جامعة مولاي إسماعيل
ⵜⴰⵙⴷⴰⵡⵉⵜ ⵎⵓⵍⴰⵢ ⵉⵙⵎⴰⵄⵉⵍ
UNIVERSITÉ MOULAY ISMAÏL
كلية العلوم
ⵜⴰⵖⵣⵓⵜ ⵏ ⵜⵣⵔⴼⵜ
FACULTÉ DES SCIENCES
Département de mathématiques

Année universitaire 2024-2025
SMA-LNG S IV - Analyse 5

# Analyse 5

Y. Mazigh

# Table des matières

**1 Formes différentielles** **3**
1.1 Formes multilinéaires alternées . . . . . 3
1.2 Formes différentielles . . . . . 5
1.3 Forme différentielle de degré 1 . . . . . 7
1.3.1 Intégrale d'une 1-forme le long d'une courbe paramétrée . . . . . 8

# Chapitre 1

# Formes différentielles

## 1.1 Formes multilinéaires alternées

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Pour tout entier $k \geq 1$, on note $\mathcal{L}_k(E)$ l'espace vectoriel des formes $k$-linéaires sur $E$. Un élément $u \in \mathcal{L}_k(E)$ est une application

$$u : E^k \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que $a \longmapsto u(x_1, \cdots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \cdots, x_k)$ est linéaire pour tout choix de $i$, $x_1, \cdots, x_{i-1}$, $x_{i+1}, \cdots, x_k$. On rappelle que $\mathcal{L}_1(E) = E^*$ est l'espace dual de $E$ et que $u \in E^*$ est une forme linéaire sur $E$.
Une forme $u \in \mathcal{L}_k(E)$ est dite *alternée* si

$$u(x_1, \cdots, x_k) = 0$$

dès que $x_i = x_j$ pour $i \neq j$, $(x_1, \cdots, x_k) \in E^k$. Notons $\mathcal{A}_k(E)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_k(E)$ formé des formes $k$-linéaires alternées sur $E$. On convient que $\mathcal{A}_0(E) = \mathbb{R}$ et que $\mathcal{L}_1(E) = \mathcal{A}_1(E) = E^*$.

**Exercice 1**

1. *Montrer que $u \in \mathcal{A}_k(E)$ si et seulement si $u$ est anti-symétrique, c'est-à-dire*

$$u(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_k) = -\,u(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_k)$$

*pour tout choix $u(x_1, \cdots, x_k) \in E^k$, $1 \leq i < j \leq k$.*

2. *Soit $\sigma \in S_k$ une permutation de $\{1, \cdots, k\}$. Montrer que si $u \in \mathcal{A}_k(E)$, alors*

$$u(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(k)}) = \epsilon(\sigma)\, u(x_1, \cdots, x_k)$$

*pour tout $(x_1, \cdots, x_k) \in E^k$, $\epsilon(\sigma)$ étant la signature de $\sigma$.*

Maintenant, si $u_1, \cdots, u_k \in E^*$, on définit le produit extérieur $u_1 \wedge \cdots \wedge u_k$ par

$$\begin{array}{rccc} u = u_1 \wedge \cdots \wedge u_k \,:\, E^k & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ (x_1, \ldots, x_k) & \longmapsto & \begin{vmatrix} u_1(x_1) & \ldots & u_1(x_k) \\ \vdots & & \vdots \\ u_k(x_1) & \cdots & u_k(x_k) \end{vmatrix} & \end{array}$$

Il est alors clair que $u \in \mathcal{A}_k(E)$. En fait, toutes les formes $k$-linéaires peuvent s'obtenir de cette façon. Plus précisément

**Théorème 1** *Soit $\{u_1, \cdots, u_n\}$ la base de $E^*$. Alors la famille*

$$\{u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_k},\, 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$$

*est une base de $\mathcal{A}_k(E)$. En particulier*

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{A}_k(E) = \binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

