جامعة مولاي إسماعيل
UNIVERSITÉ MOULAY ISMAÏL
كلية العلوم
FACULTÉ DES SCIENCES
Département de mathématiques

Année universitaire 2025-2026
SMA-LNG S IV - Analyse 6

Analyse 6

Y. Mazigh

Table des matières

1 Intégrales à paramètres **3**
1.1 Continuité 3
1.2 Dérivabilité 11

Chapitre 1

Intégrales à paramètres

Il s'agit dans ce chapitre de mettre en place les outils permettant d'étudier les fonctions définies par des intégrales, i.e, fonctions de la forme $F : x \longmapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ où f est une fonction de deux variables.
Une question naturelle est l'étude du transfert de la continuité (resp. la dérivabilité) de f vers F.

1.1 Continuité

Soit J une partie non vide de $\mathbb{R}$ et soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction réelle définie sur $J \times I$, et considérons la fonction

$$F : x \longmapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$$

que nous supposons définie sur J.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables sur l'intervalle compact $[a,b]$, convergeant simplement vers une fonction f sur $[a,b]$. On se pose la question suivante, a-t-on toujours :

$$\int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x \quad ?$$

On peut se convaincre que cette égalité n'a pas toujours lieu en considérant la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où f_n est l'application définie sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x, & 0 \leq x < \frac{1}{2n} \\ -2n(nx-1), & \frac{1}{2n} \leq x < \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

D'une part cette suite converge simplement sur $[0,1]$ vers l'application nulle ; en effet, on a $f_n(0) = 0$, et si $x > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n} \leq x$ pour tout $n \geq N$, ainsi $f_n(x) = 0$ pour pour tout $n \geq N$.
On a donc

$$\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = 0$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{1}{2n}} 2n^2x\mathrm{d}x - \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} 2n(nx-1)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = 0 \neq \frac{1}{2} = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$$

Théorème 1 *Soit* $(f_n)_n$ *une suite d'applications de* ***compact*** $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$*, Riemann-intégrables sur* $[a,b]$*. Si la suite* $(f_n)_n$ ***converge uniformément*** *sur* $[a,b]$ *vers l'application* f *alors* f *est Riemann-intégrable sur* $[a,b]$ *et*

$$\int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Par hypothèse, la suite $(f_n)_n$ convergeant uniformément sur $[a,b]$ vers f, donc

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a,b]\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \left(n \geq N \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3(b-a)}\right)$$

L'application f_N étant Riemann-intégrable sur $[a,b]$, il existe un couple $(\psi_{N,\varepsilon}, \phi_{N,\varepsilon})$ de fonctions en escalier sur $[a,b]$ tel que :

$$\psi_{N,\varepsilon}(x) \leq f_N(x) \leq \phi_{N,\varepsilon}(x)\ \forall x \in [a,b] \quad \text{et} \quad \int_a^b (\phi_{N,\varepsilon}(x) - \psi_{N,\varepsilon}(x))\mathrm{d}x < \frac{1}{3}\varepsilon$$

Les fonctions $\phi_\varepsilon = \frac{1}{3(b-a)}\varepsilon + \phi_{N,\varepsilon}$ et $\psi_\varepsilon = -\frac{1}{3(b-a)}\varepsilon + \psi_{N,\varepsilon}$ sont deux fonctions en escalier sur $[a,b]$ vérifiant $\psi_\varepsilon \leq f \leq \phi_\varepsilon$ sur $[a,b]$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\int_a^b (\phi_\varepsilon(x) - \psi_\varepsilon(x))\mathrm{d}x &= \int_a^b (\frac{2}{3(b-a)}\varepsilon + \phi_{N,\varepsilon}(x) - \psi_{N,\varepsilon}(x))\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{3}\varepsilon + \int_a^b (\phi_{N,\varepsilon}(x) - \psi_{N,\varepsilon}(x))\mathrm{d}x \\
&< \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon
\end{aligned}$$

On en conclut que la fonction f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b (f(x) - f_n(x))\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \int_a^b \Big|(f(x) - f_n(x))\Big|\mathrm{d}x \\
&\leq \int_a^b \sup_{t\in[a,b]} \Big|(f(t) - f_n(t))\Big|\mathrm{d}x \\
&= (b-a)\sup_{t\in[a,b]} \Big|(f(t) - f_n(t))\Big|
\end{aligned}$$

Comme la suite d'applications $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers l'application f,

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{t\in[a,b]}\Big|(f(t)-f_n(t))\Big|=0.$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x\right|=0$$

autrement dit que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

□.

