Département de mathématiques

Année universitaire 2025-2026
SMA-LNG S IV - Analyse 5

Analyse 5

Y. Mazigh

Chapitre 2

Intégrales multiples

Définition 1 *On appelle pavé de* $\mathbb{R}^n$ *tout ensemble du type* $P = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$ *où pour tout* k, I_k *est un intervalle fermé borné de* $\mathbb{R}$. *On appelle mesure* n*-dimensionnelle de* P *le réel strictement positif* $\mathrm{mes}(P) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ *où, pour tout* k, λ_k *est la longueur de* I_k *(si* $I_k = [a,b], \lambda_k = b - a$*).*

Définition 2 (Subdivision d'un pavé de $\mathbb{R}^n$) *Soit* $P = \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$ *un pavé de* $\mathbb{R}^n$. *On appelle subdivision de* P *une famille* $\sigma = \{\sigma_1, \cdots, \sigma_n\}$ *où pour chaque* $i \in \{1, \cdots, n\}$, $\sigma_i = (c_{i,j})_{j \in 0,\cdots,p_i}$ *est une subdivision de l'intervalle* $[a_i, b_i]$.
Les pavés $\prod_{i=1}^{n}[c_{i,k_i}, c_{i,k_{i+1}}]$ *pour* $k_i \in \{0, \cdots, p_i - 1\}$ *sont appelés les cellules de la subdivision* σ *de pavé* P.

Remarque 2 *Une subdivision d'un pavé correspond à un découpage du pavé en un nombre fini de pavés (les cellules).*

Définition 3 (Fonction en escalier) *Soit* f *une application réelle définie sur un pavé* P *de* $\mathbb{R}^n$.

— *L'application* f *est dite en escalier sur le pavé* P *si* f *est bornée sur* P *et s'il existe une subdivision du pavé* P *telle que* f *soit constante sur l'intérieur de chaque cellule de la subdivision.*

— *Une subdivision du pavé* P *est dite adaptée à l'application en escalier* f *si* f *est constante sur l'intérieur de chaque cellule de la subdivision.*

Exemple 6

1. *L'application*

$$f: \begin{array}{ccc} P = [1,4] \times [0,3] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 1 \end{array}$$

est une application en escalier. Toute subdivision de P *est adaptée à* f.

2. *L'application*

$$g: \begin{array}{ccc} P = [1,4] \times [0,3] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \min\{E(x), E(y)\} \end{array}$$

est une application en escalier. Une subdivision adaptée à g *est définie par les neuf cellules* $\{[i, i+1] \times [j, j+1]\}_{1 \le i \le 3, 0 \le j \le 2}$.
La subdivision $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$, $\sigma_1 = (1, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, 4)$ *et* $\sigma_2 = (0, 1, 3)$, *est une subdivision de* $[1,4] \times [0,3]$ *non adapté à* g, *car* g *n'est pas constante sur la cellule* $[\frac{7}{4}, 4] \times [1,3]$.

Remarque 3 *Une fonction en escalier sur un pavé P de $\mathbb{R}^2$ avec $n \geq 2$ peut prendre un nombre infini de valeurs. Par exemple, la fonction f définie sur $[0,1] \times [0,1]$ par*

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & si\, 0 < x < 1 \text{ } et\, 0 < y < 1 \\ y & si\, x = 0 \text{ } et\, 0 \leq y \leq 1 \\ y^2 & si\, x = 1 \text{ } et\, 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

est une fonction en escalier sur $[0,1] \times [0,1]$, mais elle prend un nombre infini de valeurs.

Définition 4 (Intégrale d'une fonction en escalier) *Soient f une fonction en escalier sur un pavé P et σ une subdivision adaptée à f. Désignons par $P_1, \cdots, P_N$ les cellules de cette subdivision et par $\alpha_1, \cdots, \alpha_N$ les valeurs constantes prises par f sur l'intérieur de chaque cellule.*
On appelle intégrale de f sur le pavé P le réel

$$I_\sigma(f) = \sum_{k=1}^{N} \mathrm{mes}(P_k)\alpha_k$$

Cette intégrale est notée $\int_P f(x)\mathrm{d}x$.

Proposition 1 *Soient f une fonction en escalier sur un pavé P et σ une subdivision adaptée à f. Le nombre réel $I_\sigma(f)$ ne dépend pas du choix de la subdivision σ adaptée à f.*

Démonstration Exercice. $\square$

Exemple 7 *Considérons l'application*

$$\begin{array}{rccc} g: & P = [1,4] \times [0,3] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \min\{E(x), E(y)\} \end{array}$$

L'application g est en escalier sur P et est constante sur l'intérieur de chacune des neufs cellules $\{[i,i+1] \times [j,j+1]\}_{1 \leq i \leq 3, 0 \leq j \leq 2}$ qui forment une subdivision du pavé P. Donc

$$\int_{[1,4]\times[0,3]} g(x)\mathrm{d}x = 0+1+1+0+1+2+0+1+2 = 8$$

Remarque 4 *Soit P un pavé de $\mathbb{R}^n$ et soient ϕ et ψ deux fonction en escalier sur P. Alors*

— *Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,*

$$\int_P \alpha\phi(x) + \beta\psi(x)\mathrm{d}x = \alpha \int_P \phi(x)\mathrm{d}x + \beta \int_P \psi(x)\mathrm{d}x$$

— *Si $\phi \leq \psi$ sur P, alors $\int_P \phi(x)\mathrm{d}x \leq \int_P \psi(x)\mathrm{d}x$.*

