$. En chaque point $M(t) = \gamma(t)$ de la courbe paramétrée C, on dispose du vecteur $f(\gamma(t))$ correspondant à la valeur prise par l'application f en $M \in U$ et du vecteur $\gamma'(t) \in \mathbb{R}^n$ correspondant au vecteur tangent à la courbe paramétrée C au point M. On peut ainsi définir l'application

$$t \in [a, b] \longmapsto f(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t)$$

qui à une valeur du paramètre t associe le produit scalaire des deux vecteurs $f(\gamma(t))$ et $\gamma'(t)$.

Définition 2 *Soient f une application continue sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et C une courbe paramétrée dont un paramétrage est $\gamma \in \mathcal{C}^1([a,b],U)$. On appelle intégrale curviligne de f le long de C et on note $\int_C f.\mathrm{d}\mathbf{x}$ le réel défini par*

$$\int_C f.\mathrm{d}\mathbf{x} := \int_a^b f(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t)\ \mathrm{dt}.$$

Remarque 1 *L'intégrale curviligne $\int_C f.\mathrm{d}\mathbf{x}$ dans certains contextes appelée la circulation du champ de vecteurs f le long de la courbe C.*

On rappelle que deux chemins $\gamma_1 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $\gamma_2 : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sont équivalent s'il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\theta : [a,b] \longrightarrow [c,d]$, strictement croissante, telle que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \theta$.

Proposition 1 *L'intégrale curviligne de f le long de C est invariante par changement de paramétrage équivalent de la courbe C.*

Démonstration Soient $\gamma_1 \in \mathcal{C}^1([a,b],U)$ et $\gamma_2 \in \mathcal{C}^1([c,d],U)$ deux paramétrages équivalents de la courbe paramétrée C. Alors il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\theta : [a,b] \longrightarrow [c,d]$, strictement croissante, telle que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \theta$. Ainsi

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\gamma_1(t)) \bullet \gamma_1'(t)\ \mathrm{dt} &= \int_a^b f(\gamma_2 \circ \theta(t)) \bullet ((\gamma_2 \circ \theta))'(t)\ \mathrm{dt} \\ &= \int_a^b f(\gamma_2(\theta(t)) \bullet (\gamma_2'(\theta(t))\theta'(t)\ \mathrm{dt} \\ &= \int_c^d f(\gamma_2(t)) \bullet \gamma_2'(t)\ \mathrm{dt}\end{aligned}$$

□

Exemple 1

— *Soit C le segment de droite joignant les points $A = (0,1)$ et $B = (1,1)$, orienté de A vers B, et soit*

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (xy, x+y) \end{array}$$

Un paramétrage de C est

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (t,1) \end{array}$$

Pour $t \in [0,1]$, on a $\gamma'(t) = (1,0)$ et $f(\gamma(t)) = (t, 1+t)$. Donc

$$\int_C f\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_0^1 f(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t)\mathrm{dt} = \int_0^1 t\mathrm{dt} = \frac{1}{2}$$

— *Considérons à nouveau l'application f et C_1 le segment de droite joignant les points $A = (0,1)$ et $B = (1,1)$, orienté de B vers A. Un paramétrage de C_1 est*

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (1-t,1) \end{array}$$

Pour $t \in [0,1]$, on a $\gamma'(t) = (-1,0)$ et $f(\gamma(t)) = (1-t, 2-t)$. Donc

$$\int_C f\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_0^1 f(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t)\mathrm{dt} = \int_0^1 t - 1\mathrm{dt} = -\frac{1}{2}$$