Exemple 1

— *La suite d'applications $(f_n)_n$ de terme général $f_n : x\in[1,2]\to e^{-nx^2}$ converge uniformément vers la fonction nulle. Donc*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_1^2 e^{-nx^2}\mathrm{d}x=0.$$

— *La suite d'applications $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général*

$$f_n(x)=\begin{cases}2n^2x, & 0\le x<\frac{1}{2n}\\ -2n(nx-1), & \frac{1}{2n}\le x<\frac{1}{n}\\ 0, & \frac{1}{n}\le x\le 1\end{cases}$$

ne converge pas uniformément vers la fonction nulle, bien que la suite d'applications $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle. En remarquant que

$$\sup_{t\in[0,1]}|f_n(t)|=n.$$

Remarque 1 *Le théorème 1 (Intégrabilité et convergence uniforme) est faux sur un intervalle non borné comme le montre l'exemple suivant :*
Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $[1,+\infty[$ par $f_n(x)=\frac{1}{nx}$. La suite (f_n) converge uniformément sur $[1,+\infty[$ vers la fonction nulle, mais

$$\lim_{n\to+\infty}\int_1^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t=+\infty$$

car $\int_1^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{n}[\ln(t)]_1^{+\infty}=+\infty$. □

En fait, on dispose d'un résultat puissant et particulièrement commode pour le passage à la limite dans les intégrales impropres. Il s'agit d'un résultat très général qui est au cœur de la théorie de Lebesgue. Nous énonçons une version adaptée au niveau visé par ce cours.

Théorème 2 (Théorème de convergence monotone (ou théorème de Beppo-Lévi))
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables sur un intervalle I à valeurs dans $[0,+\infty]$. On suppose que la suite (f_n) est croissante. Alors

$$\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n(x)\mathrm{d}x=\int_I f(x)\mathrm{d}x$$

Démonstration Par hypothèse la suite (f_n) est croissante et positive, donc la suite $(\int_I f_n(x)\mathrm{d}x)_n$ est croissante et positive. Par suite la limite $\alpha = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)\mathrm{d}x \in [0, +\infty]$ existe.
Soit $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f_n \leq f$, on obtient

$$\alpha \leq \int_I f\mathrm{d}x$$

Soit ϕ une fonction en escalier positive sur I telle que $\phi \leq f$ et soit $c \in]0, 1[$. On définit

$$A_n = \{x \in I \mid f_n(x) \geq c\phi(x)\}$$

La suite (A_n) est croissante et $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = I$, en effet, si $x_0 \in \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c$ alors

$$f_n(x_0) < c\phi(x_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc, par passage au limite, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x_0) = f(x_0) \leq c\phi(x_0) < \phi(x_0) \leq f(x_0)$$

et donc $f(x_0) < \phi(x_0) \leq f(x_0)$ ce qui est absurde car ϕ est partout finie, par suite $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c = \emptyset$.
Par ailleurs on vérifie que

$$f_n \geq c\phi \mathbf{1}_{A_n}$$

donc

$$\int_I f(x)\mathrm{d}x \geq \int_I f_n(x)\mathrm{d}x \geq \int c\phi\mathbf{1}_{A_n}\mathrm{d}x = c\int_{A_n} \phi(x)\mathrm{d}x$$

De plus si $\phi = \sum_{j=1}^m \beta_j \mathbf{1}_{B_j}$, on a

$$\int_{A_n} \phi(x)\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^m \beta_j \int_{A_n\cap B_j} \mathrm{d}x$$