Définition 5 (Fonction Riemann-intégrable sur un pavé) *Soient P un pavé de $\mathbb{R}^n$ et f une application définie sur P à valeur dans $\mathbb{R}$. L'application f est dite intégrable au sens de Riemann sur P si pour tout réel ε strictement positif, il existe deux applications ψ_ε et ϕ_ε de P dans $\mathbb{R}$, en escalier sur P, telles que*

1. *$\forall x \in P \quad \psi_\varepsilon(x) \leq f(x) \leq \phi_\varepsilon(x)$,*
2. *$\int_P (\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon)(x)\mathrm{d}x \leq \varepsilon$.*

Remarque 5 *Une application intégrable au sens de Riemann sur un pavé P est bornée sur l'intérieur P.*

Proposition 2 *Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann sur un pavé P de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe deux suites de fonctions en escalier $(\psi_m)_{\in\mathbb{N}^*}$ et $(\phi_m)_{\in\mathbb{N}^*}$ telles que :*

1. $\forall m \in \mathbb{N}^*\ \forall x \in P \quad \psi_m(x) \leq f(x) \leq \phi_m(x)$,
2. $\lim\limits_{m\to+\infty} \int_P (\phi_m - \psi_m)(x)\mathrm{d}x = 0$.

Démonstration La fonction f étant intégrale au sens de Riemann sur P, donc pour tout réel ε strictement positif, il existe deux applications ψ_ε et ϕ_ε de P dans $\mathbb{R}$, en escalier sur P, telles que

1. $\forall x \in P \quad \psi_\varepsilon(x) \leq f(x) \leq \phi_\varepsilon(x)$,
2. $\int_P (\phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon)(x)\mathrm{d}x \leq \varepsilon$.

Ainsi il suffit de considérer successivement des réels ε de la forme $\varepsilon = \frac{1}{m}$ pour $m \in \mathbb{N}^*$. $\square$

Remarque 6 *Les suites $(\int_P \psi_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ et $(\int_P \phi_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ sont des suites de Cauchy dans $\mathbb{R}$. En effet, on a pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$\forall x \in P \quad \psi_\varepsilon(x) \leq f(x) \leq \phi_\varepsilon(x)$$

donc

$$\forall x \in P \quad 0 \leq f(x) - \psi_\varepsilon \leq \phi_\varepsilon - \psi_\varepsilon$$

Ainsi, pour tous $p \geq m$ et $q \geq m$, on obtient

$$\begin{array}{rcl} |\psi_p - \psi_q| & \leq & |f - \psi_p| + |f - \psi_q| \\ & \leq & |\phi_p - \psi_p| + |\phi_q - \psi_q| \end{array}$$

D'où

$$\begin{array}{rcl} \left| \int_p \psi_p - \int_P \psi_q \right| & \leq & \int_P |\psi_p - \psi_q| \\ & \leq & \int_P |\phi_p - \psi_p| + |\phi_q - \psi_q| \\ & \leq & \int_P |\phi_p - \psi_p| + \int_P |\phi_q - \psi_q| \\ & \leq & \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} \leq \dfrac{2}{m} \end{array}$$

ce qui montre que la suite $(\int_P \psi_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy.
Pour tous $p \geq m$ et $q \geq m$, on a

$$\begin{array}{rcl} |\phi_p - \phi_q| & \leq & |\phi_p - \psi_p + \psi_p - \psi_q + \psi_q - \phi_q| \\ & \leq & |\phi_p - \psi_p| + |\psi_p - \psi_q| + |\psi_q - \phi_q| \end{array}$$

donc

$$\begin{array}{rcl} \left| \int_p \phi_p - \int_P \phi_q \right| & \leq & \int_P |\phi_p - \phi_q| \\ & \leq & \int_P |\phi_p - \psi_p| + |\psi_p - \psi_q| + |\psi_q - \phi_q| \\ & \leq & \dfrac{4}{m} \end{array}$$

ce qui montre que la suite $(\int_P \phi_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy.

Remarquons que les suites $(\int_P \psi_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ et $(\int_P \phi_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ ont une même limite qui dépend uniquement de f et de P. Cela justifie la définition suivante.

Définition 6 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ intégrable au sens de Riemann sur un pavé P de $\mathbb{R}^n$. On appelle intégrale de f sur P le réel*

$$\lim_{m\to+\infty} \int_P \psi_m = \lim_{m\to+\infty} \int_P \phi_m$$

que l'on note $\int_P f$ ou $\int_P f(x)\mathrm{d}x$.

Proposition 3 *Soit P un pavé de $\mathbb{R}^n$ et soit f une fonction réelle bornée sur P. Soit $\mathcal{E}_+(f)$ (resp. $\mathcal{E}_+(f)$) l'ensemble des fonctions réelle φ, en escalier sur P, vérifiant*

$$\forall x \in P \quad \varphi(x) \geq f(x) \quad (resp.\ \varphi(x) \leq f(x))$$

Posons

$$I_+(f) = \mathrm{Inf}_{\varphi\in\mathcal{E}_+(f)} \int_P \varphi(x)\mathrm{d}x \quad et \quad I_-(f) = \mathrm{Sup}_{\varphi\in\mathcal{E}_-(f)} \int_P \varphi(x)\mathrm{d}x$$

Alors

$$f \text{ est intégrable sur } P \quad \Longleftrightarrow \quad I_+(f) = I_-(f)$$

et on a alors

$$\int_P f(x)\mathrm{d}x = I_+(f) = I_-(f).$$

Démonstration [3, Théorème IV.3.5]. □

Proposition 4 *Soit f une fonction réelle continue sur un pavé P de $\mathbb{R}^n$. Alors f est intégrable au sens de Riemann sur P.*