□

Dans la suite $E = \mathbb{R}^n$, $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\{e_1^*, \cdots, e_n^*\}$ sa base duale. Par commodité, on note pour tout $i$, $1 \leq i \leq n$, $\mathrm{d}x_i = e_i^*$ :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{d}x_i : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j\, e_j & \longmapsto & x_i \end{array}$$

Ainsi pour tout $\alpha \in \mathcal{A}_k(E)$,

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} a_{i_1, \cdots, i_k}\, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$$

où les $a_{i_1, \cdots, i_k}$ sont des réels, c'est-à-dire des éléments de $\mathcal{A}_0(E)$. Si

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} a_{i_1, \cdots, i_p}\, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p} \in \mathcal{A}_p(E)$$

et

$$\beta = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_q \leq n} b_{j_1, \cdots, j_q}\, \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_q} \in \mathcal{A}_q(E)$$

On définit le produit extérieur $\alpha \wedge \beta \in \mathcal{A}_{p+q}(E)$ par :

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n \\ 1 \leq j_1 < \cdots < j_q \leq n}} a_{i_1, \cdots, i_p} b_{j_1, \cdots, j_q}\, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p} \wedge \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_q}.$$

**Proposition 1** *On a :*

1. *Linéarité*
   - $(\alpha + \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge \gamma + \beta \wedge \gamma$. $\qquad \alpha,\, \beta \in \mathcal{A}_p(E),\ \gamma \in \mathcal{A}_q(E)$
   - $\alpha \wedge (\beta + \gamma) = \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \gamma$, $\qquad \alpha \in \mathcal{A}_p(E),\quad \beta,\, \gamma \in \mathcal{A}_q(E)$
   - $t\,\alpha \wedge \beta = \alpha \wedge t\,\beta = t\,(\alpha \wedge \beta)$. $\qquad \alpha \in \mathcal{A}_p(E),\quad \beta \in \mathcal{A}_q(E),\quad t \in \mathbb{R}$.
2. *Anti-commutativité*
   $\forall \alpha \in \mathcal{A}_p(E),\, \forall \beta \in \mathcal{A}_q(E)$
   $$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq}\, \beta \wedge \alpha.$$
3. *Associativité*
   $\forall \alpha \in \mathcal{A}_p(E),\, \forall \beta \in \mathcal{A}_q(E),\, \forall \gamma \in \mathcal{A}_r(E)$
   $$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma).$$

**Preuve** : Exercice.

## 1.2 Formes différentielles

**Définition 1** *Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si $p \geq 0$ est un entier, une forme différentielle de degré $p$ sur $U$ (ou une $p$-forme sur $U$) est une application*

$$\omega : U \longrightarrow \mathcal{A}_p(\mathbb{R}^n).$$

*On note $\Omega^p(U)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des $p$-formes différentielles sur $U$.*

Rappelons que $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$ et donc une 0-forme est une application $\omega : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application dérivable (ou une 0-forme dérivable), sa différentielle

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \mathrm{d}x_i$$

est une 1-forme sur $U$.

On sait que $\{\mathrm{d}x_1, \cdots, \mathrm{d}x_n\}$ est une base de $\mathcal{A}_1(\mathbb{R}^n)$. Ainsi si $\omega$ est une $p$-forme différentielle dans $U$, on a pour tout $a \in U$,

$$\omega(a) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} f_{i_1,\cdots,i_p}(a)\, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$$

où les $f_{i_1,\cdots,i_p} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ sont uniquement déterminées. C'est l'écriture canonique de la $p$-forme $\omega$ et les $f_{i_1,\cdots,i_p}$ sont les composantes de $\omega$.