$\square$

Par définition, l'intégrale curviligne hérite des propriétés de l'intégrale de Riemann. En particulier, la relation de Chasles permet d'étendre la définition 2 à des courbes qui ne sont pas de classe C^1. Lorsque C est une courbe de $\mathcal{C}^1$ par morceaux, c'est-à-dire, C admet une paramétrisation $\gamma : [a,b] \longrightarrow U$ de $\mathcal{C}^1$ par morceaux,i.e, qu'il existe une subdivision $(c_k)_{k\in\{1,\cdots,N\}}$ de l'intervalle $[a,b]$ telle que pour tout entier $k \in \{1,\cdots,N\}$ l'application γ est de classe sur $[c_k, c_{k+1}]$. Désignons par C_k la courbe de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dont un paramétrage est la restriction de l'application γ à l'intervalle $[c_k, c_{k+1}]$. L'intégrale curviligne le long de la courbe C d'une application f continue de U dans $\mathbb{R}^n$ est donnée par

$$\int_C f \mathrm{d}\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{N} \int_{C_k} f \mathrm{d}\mathbf{x}$$

Exemple 2 *Calculer l'intégrale curviligne le long du carré de sommets $A = (1,1)$, $B = (-1,1)$, $C = (-1,-1)$ et $D = (1,-1)$ parcouru dans le sens trigonométrique de l'application $f : (x,y) \longmapsto (x^2, x-y)$.*

1.1.2 Intégrale curviligne d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

Dans le paragraphe précédent, nous avons introduit l'intégrale d'une application à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ le long d'une courbe de $\mathbb{R}^n$. On définit l'intégrale d'une application à valeurs dans $\mathbb{R}$ le long d'une courbe de $\mathbb{R}^n$ de la façon suivante.

Définition 3 *Soient f une application continue sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et C une courbe paramétrée dont un paramétrage est $\gamma \in \mathcal{C}^1([a,b], U)$. On appelle intégrale curviligne de f le long de C et on note $\int_C f \mathrm{d}\tau$, l'intégrale*

$$\int_C f \mathrm{d}\tau := \int_a^b f(\gamma(t)) \Big|\Big|\gamma'(t)\Big|\Big| \mathrm{dt}$$

1.1.3 Longueur d'une courbe

On rappelle qu'un chemin $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est **régulier** si :

1. γ est de classe $\mathcal{C}^1$;
2. $\forall t \in]a,b[, \gamma'(t) \neq 0$

Définition 4 *La longueur d'une courbe régulière C est donnée par*

$$\mathrm{Long}(C) := \int_C 1 \,\mathrm{d}\tau = \int_a^b ||\gamma'(t)|| \mathrm{dt}$$

où γ est paramétrage régulier de C.

Exemple 3 *Calculons la longueur du cercle C de centre $(0,0)$ et de rayon R en considérant le paramétrage*

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (R\cos(t), R\sin(t)) \end{array}$$

Pour tout $t \in [0,2\pi]$, le vecteur tangent $\gamma'(t)$ est donné par $\gamma'(t) = (-R\sin t, R\cos t)$ et sa norme vaut $||\gamma'(t)|| = R$. On en déduit que

$$\mathrm{Long}(C) = \int_0^{2\pi} R\mathrm{dt} = 2\pi R$$

Proposition 2 *Soient f une application continue d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et C une courbe paramétrée régulière de $\mathbb{R}^n$ contenue dans l'ouvert U. Alors*

$$\left|\int_C f \mathrm{d}\mathbf{x}\right| \leq \mathrm{Long}(C) \times \sup_{\mathbf{x}\in C} ||f(\mathbf{x})||$$

Démonstration Soit $\gamma \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ un paramétrage de la courbe C. Alors

$$\begin{aligned}
\left|\int_C f \mathrm{d}\mathbf{x}\right| &= \left|\int_a^b f(\gamma(t)).\gamma'(t)\mathrm{dt}\right| \\
&\leq \int_a^b \Big|f(\gamma(t)).\gamma'(t)\Big|\mathrm{dt} \\
&\leq \int_a^b \Big|\Big|f(\gamma(t))\Big|\Big|.\Big|\Big|\gamma'(t)\Big|\Big|\mathrm{dt}
\end{aligned}$$