Démonstration Par hypothèse f est une fonction continue sur P, or P est un compact de $\mathbb{R}^n$, la fonction f est continue uniformément sur P. Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \quad \text{tel que} \forall x, y \in P \ (||x-y|| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{\mathrm{mes}(P)})$$

Soit σ une subdivision de P dont les cellules P_α aient un diamètre inférieure à η. La subdivision σ étant fixée, choisissons un point $x_\alpha \in P_\alpha$ et définissons $\varphi : P \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x_\alpha) & \text{si} \quad x \in \overset{\circ}{P}_\alpha \\ f(x) & \text{si } x \in P \text{ qui n'est intérieur à aucune celle de } \sigma \end{cases}$$

La fonction φ est en escalier sur P et vérifie :

$$\forall x \in P \quad |f(x) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{\mathrm{mes}(P)}$$

Désignant par θ la fonction constante égale à $\frac{\varepsilon}{\mathrm{mes}(P)}$ sur P, on voit immédiatement que les conditions de la définition 5 sont vérifiées. □

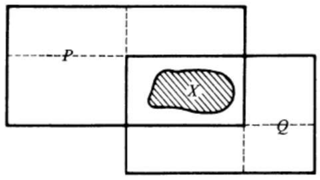
2.0.1 Fonctions Riemann-intégrables sur un ensemble borné

Lemme 1 *Soit f une fonction réelle définie sur une partie bornée X de $\mathbb{R}^n$. A chaque pavé P contenant X, associons la fonction f_P :*

$$\forall x \in P \quad f_P(x) = \begin{cases} f(x) & si\, x \in X \\ 0 & si\, x \in P \setminus X \end{cases}$$

Si, pour un choix du pavé P, la fonction f_P est intégrable, il en est de même pour tout autre choix de P ; et l'intégrale $\int_P f_P$ ne dépend pas du choix de P.

Démonstration Soient P, Q deux pavés contenant X, leur intersection $P \cap Q$ est un pavé contenant X, et pour chacun des pavés P, Q i existe une subdivision admettant $P \cap Q$ pour cellule



Si la fonction f_P est intégrable sur P, il en est de même de sa restriction à $P \cap Q$. De plus

$$f_Q = \begin{cases} f_P \text{ sur } P \cap Q \\ 0 \quad \text{sur } Q \setminus P \end{cases}$$

Puisque f est nulle sur $Q \setminus P$ et $P \setminus Q$, on a

$$\int_P f_P = \int_{P\cap Q} f_P = \int_{P\cap Q} f_Q = \int_Q f_Q$$

$\square$

Définition 7 *Soit X un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}^n$. Une application f définie sur X est dite intégrable au sens de Riemann sur X s'il existe un pavé P contenant X tel que l'application f_P soit intégrable sur P. Le nombre $\int_P f_P$ est appelé intégrale de f sur X et noté $\int_X f$.*

Exemple 8 *Soit X le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par*

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x + y \leq 1\}$$

Considérons la fonction $f : (x, y) \in X \longmapsto x$. Notons f_P l'application qui prolonge f par 0 sur le pavé $P = [0, 1] \times [0, 1]$ et montrons que f_P est Riemann-intégrable sur P.
Considérons les applications en escalier ϕ_n et ψ_n définies sur les cellules $P_{ij} = [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}] \times [\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}]$ par :

$$\forall (x, y) \in P_{ij} \quad \phi_n(x, y) = \begin{cases} \frac{i+1}{n} & si\ \frac{i+j+2}{n} \leq 1 \\ 0 & sinon \end{cases} \qquad et \quad \psi_n(x, y) = \begin{cases} \frac{i}{n} & si\ \frac{i+j+2}{n} \leq 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_P \psi_n &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-i-2}\frac{i}{n}\\
&= \frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} i(n-i-1)\\
&= \frac{1}{n^3}(\frac{(n-1)n(n-1)}{2}-\frac{(n-1)n(2n-1)}{6})\\
&= \frac{n(n-1)(n-2)}{6n^3}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_P \phi_n &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-i-2}\frac{i+1}{n}\\
&= \frac{n(n-1)(n-2)}{6n^3}+\frac{1}{n^3}\left(n^2-\frac{n(n-1)}{2}-n\right)
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_P \phi_n = \lim_{n\to+\infty}\int_P \psi_n = \frac{1}{6}$$

On vérifie par ailleurs que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $(x,y) \in P$, on a

$$\psi_n(x,y) \leq f_P(x,y) \leq \phi_n(x,y)$$

Par suite f_P est une fonction intégrable sur P et $\int_P f_P = \frac{1}{6}$.

2.0.2 Conditions d'intégrabilité

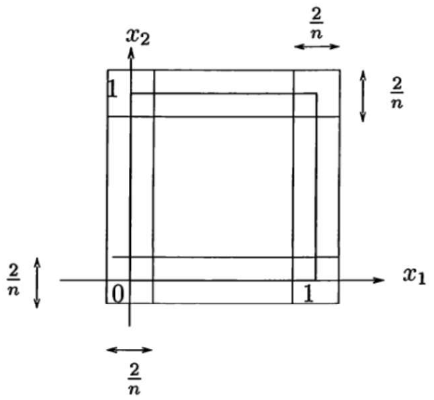
Définition 8 *Un ensemble E de $\mathbb{R}^n$ est dit négligeable au sens de Riemann si pour tout réel ε strictement positif, il existe une famille finie de pavés $(P_K)_{k\in\{1,\cdots,N\}}$ tel que :*

1. $E \subset \cup_{k\in\{1,\cdots,N\}} P_k$
2. $\sum_{k=1}^{N} \mathrm{mes}(P_K) \leq \varepsilon$.