Comme on a une somme finie et (A_n) croissante, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{A_n} \phi(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^m \beta_j \int_{A_n\cap B_j} \mathrm{d}x = \sum_{j=1}^m \beta_j \int_{B_j} \mathrm{d}x = \int_I \phi(x)\mathrm{d}x$$

Ainsi $\alpha \geq c\int_I \phi(x)\mathrm{d}x$. On prend d'abord le sup sur $c \in]0, 1[$, puis le sur ϕ en escalier positive sur I telle que $\phi \leq f$, et on trouve $\alpha \geq \int_I f(x)\mathrm{d}x$, ce qui termine toute la preuve. □

Remarque 2 (Contre-exemple nécessité de la croissance (resp. positivité))

— *Soit la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par :*

$$f_n(x) = ne^{-nx}$$

Le théorème ne s'applique pas car la suite n'est pas croissante.

— *Soit la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par :*

$$f_n(x) = -ne^{-nx}$$

Le théorème ne s'applique pas car la suite n'est pas positive.

Théorème 3 (Convergence dominée de Lebesgue) *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I. On suppose que*

1. *pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur I,*
2. *la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f,*
3. *la fonction f est continue par morceaux sur I,*
4. *il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$, continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I \quad |f_n(x)| \leq \varphi(x) \quad (\textit{hypothèse de domination})$$

Alors f est intégrable sur I et $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)\mathrm{d}x = \int_I f(x)\mathrm{d}x$.

Exemple 2 *Calculons la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x$.*
Nous avons

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[, \lim_{n\to+\infty} \sin^n(x) = 0$$

donc la suite $(\sin^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ 1 & si\ x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$.
De plus $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], |\sin^n(x)| \leq 1$, et l'application constante est intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. En utilisant, le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{n\to+\infty} \sin^n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 \,\mathrm{dx} = 0.$$

□

Remarque 3 *La condition de domination est essentielle comme le montre l'exemple suivant : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit la fonction $f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par*

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & si\ x \in [0, n[\\ 0 & si\ x \geq n \end{cases}$$

Si g est une fonction localement intégrable vérifiant $|f_n| \leq g$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

$$g(x) \geq f_{E(x)+1}(x) = \frac{1}{E(x)+1}$$

puisque $x \in [0, E(x)+1[$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x. Par suite

$$\int_0^n g(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} g(x)\mathrm{d}x \geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}$$

ainsi

$$\int_0^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n g(x)\mathrm{d}x = +\infty$$

Par conséquent, la fonction g n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$. Or

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |f_n(t)| = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle. Mais

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{n} \frac{1}{n}\mathrm{d}x = 1 \neq \int_0^{+\infty} 0\mathrm{d}x = 0$$

□

Théorème 4 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit J une partie (non vide) quelconque de $\mathbb{R}$. Soit $f:(x,t)\longmapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $J\times I$. Supposons que*

1. *pour tout $t\in I$, la fonction $x\longmapsto f(x,t)$ est continue sur J,*
2. *pour tout $x\in J$, la fonction $t\longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I,*
3. *il existe une fonction $\varphi: I\longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue par morceaux, intégrable positive sur I telle que*

$$\forall (x,t)\in J\times I,\quad |f(x,t)|\le \varphi(t).$$

Alors la fonction $F: x\longmapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et continue sur J.

Démonstration Fixons $x\in J$ et considérons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans J convergeant vers x. Pour chaque $n\in\mathbb{N}$, notons f_n la fonction définie sur I par

$$f_n(t) = f(x_n, t)$$

Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiée les hypothèses du théorème de convergence dominée (Théorème 3). En effet

— Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction f_n est continue par morceaux sur I.

— La continuité de f par rapport à x donne

$$\forall t\in I, \lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n,t) = f(x,t)$$

Donc, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers $f(x,.)$.

— La fonction $f(x,.)$ est continue par morceaux sur I.

— Comme $\forall (x,t)\in J\times I, |f(x,t)|\le\varphi(t)$, on obtient

$$\forall n\in\mathbb{N}, \forall t\in I,\quad |f_n(t)| = |f(x_n,t)|\le \varphi(t)$$

où φ est une fonction intégrable positive sur I.

Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n(t)\mathrm{d}t = \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$$

i.e,

$$\lim_{n\to+\infty} F(x_n) = F(x).$$

Ce qui prouve la continuité de F au point x, et finalement, la continuité de F sur J. □

Exemple 3 *La fonction F donnée par*

$$F(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(tx)}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

est définie et continue sur $\mathbb{R}$. En effet, la fonction

$$f : (x,t) \longmapsto \frac{\sin(tx)}{1+t^2}$$

est continue par rapport à x et continue par rapport à t. De plus

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[, |f(x,t)| = |\frac{\sin(tx)}{1+t^2}| \leq \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$$

Or la fonction φ est continue par morceaux, positive et intégrale sur $[0,+\infty[$. D'après le théorème 4, on conclut que F est continue sur $\mathbb{R}$. □

Exercice 1 *Soit*

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}\times]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,t) & \longmapsto & \frac{x}{x^2+t^2} \end{array}$$

1. *Calculer $F(x) = \int_0^1 f(x,t)\mathrm{dt}$*
2. *Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^-} F(x) = \frac{-\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = \frac{\pi}{2}$.*

(Ici les conditions (1) et (2) du théorème 4 sont vérifiées, mais (3) ne l'est pas).

Corollaire 1 *L'hypothèse de domination peut simplement être vérifiée sur tout segment K inclus dans J , c'est-à-dire :*

$$\forall (x,t) \in K \times I, \ |f(x,t)| \leq \varphi_K(t)$$

La continuité de F sur tout K assure sa continuité sur J. En effet, soient $x \in J$ et $(x_n)_n$ une suite dans J convergeant vers x. Notons $K = \{x_n, \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$. Alors K est un compact de J et d'après le théorème 4 appliqué à $f_{|K\times I}$, la fonction $f(x,.)$ est intégrable sur I pour tout $x \in K$, et la fonction $F_{|K}$ est continue sur K. En particulier la fonction F est continue au point x.

Exercice 2 *On considère la fonction*

$$\begin{array}{rccc} F : &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t \end{array}$$

Montrer que F est continue sur $]0,+\infty[$.

Corollaire 2 *Soit $f : J \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors la fonction*

$$F : x \longmapsto \int_a^b f(x,t)\mathrm{dt}$$

est continue sur J.

Démonstration Soit $x_0 \in J$. Alors il existe un voisinage V de x_0 et un réel $M > 0$ tels que

$$\forall (x,t) \in V \times [a,b], \ |f(x,t)| \leq M$$

En effet, la continuité de f sur $J \times [a,b]$ assure que pour chaque $u \in [a,b]$, il existe un voisinage V_u de x_0 dans I et un intervalle ouvert J_u de centre u tels que

$$\forall J_u \cap [a,b], \forall x \in V_u, \text{ on ait } |f(x,t) - f(x_0,t)| < \varepsilon$$

Or $[a,b]$ étant compact, on peut le recouvre par un nombre fini d'intervalles $J_{u_1}, \cdots, J_{u_n}$. Posons $V = \cap_{i=1}^n V_{u_i}$. Alors si $x \in V$ et $t \in [a,b]$, il existe une valeur k telle que $t \in j_{u_k}$. D'où

$$\forall (x,t) \in V \times [a,b], \quad |f(x,t) - f(x_0,t)| < \varepsilon.$$

Comme la fonction $t \longmapsto M$ est continue, positive et intégrable sur $[a,b]$, le théorème 4 entraine que F est continue en x_0, par suite F est continue sur J. □

Exercice 3 *Redémontrer le corollaire 2 sans utiliser le théorème 4.*

Le théorème 4 se généralise au cas où x_0 est adhérent au domaine J, x_0 réel ou infini

Théorème 5 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit J une partie (non vide) quelconque de $\mathbb{R}$. Soit $f : (x,t) \longmapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $J \times I$. Soit x_0 un point adhérent à J ou $x_0 = +\infty$ si J n'est pas majorée ou $x_0 = -\infty$ si J n'est pas minorée. Supposons que*