**Remarque 1** *Dans $\mathbb{R}^2$ on pourra noter $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$ au lieu de $(\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2)$ la base duale de la base canonique. De même dans $\mathbb{R}^3$ où on peut préférer noter les coordonnées $(x, y, z)$ plutôt que $(x_1, x_2, x_3)$.*

### Produit extérieur

Soient $(\alpha, \beta) \in \Omega^p(U) \times \Omega^q(U)$,

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} f_{i_1,\cdots,i_p}\, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p} \in \mathcal{A}_p(E)$$

et

$$\beta = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_q \leq n} g_{j_1,\cdots,j_q}\, \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_q} \in \mathcal{A}_q(E)$$

On définit le produit extérieur $\alpha \wedge \beta$ par :

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n \\ 1 \leq j_1 < \cdots < j_q \leq n}} f_{i_1,\cdots,i_p}\, g_{j_1,\cdots,j_q}\, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p} \wedge \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_q}$$

**Exercice 2** *Vérifier que si $p + q > n$, alors $\alpha \wedge \beta = 0$.*

## Différentiation extérieure

Si $f \in \Omega^0(U)$ est une 0-forme de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ dans $U$, on définit

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \mathrm{d}x_i$$

C'est une 1-forme de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ dans $U$. Si

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} f_{i_1,\cdots,i_p}\, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$$

est une $p$-forme de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$, on définit la différentielle extérieure de $\omega$ par :

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \mathrm{d}f_{i_1,\cdots,i_p} \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$$

Ainsi $\mathrm{d}\omega$ est une $(p+1)$-forme de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ dans $U$.

**Proposition 2**

1. $\forall \alpha,\, \beta \in \Omega^p(U), \qquad \mathrm{d}(\alpha + \beta) = \mathrm{d}\alpha + \mathrm{d}\beta.$
2. $\forall t \in \mathbb{R},\, \forall \alpha \in \Omega^p(U), \qquad \mathrm{d}(t\,\alpha) = t\,\mathrm{d}\alpha.$
3. $\forall \alpha,\, \beta \in \Omega^p(U),\, \forall \beta \in \Omega^q(U)$ *de classe* $C^1$ *sur* $U$,

$$\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^p\, \alpha \wedge \mathrm{d}\beta.$$

4. *Pour toute forme* $\omega \in \Omega^p(U)$ *de classe* $C^2$ *sur* $U$

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0.$$

**Démonstration** :Les propriétés (1) et (2) sont équivalentes. La propriété (3) est laissée à titre d'exercice. Pour (4) :

- Si $\omega$ est une 0-forme, $\omega = f : U \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \mathrm{d}x_i$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \wedge \mathrm{d}x_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\, \mathrm{d}x_j \right) \wedge \mathrm{d}x_i \\
&= \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\, \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i \\
&= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j \\
&= 0
\end{aligned}$$

car

$$\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = -\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

puisque $f$ est de classe $C^2$ sur $U$.

- Pour $p \geq 1$, écrivons

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} f_{i_1,\cdots,i_p}\, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$$

Alors

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \mathrm{d}f_{i_1,\cdots,i_p} \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \mathrm{d}(\mathrm{d}f_{i_1,\cdots,i_p} \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}) \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \left[\mathrm{d}^2 f_{i_1,\cdots,i_p} \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p} + (-1)^p\, \mathrm{d}f_{i_1,\cdots,i_p} \wedge \mathrm{d}(\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p})\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

car $\mathrm{d}^2 f_{i_1,\cdots,i_p} = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{d}(\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}) = 0.$ □

## 1.3 Forme différentielle de degré 1

**Définition 2** *Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $\omega \in \Omega^1(U)$. On dit que $\omega$ est exacte s'il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^1$ sur $U$ tel que $\omega = \mathrm{d}f$. Une telle fonction $f$ s'appelle une primitive de $\omega$.*

**Exemple 1**

— *La 1-forme $\omega = x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y$ est exacte sur n'importe quel ouvert de $\mathbb{R}^2$, puisque $\mathrm{d}f = \omega$, où $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.*