Exemple 9 *La frontière du pavé $P = [0,1]\times[0,1]$ est négligeable dans $\mathbb{R}^2$. En effet, considérons les pavés suivants :*

$$P_{1,n} = [0,1]\times[\frac{-1}{n},\frac{1}{n}], \quad P_{2,n} = [1-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}]\times[0,1]$$

$$P_{3,n} = [0,1]\times[1-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}], \quad P_{4,n} = [\frac{-1}{n},\frac{1}{n}]\times[0,1]$$



Alors

$$\partial P \subset \cup_{k=1}^{4} P_{k,n}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{4} \operatorname{mes}(P_{k,n}) &= \frac{2}{n}+\frac{2}{n}+\frac{2}{n}+\frac{2}{n} \\ &= \frac{8}{n}.\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{8}{n} = 0$, *pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un entier* N *tel que* $\frac{8}{N} \le \varepsilon$. *D'où*

— $\partial P \subset \cup_{k=1}^{4} P_{k,N}$

— $\sum_{k=1}^{4} \operatorname{mes}(P_{k,N}) = \frac{8}{N} \le \varepsilon$

ce qui montre que ∂P *est négligeable dans* $\mathbb{R}^2$.

Proposition 5 *Soient* X *un sous-ensemble négligeable de* $\mathbb{R}^n$ *et* f *une fonction bornée sur* X. *Alors l'application* f *est intégrable sur* X *et* $\int_X f = 0$.

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$. Désignons par M un majorant de $|f(x)|$ sur X. Comme X est négligeable, il existe une famille finie de pavés $(P_k)_{k\in 1,\cdots,N}$ telle que

$$X \subset \cup_{k\in\{1,\cdots,N\}} P_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{N} \operatorname{mes}(P_k) \le \frac{\varepsilon}{2M}$$

Notons $Q = \cup_{k\in\{1,\cdots,N\}} P_k$ et considérons un pavé P contenant Q. Les fonctions ϕ et ψ définies sur P par

$$\psi(x) = \begin{cases} -M & \text{si } x \in Q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \quad \phi(x) = \begin{cases} M & \text{si } x \in Q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

sont des fonctions en escalier sur P qui vérifient $\psi(x) \le f(x) \le \phi(x)$ pour tout $x \in P$. De plus,

$$\int_P (\phi - \psi) = \int_Q (\phi - \psi) = \sum_{k=1}^{N} \int_Q 2M = 2M \sum_{k=1}^{N} \operatorname{mes}(P_k) \le 2M.\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

On en conclut que f_P est Riemann-intégrable sur P et par conséquent f est Riemann-intégrable sur X. Comme par ailleurs,

$$0 \le \int_P \phi = \int_Q \phi = M \sum_{k=1}^{N} \operatorname{mes}(P_k) \le M.\frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2}$$

on en déduit que $\int_P \phi = 0$, et donc également $\int_X f = 0$, puisque $|f| \leq \phi$. $\square$

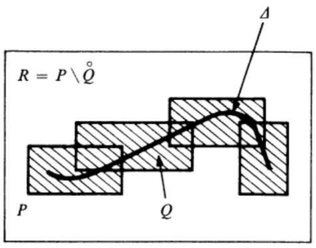
Convenons de dire qu'une partie X de $\mathbb{R}^n$ est **pavable** si elle est la réunion d'une famille **finie** de pavés.
Nous dirons qu'une fonction f à support compact est intégrable si sa restriction à un pavé P contenant le support de f, est intégrable sur P.

Proposition 6 *Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à support compact et soit Δ l'ensemble de points de discontinuité de f. Si f est bornée et Δ est négligeable, alors f est intégrable.*

Démonstration Supposons que Δ soit négligeable. Alors pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble Q pavable, de mesure $\text{mes}(Q) \leq \varepsilon$, tel que Δ soit contenu dans l'intérieur $\overset{\circ}{Q}$ de Q. En effet, par hypothèse, il existe une famille finie de pavés Q_α telle que

$$\Delta \subset \cup_\alpha Q_\alpha \quad \text{et} \quad \sum_\alpha \text{mes}(Q_\alpha) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Nous pouvons alors remplacer chaque pavé Q_α par un pavé homothétique Q'_α, contenant Q_α à son intérieur tel que $\text{mes}(Q'_\alpha) \leq 2\text{mes}(Q_\alpha)$. L'ensemble pavable $Q = \cup_\alpha Q'_\alpha$ répond aux conditions voulues.
Soit alors P un pavé contenant le support de f. L'ensemble fermé $R = P \setminus \overset{\circ}{Q}$ est pavable, car c'est l'intersection des ensembles pavables



Nous pouvons donc poser $R = P \setminus \overset{\circ}{Q} = \cup_{1 \leq \lambda \leq N} R_\lambda$, où $(R_\lambda)_{1 \leq \lambda \leq N}$ désigne une famille finie de pavés, deux à deux sans point intérieur commun.
La restriction de f à R_λ est continue, puisque, par construction, $\Delta \cap R_\lambda = \emptyset$. Comme f est bornée, pour chaque $\lambda = 1, \cdots, N$, il existe une fonction en escalier ϕ_λ sur R_λ vérifiant

$$|f(x) - \phi_\lambda(x)| \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } x \in R_\lambda$$