Puisque pour tout $t \in [a,b]$, on a $\Big|\Big|f(\gamma(t))\Big|\Big| \leq \sup_{\mathbf{x}\in C}\Big|\Big|f(\mathbf{x})\Big|\Big|$, on en déduit que

$$\left|\int_C f \mathrm{d}\mathbf{x}\right| \leq \int_a^b \Big|\Big|f(\gamma(t))\Big|\Big|\mathrm{dt} \times \sup_{\mathbf{x}\in C} ||f(\mathbf{x})|| \leq \mathrm{Long}(C) \times \sup_{\mathbf{x}\in C} ||f(\mathbf{x})||$$

□

Proposition 3 *Toute courbe paramétrée régulière dans $\mathbb{R}^n$ peut être paramétrée par sa longueur.*

Démonstration Soit $\gamma \in \mathcal{C}^1([a,b],U)$ une paramétrisation de C. Notons C_t la courbe paramétrée par la restriction de γ à l'intervalle $[a,t]$. Pour tout $t \in [a,b]$, posons

$$s(t) := \mathrm{Long}(C_t) = \int_a^t \Big|\Big|\gamma'(t)\Big|\Big|\mathrm{dt}$$

On a $s'(t) = \Big|\Big|\gamma'(t)\Big|\Big| > 0$ (C est régulière), donc s est strictement croissante, et par suite s est bijective de $[a,b]$ dans $[0,L]$; $L = \mathrm{Long}(C)$. Ainsi, On peut paramétrer la courbe C par l'application

$$\begin{array}{cccc}
\tau: & [0,L] & \longrightarrow & U \\
 & u & \longmapsto & \gamma(s^{-1}(u))
\end{array}$$

□

Définition 5 *Soit $\gamma \in \mathcal{C}^1([a,b],U)$ un paramétrage d'une courbe C. On appelle abscisse curviligne de C*

$$s(t) := \mathrm{Long}(C_t) = \int_a^t \Big|\Big|\gamma'(t)\Big|\Big|\mathrm{dt}$$

Le paramétrage

$$\begin{array}{cccc}
\tau: & [0,L] & \longrightarrow & U \\
 & u & \longmapsto & \gamma(s^{-1}(u))
\end{array}$$

s'appelle paramétrage de C par l'abscisse curviligne.

Exemple 4 *Soit C le cercle de centre O et de rayon R paramétré par*

$$t \in [0, 2\pi] \longmapsto (R\cos t, R\sin t)$$

Donc

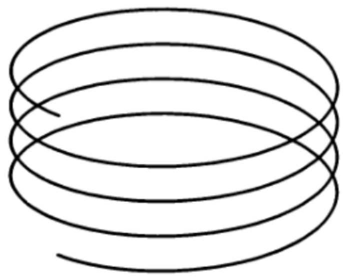
$$s(t) = \int_a^t \left|\left|\gamma'(t)\right|\right| \mathrm{dt} = \int_a^t R\mathrm{dt} = Rt.$$

Ainsi

$$\begin{array}{rccc} \tau : & [0, 2\pi R] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & u & \longmapsto & (\cos(\frac{u}{R}), \sin(\frac{u}{R})) \end{array}$$

est un paramétrage de C par l'abscisse curviligne. □

Exercice 1 *Calculer la longueur de l'hélice C de hauteur h,*



Hélice

dont un paramétrage est

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & [0, h] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & (\cos(t), \sin(t), t) \end{array}$$

Une hélice est une courbe tracée sur un cylindre de révolution, dirigé par la droite (Oz). Le rayon de l'hélice est le rayon du cylindre, et son pas $2\pi b$ est la distance entre deux spires consécutives. Ainsi, un paramétrage d'une hélice de rayon R et de pas $2\pi b$ est

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & (R\cos(t), R\sin(t), bt) \end{array}$$

□