— *La 1-forme $\omega = y\mathrm{d}x$ n'est exacte sur aucun ouvert de $\mathbb{R}^2$. En effet, supposons par l'absurde qu'il existe $U$ ouvert de $\mathbb{R}^2$ et une fonction $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$ tels que $\mathrm{d}f = \omega$. Alors pour tout $(x,y) \in U$, on a*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \quad et \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

*Par la deuxième égalité on obtient qu'il existe une fonction $g$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$ telle que $f(x,y) = g(x)$. Ainsi on devrait avoir*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g'(x)$$

*pour tout $(x,y) \in U$. Mais cela n'est pas compatible avec l'expression précédente.*

□

### 1.3.1 Intégrale d'une 1-forme le long d'une courbe paramétrée

**Définition 3** *Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $C$ une courbe paramétrée de $\mathbb{R}^n$ de classe el incluse dans $U$ et $\omega = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathrm{d}x_i$ une 1-forme continue sur $U$. On appelle circulation de la 1-forme $\omega$ le long de la courbe $C$, le réel*

$$\int_C \omega = \int_C \alpha \mathrm{d}\mathbf{x}$$

*où $\int_C \alpha \mathrm{d}\mathbf{x}$ désigne l'intégrale curviligne de $\alpha : x \in U \mapsto (\alpha_1(x), \alpha_2(x), \cdots, \alpha_n(x))$ le long de la courbe $C$.*

**Exemple 2** *On considère sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ la forme différentielle*

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$$

*On note $C$ le cercle unité orienté positif. On considère le paramétrage*

$$\theta \in [0, 2\pi] \longmapsto (\cos\theta, \sin\theta)$$

*Posons*

$$\alpha(x,y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}).$$

*Donc*

$$\begin{aligned}
\int_C \omega &= \int_0^{2\pi} \alpha.\mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta)^2+\sin(\theta)^2}(\cos(\theta) - \frac{\sin(\theta)}{\sin(\theta)^2+\cos(\theta)^2}(-\sin(\theta)))\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2)\mathrm{d}\theta = 2\pi
\end{aligned}$$

□

**Définition 4** *On dit qu'une forme différentielle $\omega$ définie sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n$ est exacte s'il existe une application $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ de $U$ dans $\mathbb{R}$ telle $\omega = \mathrm{d}f$.*

**Remarque 2** *Soit $F$ un champ de vecteurs sur $U$. On rappelle qu'on dit que $F$ dérive d'un potentiel scalaire s'il existe un champ scalaire $f$ tel que $F = grad(f) = \nabla(f)$, où*

$$\nabla(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

*Soit $F = (F_1, F_2, \cdots, F_n)$. Posons*

$$\omega = \sum_{i=1}^n F_i \mathrm{d}x_i.$$

*Alors $F$ dérive d'un potentiel scalaire si et seulement si la forme $\omega$ est exacte sur $U$.*

La proposition suivante simplifie le calcul de l'intégrale curviligne, et explique l'intérêt de s'intéresser aux formes différentielles exacte

**Proposition 3** *Soit $\omega$ une forme exacte sur $U$, et on considère une primitive $f$ de $\omega$ (ie. $f$ est $\mathcal{C}^1$ sur $U$ et $\mathrm{d}f = \omega$), et soit $C$ une courbe paramétrée de $U$, de classe $\mathcal{C}^1$ et d'extrémités $A$ et $B$. Alors*

$$\int_C \omega = \int_C \mathrm{d}f = f(B) - f(A)$$

**Démonstration** Considérons un paramétrage $\gamma \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R}^n)$ de la courbe $C$.
Posons

$$F = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_C \omega &= \int_C \mathrm{d}f \\ &= \int_a^b F(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t) \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Désignons par $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ les composantes de la fonction $\gamma$. On a

$$\begin{aligned} F(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t)) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\gamma(t)) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) \gamma_i'(t) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_a^b F(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t) \mathrm{d}t &= \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) \gamma_i'(t) \, \mathrm{d}t \\ &= \int_a^b (f \circ \gamma)'(t) \mathrm{d}t \\ &= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(B) - f(A) \end{aligned}$$