Définissons une fonction $\phi : P \longrightarrow \mathbb{R}$ en posant :

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \overset{\circ}{Q} \\ \phi_\lambda(x) & \text{si } x \in \overset{\circ}{R}_\lambda \\ f(x) & \text{si } x \in R \text{ qui ne soit intérieur à aucun des pavés } R_\lambda \end{cases}$$

Puisque il existe une subdivision de P dont les pavés R_λ soient des cellules, la fonction ϕ est en escalier sur P. Soit M un majorant de $|f(x)|$ sur P, on a

$$|f(x) - \phi(x)| \leq M \quad \text{si } x \in \overset{\circ}{Q}; \qquad |f(x) - \phi(x)| \leq \varepsilon \quad \text{si } x \in R$$

Si on pose

$$\theta(x) = \begin{cases} M & \text{si } x \in \overset{\circ}{Q} \\ \varepsilon & \text{si } x \in P \setminus \overset{\circ}{Q} \end{cases}$$

on voit que θ est une fonction en escalier sur P ; et on a

$$|f(x) - \phi(x)| \leq \theta(x) \quad \forall x \in P$$

et

$$\int_P \theta = M\text{mes}(Q) + \varepsilon\text{mes}(P \setminus \overset{\circ}{Q}) \leq M\text{mes}(Q) + \varepsilon\text{mes}(P) \leq \varepsilon(M + \text{mes}(P))$$

Le nombre $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, il en résulte que f est intégrable sur P. □

Corollaire 4 *Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée sur une partie bornée de $\mathbb{R}^n$. Pour que f soit intégrable, il suffit que la frontière de X soit négligeable.*

Démonstration Soit $\overline{f}$ le prolongement de f à $\mathbb{R}^n$ obtenu en posant $\overline{f} = 0$ sur $Y = \mathbb{R}^n \setminus X$. La fonction $\overline{f}$ est continue en tout point intérieur à X où à Y. L'ensemble Δ des points de discontinuité de $\overline{f}$ est donc continu dans l'ensemble $adh(X) \cap adh(Y) = \partial X$. D'où le résultat. □

Définition 9 *Soit A une partie* ***bornée*** *de $\mathbb{R}^n$. On dit que A est Riemann-mesurable si la fonction caractéristique χ_A de A est intégrable ; et, dans ce cas, le nombre*

$$\text{mes}(A) := \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x)\mathrm{d}x$$

est appelé la mesure de A.

Théorème 8 *Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}^n$ et soit*

$$I^+(A) := \{\text{mes}(P) \mid P \textit{ pavable}, A \subseteq P\}$$

et

$$I^-(A) := \{\text{mes}(P) \mid P \textit{ pavable}, P \subseteq A\}$$

Alors

$$A \textit{ est mesurable} \Longleftrightarrow \text{Inf}(I^+(A)) = \text{Sup}(I^-(A))$$

Démonstration [3, Théorème IV.7.1] □

Nous n'énoncerons le théorème de Fubini que dans certains cas particuliers qui nous suffiront en pratique.

Théorème 9 (Fubini) *Soit P un pavé de $\mathbb{R}^p$, Q un pavé de $\mathbb{R}^q$, et*

$$f : P \times Q \longrightarrow \mathbb{R}$$

une fonction intégrable sur $P \times Q$, telle que l'ensemble des $x \in P$ pour lesquels la fonction

$$f_x : y \longmapsto f(x, y)$$

n'est pas intégrable dans Q, soit négligeable dans P. Alors la fonction

$$F : x \longmapsto \int_Q f(x, y)\mathrm{d}y$$

est intégrable sur P, et on a

$$\int_{P \times Q} f = \int_P F(x)\mathrm{d}x = \int_P \left(\int_Q f(x, y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Démonstration Nous donnons la preuve dans le cas où on intègre une fonction continue f sur un rectangle $[a, b] \times [c, d]$. En effet, on introduit deux fonctions $F, G : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ en posant

$$F(t) = \int_a^b \left(\int_c^t f(x, y) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

et

$$G(t) = \int_c^t \left(\int_a^b f(x, y) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

Comme la fonction f est continue et $[a, b]$ est un compact, le théorème de dérivation des intégrales à paramètres montre que

$$F'(t) = \int_a^b f(x, t) \mathrm{d}x$$

Le théorème de continuité des intégrales à paramètres montre que la fonction $g : y \longmapsto \int_a^b f(x, y) \mathrm{d}x$ est continue sur $[c, d]$. Puisque $G(t) = \int_c^t g(y) \mathrm{d}y$, on obtient

$$G'(t) = \int_a^b f(x, t) \mathrm{d}x$$

On voit donc que F et G sont dérivables, et que $F' = G'$ sur $[c, d]$; de plus on a $F(c) = G(c) = 0$. On en conclut que F et G sont égales sur $[c, d]$, en particulier $F(d) = G(d)$

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

$\square$

Corollaire 5 *Soient P et Q deux pavés compacts de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$, et soient $g : P \longrightarrow \mathbb{R}$ et $h : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Alors*

$$\int_{P \times Q} g(x) h(y) \mathrm{dxdy} = \left(\int_P g(x) \mathrm{dx} \right) . \left(\int_Q h(y) \mathrm{dy} \right)$$

Lemme 2 *Soit P un pavé de $\mathbb{R}^n$ et soit ϕ une fonction positive en escalier sur P. Alors l'ensemble*

$$Q = \{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; x \in P, 0 \leq x_{n+1} \leq \phi(x)\}$$

est mesurable , de mesure $\mathrm{mes}(Q) = \int_P \phi(x) \mathrm{d}x$.