1. *pour tout $t \in I$, la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ admet une limite $\ell(t)$ quand x tend vers x_0 et de plus la fonction ℓ est continue par morceaux sur I*
2. *pour tout $x \in J$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I,*
3. *il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue par morceaux, intégrable positive sur I telle que*
$$\forall (x,t) \in J \times I, \quad |f(x,t)| \leq \varphi(t).$$

Alors la fonction $F : x \longmapsto \int_I f(x,t)\mathrm{dt}$ admet une limite en x_0 et

$$\lim_{x \to x_0} \int_I f(x,t)\mathrm{dt} = \int_I \lim_{x \to x_0} f(x,t)\mathrm{dt} = \int_I \ell(t)\mathrm{dt}$$

Démonstration

1. Si $x_0 \in \mathbb{R}$, pour $(x,t) \in (J \cup \{x_0\}) \times I$, posons
$$g(x,t) = \begin{cases} f(x,t) & \text{si } x \in I \\ \ell(t) & x = x_0 \end{cases}$$
La fonction g vérifie les hypothèses du théorème 4 sur $(J \cup \{x_0\}) \times I$.
2. Si $x_0 = +\infty$ (resp. $x_0 = -\infty$), on applique le résultat précédent à la fonction
$$(x,t) \longmapsto f(\frac{1}{x}, t)$$
en 0^+ (resp. 0^-).

□

Exemple 4 *Calculons la limite* $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^2t^2}\mathrm{dt}$.
Pour tout $(x,t) \in [1,+\infty[\times[0,+\infty[$, posons $f(x,t) = e^{-x^2t^2}$ de sorte que $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\mathrm{dt}$. On a alors

1. *$\forall x \in [1,+\infty[$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$*

2. *$\forall t \in [0,+\infty[$, la fonction$x \longmapsto f(x,t)$ admet une limite $\ell(t)$ quand x tends vers $+\infty$ avec*

$$\ell(t) = \begin{cases} 0 & si\ t > 0 \\ 1 & si\ t = 0 \end{cases}$$

et la fonction ℓ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ (continue partout sauf en 0)

3. *Pour tout $(x,t) \in [1,+\infty[\times[0,+\infty[, |f(x,t)| = e^{-x^2t^2} \leq e^{-t^2} = \varphi(t)$, avec la fonction φ est intégrable sur $[0,+\infty[$*

Par suite, d'après le théorème 5, on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} F(x) &= \lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^2t^2}\mathrm{dt} \\ &= \int_0^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} e^{-x^2t^2}\mathrm{dt} \\ &= \int_0^{+\infty} \ell(t)\mathrm{dt} = \int_0^{+\infty} 0\mathrm{dt} = 0 \end{aligned}$$

□

1.2 Dérivabilité

Théorème 6 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit J une partie (non vide) quelconque de $\mathbb{R}$. Soit $f : (x,t) \longmapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $J \times I$. On suppose que pour chaque x de J, la fonction $t \longrightarrow f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I.*
On suppose de plus que

1. *$\partial f/\partial x$ existe sur $J \times I$.*
2. *pour tout $t \in I$, la fonction $x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur J,*
3. *pour tout $x \in J$, la fonction $t \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I,*
4. *il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue par morceaux, intégrable positive sur I telle que*

$$\forall (x,t) \in J \times I, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leq \varphi(t).$$

Alors la fonction $F : x \longmapsto \int_I f(x,t)\mathrm{dt}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et de plus

$$\forall x \in J,\ F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{dt}$$

Démonstration Puisque pour chaque $x \in J$, la fonction $t \longrightarrow f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I, la fonction F est définie sur J.
Soit $a \in J$, pour $(x,t) \in J \times I$, posons

$$g(x,t) = \begin{cases} \frac{f(x,t)-f(a,t)}{x-a} & \text{si } x \neq a \\ \frac{\partial f}{\partial x}(a,t) & \text{si } x = a \end{cases}$$

— Pour chaque x dans J, la fonction $t \longmapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur I (y compris pour $x = a$).
— Pour chaque t dans I, la fonction $x \longmapsto g(x,t)$ est continue sur J.