Par suite

$$\int_C \omega = \int_C \mathrm{d}f = f(B) - f(A)$$

□

**Corollaire 1** *Si $\omega$ est une forme différentielle exacte sur $U$ et $C$ est une courbe fermée de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors*

$$\int_C \omega = 0.$$

**Exemple 3** *La forme différentielle*

$$\omega = \frac{x}{x^2+y^2} \mathrm{d}y - \frac{y}{x^2+y^2} \mathrm{d}x$$

*n'est pas exacte sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. D'après l'exemple 2, l'intégrale de $\omega$ sur le cercle unité est $2\pi$, $\int_C \omega = 2\pi$, et donc $\omega$ n'est pas exacte d'après le corollaire 1.* □

**Définition 5** *Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit qu'une forme $\omega$ est fermée si $\mathrm{d}\omega = 0$.*

**Proposition 4** *Soit $\omega = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathrm{d}x_i \in \Omega^1(U)$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors*

$$\omega \text{ est fermée} \iff \quad \forall (i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2 \ \tfrac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} = \tfrac{\partial \alpha_j}{\partial x_i}$$

**Démonstration** On a

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega &= \sum_{i=1}^n \mathrm{d}(\alpha_i \mathrm{d}x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathrm{d}\alpha_i \wedge \mathrm{d}x_i \\ &= \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j) \wedge \mathrm{d}x_i \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i \end{aligned}$$

Comme $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_i = 0$ et $\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i = -\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j$, on obtient l'équivalence

$$\mathrm{d}\omega = 0 \iff \quad \forall (i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2 \ \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i}$$

□

**Remarque 3** *Toute forme exacte est fermée. En générale la réciproque n'est pas vraie. Par exemple, sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ la forme*

$$\omega = \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y - \frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x$$

*est fermée mais n'est pas exacte.*

Moyennant certaines hypothèses sur l'ouvert $U$, pour une forme sur $U$ de classe $\mathcal{C}^1$ on a équivalence entre être exacte et être fermée. Afin de formuler une condition sur l'ouvert $U$, nous allons introduire la notion d'ouvert étoilé.

**Définition 6** *Un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n$ est dite étoilé par rapport à $\mathbf{a} \in U$ si*

$$\forall x \in U \quad [\mathbf{a}, x] \subset U$$

*où $[\mathbf{a}, x]$ le segment d'extrémités $\mathbf{a}$ et $x$ dans $\mathbb{R}^n$ ;*

$$[\mathbf{a}, x] := \{y \in \mathbb{R}^n;\ \exists \lambda \in [0,1]\ y = \lambda x + (1-\lambda)\mathbf{a}\}$$

**Exemple 4** *Tout ouvert convexe est un ouvert étoilé. par contre, la réciproque est fausse : il existe des ouverts qui sont étoilés sans être convexes.*

Ouvert étoilé non convexe

□

**Théorème 2 (Théorème de Poincaré)** *Si $U$ est un ouvert étoilé alors toute forme fermée sur $U$ est une forme exacte.*

**Démonstration** Soit $\omega = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathrm{d}x_i$. Par hypothèse, l'ouvert $U$ est étoilé, donc il existe $\mathbf{a} = (a_i) \in U$ tel que pour tout $x \in U$ on ait $[\mathbf{a}, x] \subset U$. Par conséquent la fonction