Démonstration Étant la fonction ϕ est positive en escalier sur P, il existe $\alpha_k \in \mathbb{R}^+$ et P_k pavé tel que

$$P = \cup_{1 \leq k \leq N} P_k, \ \phi_{|P_k} = \alpha_k$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'une part on a

$$\bigcup_{1 \leq k \leq N} P_k \times [\frac{-1}{n}, \alpha_k] \subseteq Q \subseteq \bigcup_{1 \leq k \leq N} P_k \times [0, \frac{1}{n} + \alpha_k].$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{mes}(\bigcup_{1\leq k\leq N} P_k\times[\frac{-1}{n},\alpha_k]) &= \sum_{k=1}^{N}\mathrm{mes}(P_k)(\alpha_k+\frac{1}{n})\\
&= \sum_{k=1}^{N}\alpha_k\mathrm{mes}(P_k)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}\mathrm{mes}(P_k)\\
&= \int_P\phi(x)\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{mes}(P)}{n}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathrm{mes}(\bigcup_{1\leq k\leq N} P_k\times[0,\frac{1}{n}+\alpha_k]) &= \sum_{k=1}^{N}\mathrm{mes}(P_k)(\alpha_k+\frac{1}{n})\\
&= \sum_{k=1}^{N}\alpha_k\mathrm{mes}(P_k)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}\mathrm{mes}(P_k)\\
&= \int_P\phi(x)\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{mes}(P)}{n}.
\end{aligned}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{mes}(P)}{n}=0$, on en conclut

$$\mathrm{mes}(Q)=\int_P\phi(x)\mathrm{d}x.$$

$\square$

Proposition 7 *Soit f une fonction réelle intégrable sur un ensemble borné X de $\mathbb{R}^n$. Alors son graphe Γ_f*

$$\Gamma_f=\{(x,f(x))\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R},\ x\in X\}$$

est une partie négligeable de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Démonstration Soit P un pavé de $\mathbb{R}^n$ contenant X, et soit f_P le prolongement de f obtenu en posant $f_P=0$ sur $P\setminus X$. Comme f est intégrable, pour tout $\varepsilon>0$, il existe deux fonctions en escalier sur P vérifiant :

$$\forall x\in P\quad \phi(x)\leq f(x)\leq\psi(x)\quad \text{et}\quad \int_P[\psi(x)-\phi(x)]\mathrm{d}x\leq\varepsilon$$

Soit

$$Q=\{(x,x_{n+1})\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R};\ x\in P,\, \phi(x)\leq x_{n+1}\leq\psi(x)\}$$

Alors l'ensemble Q et pavable, de mesure égale à $\mathrm{mes}(Q)=\int_P[\psi(x)-\phi(x)]\mathrm{d}x$. Or $\Gamma_f\subset Q$ et $\mathrm{mes}(Q)\leq\varepsilon$, le graphe Γ_f est négligeable dans $\mathbb{R}^{n+1}$. $\square$

Pour calculer des intégrales multiples sur des ensembles plus compliqués que les pavés on utilise souvent les deux théorèmes suivantes :

Théorème 10 (Sommation par piles) *Soit B un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^{n-1}$, et soient $\varphi_1,\varphi_2: B\longrightarrow\mathbb{R}$ deux applications continues telles que $\varphi_1\leq\varphi_2$. Soit*

$$A:=\{(x,x_n)\in B\times\mathbb{R};\varphi_1(x)\leq x_n\leq\varphi_2(x)\}$$

Alors, toute fonction $f: A\longrightarrow\mathbb{R}$ continue et bornée sur A, est intégrable et vérifie

$$\int\int_A f(x,x_n)\mathrm{dxdx_n}=\int_B\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,x_n)\mathrm{dx_n}\right)\mathrm{dx}$$

Exemple 10 *Calculons l'aire du triangle T défini dans $\mathbb{R}^2$ par les inéquations*

$$0 \leq x \leq 2 \quad et \quad 0 \leq y \leq x+1$$

On a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \chi_T(x)\mathrm{dx} &= \int\int_T \mathrm{dxdy} \\ &= \int_0^2 \left(\int_0^{x+1} \mathrm{dy} \right) \mathrm{dx} \\ &= \int_0^2 x+1\mathrm{dx} \\ &= 4 \end{aligned}$$

Théorème 11 (Sommation par tranches) *Soit A un ensemble mesurable compact de $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $(x, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, on ait*

$$(x, x_n) \in A \Longrightarrow a \leq x_n \leq b$$

Si pour tout $x_n \in [a, b]$, l'ensemble

$$A(x_n) := \{x \in \mathbb{R}^{n-1}; (x, x_n) \in A\}$$

est mesurable dans $\mathbb{R}^{n-1}$, alors pour toute fonction $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, on a

$$\int\int_A f(x, x_n)\mathrm{dxdx_n} = \int_a^b \left(\int_{A(x_n)} f(x, x_n)\mathrm{dx} \right) \mathrm{dx_n}.$$

Exemple 11 *Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, où*

$$A = \{(x, y, y) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

Fixons x, on a

$$(x, y, z) \in A \Longrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

Pour tout $x \in [-1, 1]$, on a

$$\begin{aligned} A(x) &:= \{(y, z) \in \mathbb{R}^2; (x, y, z) \in A\} \\ &= \{(y, z) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 + z^2 < 1\} \\ &= \{(y, z) \in \mathbb{R}^2; y^2 + z^2 < 1 - x^2\} \end{aligned}$$

Or l'ensemble $A(x)$ est mesurable pour tout $x \in [-1, 1]$, le théorème précédent montre que

$$\int\int_A f(x, y, z)\mathrm{dxdydz} = \int_{-1}^1 \left(\int_{A(x)} f(x, y, z)\mathrm{dydz} \right) \mathrm{dx}.$$

On va utiliser le même raisonnement pour calculer $\int_{A(x)} f(x, y, z)\mathrm{dydz}$.
En effet, $A(x)$ est le disque de centre $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{1 - x^2}$.