— Soit $(x,t) \in (J \backslash \{a\}) \times I$. D'après l'inégalité des accroissements finis,

$$|g(x,t)| = \left|\frac{f(x,t)-f(a,t)}{x-a}\right| \leq \sup\left\{\left|\frac{\partial f}{\partial x}(u,t)\right|, u \in J\right\} \leq \varphi(t)$$

ce qui reste vrai quand $x = a$ et $t \in I$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres (Théorème 4), la fonction $G : x \longmapsto \int_I g(x,t)\mathrm{dt}$ est continue sur J et en particulier en a. On en déduit que le taux $\frac{F(x)-F(a)}{x-a}$ a une limite quand x tend vers a et donc que F est dérivable en a. De plus,

$$\begin{aligned} F'(a) = \lim_{x\to a} \frac{F(x)-F(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a} \int_I g(x,t)\mathrm{dt} \\ &= \int_I \lim_{x\to a} g(x,t)\mathrm{dt} \\ &= \int_I g(a,t)\mathrm{dt} \\ &= \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)\mathrm{dt} \end{aligned}$$

Ainsi, F est dérivable sur J et et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Enfin, toujours d'après le théorème 4 la fonction $F' : x \longmapsto \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{dt}$ est continue sur J et donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J. □

Exemple 5 *La fonction F donnée par*

$$F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(xt)}{1+t}\mathrm{dt}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En effet, considérons

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}\times[1,+\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x,t) & \longmapsto & \frac{e^{-t}\sin(xt)}{1+t} \end{array}$$

Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f(x,.)$ est continue par morceaux sur $[1,+\infty[$ et intégrable, puisque $|f(x,t)| \leq e^{-t}$ et $t \longmapsto e^{-t}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. D'autre part, la fonction

$$\frac{\partial f}{\partial x} : (x,t) \longmapsto \frac{te^{-t}\cos(tx)}{1+t}$$

est définie sur $\mathbb{R}\times[1,+\infty[$, continue par rapport à x, continue par morceaux par rapport à t, et vérifie l'hypothèse de domination sur $\mathbb{R}\times[1,+\infty[$, puisque

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times[1,+\infty[, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\frac{te^{-t}\cos(tx)}{1+t}\right| \leq e^{-t}$$

et que $t \longmapsto e^{-t}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. D'après le théorème 6, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = \int_1^{+\infty} \frac{te^{-t}\cos(tx)}{1+t}\mathrm{dt}$$

□

Corollaire 3 *Comme pour la continuité, le théorème 6 reste vraie si l'hypothèse de domination est vérifiée sur toute partie compacte K incluse dans J, c'est-à-dire :*

$$\forall (x,t) \in K \times I, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi_K(t).$$

Par récurrence, on en déduit du théorème 6, le théorème plus général suivant :

Théorème 7 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit J une partie (non vide) quelconque de $\mathbb{R}$. Soit $f : (x,t) \longmapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $J \times I$. On suppose que pour chaque x de J, la fonction $t \longrightarrow f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I.*
On suppose de plus que f est pourvue sur $J \times I$ de dérivées partielles successives par rapport à sa première variable x jusqu'à l'ordre $n \geq 1$ (resp. à tout ordre) vérifiant ;

1. *pour chaque $k \in [1,n]$ (resp. $k \in \mathbb{N}^*$) et chaque x de J, la fonction $t \longmapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;*
2. *pour chaque $k \in [1,n]$ (resp. $k \in \mathbb{N}^*$) et chaque t de I, la fonction $x \longmapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue sur J ;*
3. *pour chaque $k \in [1,n]$ (resp. $k \in \mathbb{N}^*$), il existe une fonction φ_k, définie, continue par morceaux et intégrable sur I telle que,*

$$\forall (x,t) \in J \times I, \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \varphi_k(t).$$

Alors, la fonction $F : x \longmapsto \int_I f(x,t)\mathrm{dt}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J et

$$\forall k \in [1,n], \forall x \in J, F^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\mathrm{dt}.$$