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & U \times [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,t) & \longmapsto & \sum_{j=1}^n (x_j - a_j)\alpha_j(tx + (1-t)\mathbf{a}) \end{array}$$

est continue et, pour tous $(i,j) \in [1,n]^2$ et $t \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x,t) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}((x_j - a_j)\alpha_j(tx + (1-t)\mathbf{a}))(x,t) \\ &= \sum_{j \neq i} \frac{\partial}{\partial x_i}((x_j - a_j)\alpha_j(tx + (1-t)\mathbf{a}))(x,t) + \frac{\partial}{\partial x_i}((x_i - a_i)\alpha_i(tx + (1-t)\mathbf{a}))(x,t) \\ &= \sum_{j \neq i} (x_j - a_j) t \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i}(tx + (1-t)\mathbf{a}) + \alpha_i(tx + (1-t)\mathbf{a}) + (x_i - a_i) t \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i}(tx + (1-t)\mathbf{a}) \\ &= \alpha_i(tx + (1-t)\mathbf{a}) + \sum_{j=1}^n (x_j - a_j) t \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i}(tx + (1-t)\mathbf{a}) \end{aligned}$$

Par ailleurs, l'application

$$\begin{array}{rccc} g : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & t\alpha_i(tx + (1-t)\mathbf{a}) \end{array}$$

est différentiable et on a

$$g'(t) = \alpha_i(tx + (1-t)\mathbf{a}) + \sum_{j=1}^n (x_j - a_j) t \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}(tx + (1-t)\mathbf{a})$$

Puisque $\omega$ est une forme fermée, on a $\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i}$ pour tout $i, j$. Ainsi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x,t) = g'(t)$$

Introduisons alors la fonction $f(x) = \int_0^1 \varphi(x,t)\mathrm{d}t$. On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) &= \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x,t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 g'(t)\mathrm{d}t \\ &= g(1) - g(0) \\ &= \alpha_i(x) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathrm{d}f = \omega$$

□

On considère maintenant un ouvert élémentaire $D$ de $\mathbb{R}^2$ :

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a<x<b, \varphi_1(x)<y<\varphi_2(x)\} \\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid c<y<d, \psi_1(y)<x<\psi_2(y)\} \end{aligned}$$

avec $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont de classes $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a,b]$, $\psi_1$ et $\psi_2$ sont de classes $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[c,d]$.

**Lemme 1** *Soit $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ deux fonctions continues sur un ouvert $\mathcal{U}$ contenant l'adhérence $\overline{D}$ de $D$. Alors on a*

$$\int_{\partial D} P(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^b (P(t,\varphi_1(t)) - P(t,\varphi_2(t)))\mathrm{d}t$$

*et*

$$\int_{\partial D} Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_c^d (-Q(t,\psi_1(t)) + Q(t,\psi_2(t)))\mathrm{d}t$$

**Démonstration** On paramètre $\partial D$ à l'aide des quatres courbes suivantes :

$$\begin{array}{rccc} \gamma_1 : & [\varphi_1(b),\varphi_2(b)] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (b,t) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \gamma_2 : & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (t,\varphi_2(t)) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \gamma_3 : & [\varphi_1(a),\varphi_2(a)] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (a,t) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \gamma_4 : & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (t,\varphi_1(t)) \end{array}$$

Posons $\omega = P(x,y)\mathrm{d}x$, alors

$$\begin{aligned} \int_{\partial D}\omega &= \int_{\gamma_1}\omega - \int_{\gamma_2}\omega - \int_{\gamma_3}\omega + \int_{\gamma_4}\omega \\ &= \int_{\varphi_1(b)}^{\varphi_2(b)} P(b,t)\times 0\mathrm{d}t - \int_a^b P(t,\varphi_2(t))\mathrm{d}t - \int_{\varphi_1(a)}^{\varphi_2(a)} P(a,t)\times 0\mathrm{d}t + \int_a^b P(t,\varphi_1(t))\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b P(t,\varphi_1(t))\mathrm{d}t - \int_a^b P(t,\varphi_2(t))\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Cela prouve la première égalité.
Pour la deuxième égalité, on paramètre $\partial D$ à l'aide des courbes suivantes :

$$\begin{array}{rccc} \gamma_1 : & [\psi_1(c),\psi_2(c)] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (t,c) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \gamma_2 : & [c,d] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (\psi_2(t),t) \end{array}$$