Exercice 4 *Soit D le le disque de centre $(0,0)$ et de rayon R du plan ;*

$$D = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2;\ y^2 + z^2 \leq R^2\}.$$

Montrer que pour toute fonction continue $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\int\int_D f(y,z)\mathrm{dydz} = \int_{-R}^{R} \left(\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} f(y,z)\mathrm{dz} \right) \mathrm{dy}$$

En particulier, si $f = 1$

$$\int\int_D \mathrm{dydz} = \pi R^2$$

□

Ainsi

$$\int\int_{A(x)} f(x,y,z)\mathrm{dydz} = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x,y,z)\mathrm{dz} \right) \mathrm{dy}.$$

En particulier, si $f = 1$, on obtient

$$\begin{aligned} \int\int\int_A \mathrm{dxdydz} &= \int_{-1}^{1} \left(\int_{A(x)} \mathrm{dydz} \right) \mathrm{dx} \\ &= \int_{-1}^{1} \pi(1-x^2)\mathrm{dx} \\ &= \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

□

Remarque 7 *Lorsque $n = 2$, la sommation par piles et la sommation par tranches sont équivalentes et peuvent s'exprimer sous la forme suivante :*
Soit D un compact de $\mathbb{R}^2$ de la forme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

où φ_1 et φ_2 sont des applications continues sur $[a,b]$. Alors D est mesurable et pour toute fonction continue $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, on a

$$\int_D f(x,y)\mathrm{dxdy} = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{dy} \right) \mathrm{dx}.$$

2.1 Théorème de changement de variables

Définition 10 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et soit*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & U & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & x = (x_1, \cdots, x_n) & \longmapsto & (\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)) \end{array}$$

une application de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout $x \in U$, le jacobien de φ en x est le nombre réel

$$J_\varphi(x) := \det \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x) \right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

noté aussi

$$\frac{D(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)}{D(x_1, \cdots, x_n)}$$

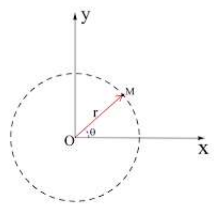
Théorème 12 (Changement de variables) *Soient U et V deux ouvert de $\mathbb{R}^n$ avec U est mesurable, et $\varphi : U \longrightarrow V$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, dont le jacobien est borné sur U.*
Alors l'ouvert $V = \varphi(U)$ est mesurable et pour toute fonction continue et bornée $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$, on a

$$\int_V f(v)\mathrm{dv} = \int_U (f \circ \varphi)(u)|J_\varphi(u)|\mathrm{du}.$$

Coordonnées polaires :

On désigne par $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[$ les coordonnées polaires et $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ les coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$



Si un domaine compact mesurable de $\mathbb{R}^2$ est représenté par D en coordonnées cartésiennes et par Δ en coordonnées polaires, alors pour toute fonction continue f sur D, on a

$$\int\int_D f(x, y)\mathrm{dxdy} = \int\int_\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{drd}\theta$$

En effet, il suffit d'appliquer le théorème 12 sachant que

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

Exemple 12

— *Calculons $\int\int_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{dxdy}$, où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$*
Considérons le $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \Delta =]0, 1[\times] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \overset{\circ}{D} \\ & (r, \theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

Alors, d'après le théorème de changement de variables, on obtient

$$\begin{aligned} \int\int_D \frac{1}{1 + x^2 + y^2}\mathrm{dxdy} &= \int\int_\Delta \frac{1}{1 + r^2} r\mathrm{drd}\theta \\ &= \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r}{1 + r^2}\mathrm{drd}\theta \\ &= \pi\left[\frac{1}{2}\ln(1 + r^2)\right]_0^1 \\ &= \frac{\pi\ln(2)}{2} \end{aligned}$$

— *Calculons* $\int\int_D \mathrm{dxdy}$*, où* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 - 2x + y^2 \leq 1\}$*. Posons*

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

On a

$$\begin{array}{rcl} (x,y) \in D & \Longleftrightarrow & x^2 - 2x + y^2 \leq 1 \\ & \Longleftrightarrow & r^2 - 2r\cos\theta \leq 0 \\ & \Longleftrightarrow & 0 \leq r \leq 2\cos\theta \end{array}$$

D'où

$$\Delta = \{(r,\theta); \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\ 0 \leq r \leq 2\cos\theta\}$$

car $\cos\theta \geq 0 \Longleftrightarrow \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$*. D'où*

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int\int_D \mathrm{dx}\mathrm{d}\theta & = & \displaystyle\int\int_\Delta r\mathrm{drd}\theta \\ & = & \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos\theta} r\mathrm{dr} \right) \mathrm{d}\theta \\ & = & \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\theta \mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 + \cos(2\theta)\mathrm{d}\theta \\ & = & \pi \end{array}$$

— *Calculons* $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{dx} = \lim\limits_{R\to+\infty} \int_0^R e^{-x^2}\mathrm{dx}$*.*
Commençons par calculer $\int\int_{D(0,R)} e^{-x^2-y^2}\mathrm{dxdy}$*, où* $D(0,R)$ *est le disque de centre* O *et de rayon* R*. On a*

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int\int_{D(0,R)} e^{-x^2-y^2}\mathrm{dxdy} & = & \displaystyle\int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r\mathrm{drd}\theta \\ & = & 2\pi\left[-\dfrac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^R \\ & = & -\pi e^{-R^2} + \pi \end{array}$$

D'une parte, on a

$$I_R := \int\int_{[-R,R]^2} e^{-x^2-y^2}\mathrm{dxdy} = \left(\int_{-R}^R e^{-x^2}\mathrm{dx} \right)\left(\int_{-R}^R e^{-y^2}\mathrm{dy} \right)$$

Donc

$$\lim_{R\to+\infty} I_R = \left(2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{dx} \right)$$

D'autre part, on a $D(0,R) \subset [-R,R]^2 \subset D(0,\sqrt{2}R)$*, donc*

$$\int\int_{D(0,R)} e^{-x^2-y^2}\mathrm{dxdy} \leq I_R = \int\int_{[-R,R]^2} e^{-x^2-y^2}\mathrm{dxdy} \leq \int\int_{D(0,\sqrt{2}R)} e^{-x^2-y^2}\mathrm{dxdy}$$

D'où, par passage au limite, on obtient

$$\pi \leq \lim_{R\to+\infty} I_R \leq \pi$$

Ainsi, $\lim_{R \to +\infty} I_R = \pi$*. Par suite*

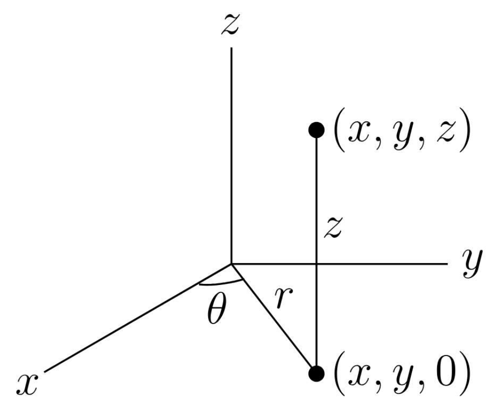
$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \mathrm{dx} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$\square$

Coordonnées cylindriques :

On désigne par $(r, \theta, z) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ les coordonnées cylindriques et $(x, y, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ les coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$



Si un domaine compact mesurable de $\mathbb{R}^3$ est représenté par D en coordonnées cartésiennes et par Δ en coordonnées cylindriques, alors pour toute fonction continue f sur D, on a

$$\int\int\int_D f(x, y, z)\mathrm{dxdydz} = \int\int\int_\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r \mathrm{drd}\theta\mathrm{dz}$$

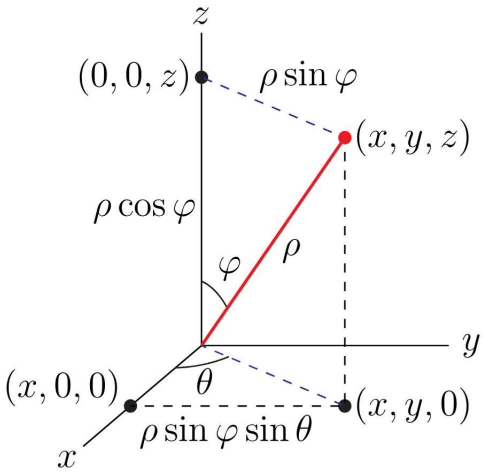
En effet, il suffit d'appliquer le théorème 12 sachant que

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Coordonnées sphériques :

On désigne par $(\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[\times [0, \pi[$ les coordonnées sphériques et (x, y, z) les coordonnées cartésiennes, alors on a

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta, \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi[, \varphi \in [0, \pi[\\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$



Si un domaine compact mesurable de $\mathbb{R}^3$ est représenté par D en coordonnées cartésiennes et par Δ en coordonnées sphériques, alors pour toute fonction continue f sur D, on a

$$\int\int\int_D f(x,y,z)\mathrm{dxdydz} = \int\int\int_\Delta f(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

En effet, il suffit d'appliquer le théorème 12 sachant que

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\sin\varphi \end{vmatrix} = -\rho^2\sin\varphi$$

Exemple 13 *Calculons le volume de la boule B de centre O et de rayon R ;*

$$B = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2\le R^2\}.$$

En utilisant les coordonnées sphériques, on obtient

$$\Delta = \{(\rho,\theta,\varphi); 0\le\rho\le R, 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\varphi\le\pi\} = [0,R]\times[0,2\pi]\times[0,\pi]$$

Ainsi, d'après le théorème de changement de variables, on a

$$\begin{aligned} \int\int\int_B \mathrm{dxdydz} &= \int\int\int_\Delta \rho^2\sin\varphi\ \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^\pi \rho^2\sin\varphi\ \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\ &= \left(\int_0^R \rho^2\mathrm{d}\rho\right)\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^\pi \sin\varphi\ \mathrm{d}\varphi\right) \\ &= \frac{4}{3}\pi R^3 \end{aligned}$$

$\square$

Bibliographie

[1] **GUININ, Daniel et JOPPIN, Bernard.** *Analyse PC.* Editions Bréal, 2004.

[2] **Walter Rudin.** *Analyse réelle et complexe.* Masson, Paris, 1975.

[3] **LELONG-FERRAND, Jacqueline et ARNAUDIÈS, Jean-Marie**. Les Cours de référence. Cours de mathématiques.T.4 Équations différentielles, intégrales multiples.