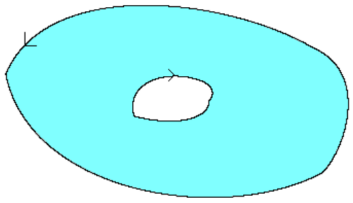
$$\begin{array}{rccc} \gamma_3 : & [\psi_1(d),\psi_2(d)] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (t,d) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \gamma_4 : & [c,d] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (\psi_1(t),t) \end{array}$$

Posons $\omega_1 = Q(x,y)\mathrm{d}y$, alors

$$\begin{aligned} \int_{\partial D}\omega_1 &= \int_{\gamma_1}\omega_1 + \int_{\gamma_2}\omega_1 - \int_{\gamma_3}\omega_1 - \int_{\gamma_4}\omega_1 \\ &= \int_{\psi_1(c)}^{\psi_2(c)} Q(t,c)\times 0\mathrm{d}t + \int_c^d Q(\psi_2(t),t)\mathrm{d}t - \int_{\psi_1(d)}^{\psi_2(d)} Q(t,d)\times 0\mathrm{d}t - \int_c^d Q(\psi_1(t),t)\mathrm{d}t \\ &= \int_c^d Q(\psi_2(t),t)\mathrm{d}t - \int_c^d Q(\psi_2(t),t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

**Proposition 5 (Formule de Green-Riemann)** *Soit $D$ un ouvert élémentaire de $\mathbb{R}^2$, $P$ et $Q$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert contenant $\overline{D}$. On oriente $\partial D$ la frontière de $D$ de sorte que en parcourant la frontière dans le sens de l'orientation, $D$ soit constamment sur la gauche. Alors on a*

$$\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial D} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$



**Démonstration** D'après le théorème de Fubini et le lemme 1 on a

$$\begin{aligned}
\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int\int_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int\int_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y - \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_c^d (Q(\psi_2(y),y) - Q(\psi_1(y),y))\mathrm{d}y - \int_a^b (P(x,\varphi_2(x)) - P(x,\varphi_1(x \\
&= \int_{\partial D} Q(x,y)\mathrm{d}y + \int_{\partial D} P(x,y)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

**Exemple 5** *Calculons*

$$\int_{\partial D} (2xy - x^2)\mathrm{d}x + (x + y^2)\mathrm{d}y,$$

*où $\partial D$ est le bord orienté du domaine délimité par les courbes d'équation $y = x^2$ et $x = y^2$.*

— ***Calcule direct*** *:*
*On a $\partial D = C_1 \cup C_2$ où $C_i$ est paramétré par*

$$\begin{array}{rccc} \gamma_1 : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (t, t^2) \end{array}$$

*et*

$$\begin{array}{rccc} \gamma_2 : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (t, \sqrt{t}) \end{array}$$

*Donc*

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y &= \int_{C_1} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y - \int_{C_2} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 (2t^3 - t^2 + 2t^2 + 2t^5)\mathrm{d}t - \int_0^1 (2t\sqrt{t} - t^2 + \sqrt{t})\mathrm{d}t \\
&= \frac{7}{6} - \frac{17}{15} \\
&= \frac{1}{30}
\end{aligned}$$

— ***En utilisant la formule de Green-Riemann***
*Soit*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$$

*Alors* $\partial D = C$. *On pose*

$$P(x, y) = 2xy - x^2 \quad et \quad Q(x, y) = x + y^2$$

*On a, d'une part*

$$\begin{aligned}
\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_D \Big(1 - 2x\Big) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (1 - 2x) \mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (1 - 2x)(\sqrt{x} - x^2) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{30}
\end{aligned}$$

*D'où*

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial D} P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$$

□